СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА, ИМЕЮЩЕГО НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ, К ОДНОМУ УРАВНЕНИЮ. НОВОЕ ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ ЭТОЙ ЗАДАЧИ

Е. И. Харламова (Донецк)

К настоящему моменту в замкнутом виде найдено тринадцать частных решений указанной задачи. Их можно разделить на две группы. К первой группе отнесем решения, найденные при условии, что центр масс находится на главной оси гирационного эллипсоида для неподвижной точки. Таковы решения Н. Е. Жуковского [1] [1], Ж. Лагранжа, С. В. Ковалевской [3], С. А. Чаплыгина [4], три решения с полиномиальными интегралами [5] и решение Л. Н. Сретенского [6], обобщившее случай интегрируемости Горячева — Чаплыгина [7]. В остальных пяти решениях условия, накладываемые на положение центра масс, менее ограничительны. При равномерных вращениях тела (решение с тремя линейными интегралами [8]) положение центра масс произвольно. В решении с двумя линейными интегралами [9] и в трех решениях с одним линейным интегралом [10-12] центр масс находится в главной плоскости. Эти пять решений имеют общую черту: в каждом из них имеется линейный интеграл.

Решение, предложенное в настоящей статье, не относится к первой группе — центр масс расположен в главной плоскости (но не на главной оси). Однако в отличие от второй группы интегралы в этом решении нелинейны.

Задача о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку, сведена к системе двух дифференциальных уравнений, каждое из которых имеет первый порядок [13]. Эта система эквивалентна одному дифференциальному уравнению второго порядка, но последнее в общем случае оказывается весьма громоздким. Если же одна из специальных осей координат совпадает с главной осью, задачу удается свести к одному сравнительно простому уравнению. Последнее и использовано для построения нового частного решения рассматриваемой задачи.

§ 1. Пусть λ, λ_1, λ_2 — гиростатический момент, постоянный по отношению к телу, а $x+\lambda$, $y+\lambda_1$, $z+\lambda_2$ — момент количества движения системы относительно неподвижной точки. Пусть, далее, γ, γ_1, γ_2 — неизменный в пространстве вектор, указывающий направление силы тяжести, его модуль Γ равен произведению веса системы на расстояние центра масс от неподвижной точки. Обозначая в специальных осях компоненты гирационного тензора через a, a_1, a_2, b_1, b_2, записываем уравнения движения в виде [13]

$$dx / dt = (a_2z + b_2x)(y+\lambda_1) - (a_1y + b_1x)(z+\lambda_2) \tag{1.1}$$
$$dy / dt = (ax + b_1y + b_2z)(z+\lambda_2) - (a_2z + b_2x)(x+\lambda) - \gamma_2$$

$$d\gamma / dt = (a_2z + b_2x)\gamma_1 - (a_1y + b_1x)\gamma_2 \tag{1.2}$$
$$d\gamma_1 / dt = (ax + b_1y + b_2z)\gamma_2 - (a_2z + b_2x)\gamma$$

Здесь выписаны лишь те четыре (из шести) уравнения, которые использованы в дальнейшем. Вместо остальных двух уравнений записываем интегралы

$$ax^2 + a_1y^2 + a_2z^2 + 2(b_1y + b_2z)x - 2\gamma = 2E \tag{1.3}$$
$$(x+\lambda)\gamma + (y+\lambda_1)\gamma_1 + (z+\lambda_2)\gamma_2 = k \tag{1.4}$$

Пусть одна из специальных осей координат (например третья) является одновременно и главной осью

$$b_2 = 0 \tag{1.5}$$

и пусть, кроме того, гиростатический момент ортогонален этой оси

$$\lambda_2 = 0 \tag{1.6}$$

[1] Н. Е. Жуковский указал интегралы и дал геометрическое истолкование движению тела для того случая, когда центр масс совпадает с неподвижной точкой, а гиростатический момент произволен. При обращении последнего в нуль решение Н. Е. Жуковского сводится к решению Л. Эйлера. Квадратуры в решении Н. Е. Жуковского позже указал Вольтерра [2].

Условия (1.5), (1.6) и являются теми ограничениями, накладываемыми на параметры системы, при которых задача сводится к сравнительно простому одному уравнению.

Из уравнений (1.1) (индекс у b_1 в дальнейшем опущен)

$$dy / dt = z\,[(a - a_2)\,x + by - a_2\lambda] - \gamma_2 \tag{1.7}$$

$$dx / dt = -zX(y, x), \qquad X(y, x) = (a_1 - a_2)\,y + bx - a_2\lambda_1$$

исключаем t

$$\gamma_2 = z\frac{dY}{dx}, \qquad Y(y(x), x) = \frac{a_1 - a_2}{2}y^2 + (bx - a_2\lambda_1)\,y + \frac{a - a_2}{2}x^2 - a_2\lambda x + n_* \tag{1.8}$$

(n_* — некоторая константа)

Подстановка (1.5)—(1.8) в уравнения (1.2) устраняет из последних переменную z

$$X\frac{d\gamma}{dx} + a_2\gamma_1 = (a_1 y + bx)\frac{dY}{dx}, \qquad X\frac{d\gamma_1}{dx} - a_2\gamma = -(by + ax)\frac{dY}{dx}$$

и значит

$$\gamma + i\gamma_1 = (\gamma^\circ + i\gamma_1^\circ)\exp ia_2\int_{x_0}^{x}\frac{d\sigma}{X(y(\sigma), \sigma)} +$$

$$+ \int_{x_0}^{x} F(y(\sigma), \sigma)\frac{dY(y(\sigma), \sigma)}{d\sigma}\left(\exp ia_2\int_{\sigma}^{x}\frac{d\tau}{X(y(\tau), \tau)}\right)d\sigma \tag{1.9}$$

Здесь

$$F(y(x), x) = \frac{(a_1 - ib)\,y(x) + (b - ia)\,x}{X(y(x), x)} \tag{1.10}$$

Из интегралов (1.3), (1.4)

$$a_2 z^2 = 2\gamma + 2E - a_1 y^2 - 2bxy - ax^2, \qquad (x + \lambda)\,\gamma + (y + \lambda_1)\,\gamma_1 + z^2\frac{dY}{dx} = k \tag{1.11}$$

исключаем переменную z

$$\left\{2\frac{dY}{dx} + (x + \lambda)\,a_2\right\}\gamma + (y + \lambda_1)\,a_2\gamma_1 = a_2 k + (a_1 y^2 + 2bxy + ax^2 - 2E)\frac{dY}{dx}$$

Слева стоит действительная часть произведения

$$(\gamma + i\gamma_1)\left\{2\frac{dY}{dx} + (x + \lambda)\,a_2 - i\,(y + \lambda_1)\,a_2\right\}$$

и поэтому, принимая во внимание (1.9), получаем

$$\operatorname{Re}\left\{\left[2\frac{dY}{dx} + (x + \lambda)\,a_2 - i\,(y + \lambda_1)\,a_2\right]\left[(\gamma^\circ + i\gamma_1^\circ)\exp ia_2\int_{x_0}^{x}\frac{d\sigma}{X(y(\sigma), \sigma)} +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_{x_0}^{x} F(y(\sigma), \sigma)\,\frac{dY(y(\sigma), \sigma)}{d\sigma}\left(\exp ia_2\int_{\sigma}^{x}\frac{d\tau}{X(y(\tau), \tau)}\right)d\sigma\right]\right\} =$$

$$= a_2 k + (a_1 y^2 + 2bxy + ax^2 - 2E)\frac{dY}{dx} \tag{1.12}$$

Подставив сюда X, Y, F из (1.7), (1.8), (1.10), приходим к интегро-дифференциальному уравнению, определяющему функцию $y = y(x)$. Если последняя найдена зависимость γ и γ_1 от x устанавливается из (1.9). Затем из (1.11) находим $z = z(x)$, после чего (1.8) дает $\gamma_2 = \gamma_2(x)$, а из (1.7), выполнив квадратуру, получим связь между x и t.

§ 2. Аналогичный результат может быть установлен и посредством упомянутой во введении системы двух уравнений, которые при условиях (1.5), (1.6) содержат лишь четные степени z

$$
\begin{gathered}
(y+\lambda_1) X \frac{dz^2}{dx} - \left[(x+\lambda) a_2 + 2\frac{dY}{dx}\right] z^2 = \Phi(y, x) \\
\left\{\frac{1}{2} X \frac{dz^2}{dx} + (a_1 y + bx)(x+\lambda) - (ax+by)(y+\lambda_1)\right\}^2 + \\
+ \left(\frac{dY}{dx}\right)^2 z^2 + \left\{\frac{1}{2}(ax^2 + a_1 y^2 + a_2 z^2) + bxy - E\right\}^2 = \Gamma^2
\end{gathered}
\qquad (2.1)
$$

$$\Phi(y, x) = 2(ax+by)(y+\lambda_1)^2 + (x+\lambda)(ax^2 - a_1 y^2 - 2a_1\lambda_1 y - 2b\lambda_1 x - 2E) - 2k$$

Первое из этих уравнений оказалось линейным по z^2. Подставив выражение

$$
z^2 = z_0^2 \exp \int_{x_0}^{x} \frac{(\sigma+\lambda) a_2 + 2dY(y(\sigma), \sigma)/d\sigma}{(y(\sigma)+\lambda_1) X(y(\sigma), \sigma)} d\sigma +
$$

$$
+ \int_{x_0}^{x} \frac{\Phi(y(\sigma), \sigma)}{(y(\sigma)+\lambda_1) X(y(\sigma), \sigma)} \left(\exp \int_{\sigma}^{x} \frac{(\tau+\lambda) a_2 + 2dY(y(\tau), \tau)/d\tau}{(y(\tau)+\lambda_1) X(y(\tau), \tau)} d\tau\right) d\sigma
$$

в (2.1), получим уравнение, связывающее y с x, которое, очевидно, эквивалентно уравнению (1.12). В дальнейшем, однако, удобнее применять уравнение (1.12).

§ 3. Уравнение (1.12) существенно упрощается, если $a_2 = a_1$. Совместно с (1.5) это условие означает, что первая координатная ось, несущая центр масс, перпендикулярна к круговому сечению гирационного эллипсоида [14].

Удобно ввести вместо x новую переменную ξ

$$x = \xi + \varkappa\lambda_1 \qquad (\varkappa = a_1 / b) \qquad (3.1)$$

Соотношения, приведенные в § 1, записываются теперь так: (3.2)

$$
X = b\xi,\ y(Y(\xi), \xi) = \frac{Y(\xi) - n}{b\xi} - \frac{a - a_1}{2b}(\xi + 2\varkappa\lambda_1) + \varkappa\lambda \quad \left(n = n_* + \frac{a - a_1}{2}\varkappa^2 - a_1\lambda\lambda_1\right) \qquad (3.3)
$$

$$
\begin{gathered}
\gamma + i\gamma_1 = (\gamma^\circ + i\gamma_1^\circ)\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^{i\varkappa} + \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{(a_1 - ib) y(Y(\tau), \tau) + (b - ia)(\tau + \varkappa\lambda_1)}{b\tau} \left(\frac{\xi}{\tau}\right)^{i\varkappa} \frac{dY}{d\tau} d\tau \\
a_1 z^2 = 2\gamma + 2E - a_1 y^2 - 2(b\xi + a_1\lambda_1) y - a(\xi + \varkappa\lambda_1)^2 \\
\gamma_2 = zdY / d\xi, \qquad d\xi / dt = -bz\xi
\end{gathered}
\qquad (3.4)
$$

Зависимость Y от ξ устанавливается из уравнения

$$
\begin{gathered}
\operatorname{Re}\left\{\left[2\frac{dY}{d\xi} + a_1(\xi + \varkappa\lambda_1 + \lambda - iy(Y, \xi) - i\lambda_1)\right]\left[(\gamma^\circ + i\gamma_1^\circ)\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^{i\varkappa} + \right.\right. \\
\left.\left. + \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{(a_1 - ib) y(Y(\tau), \tau) + (b - ia)(\tau + \varkappa\lambda_1)}{b\tau} \left(\frac{\xi}{\tau}\right)^{i\varkappa} \frac{dY}{d\tau} d\tau\right\} = \right. \\
= a_1 k + \{a_1 y^2 + 2(b\xi + a_1\lambda_1) y + a(\xi + \varkappa\lambda_1)^2 - 2E\} \frac{dY}{d\xi}
\end{gathered}
\qquad (3.5)
$$

§ 4. Простейшие частные решения уравнения (3.5) можно искать в классе многочленов. Пусть, например,

$$Y(\xi) - n = c\xi^2 + 2c_1\xi + c_0 \qquad (4.1)$$

(подлежащие определению постоянные c, c_1, c_0 полагаем действительными). Тогда из (3.2) имеем

$$by = \left(c - \frac{a - a_1}{2}\right)\xi + 2c_1 + a_1\lambda - (a - a_1)\varkappa\lambda_1 + \frac{c_0}{\xi} \qquad (4.2)$$

Вносим (4.1), (4.2) в (3.3) и постоянную $\gamma^\circ + i\gamma_1^\circ$ выбираем так, чтобы полученное выражение не содержало переменной ξ в степени $i\varkappa$. Получаем (4.3)

$$\gamma = s_0 + s_1\xi + s\xi^2, \qquad \gamma_1 = 2\,\frac{c_0c_1}{b\xi} + s_0' + s_1'\xi + s'\xi^2 \qquad s_0 = 2\left\{\frac{cc_0 + 2c_1^2}{a_1} + c_1(\lambda + \varkappa\lambda_1)\right\}$$

$$s_1 = \frac{2}{(b^2 + a_1^2)\,b}\left\{a_1\,[2a_1b\lambda + (b^2 + 2a_1^2 - aa_1)\,\lambda_1]\;c + (6a_1c + b^2 + a_1^2)\,bc_1\right\}$$

$$s = \frac{6a_1c + 4b^2 + 3a_1^2 - aa_1}{4b^2 + a_1^2}\,c$$

$$s_0' = \frac{2}{b}\left\{cc_0 + 2c_1^2 + \left(a_1\lambda + \frac{b^2 - aa_1 + a_1^2}{b}\,\lambda_1\right)c_1\right\} \tag{4.4}$$

$$s_1' = \frac{2a_1\,[(a_1^2 - b^2)\,\lambda - (a - a_1)\,a_1\varkappa\lambda_1]\,c + [6\,(a_1^2 - b^2)\,c - (a - a_1)(b^2 + a_1^2)]\,c_1}{(b^2 + a_1^2)\,b}$$

$$s' = \frac{2\,(a_1^2 - 2b^2)\,c - (a - a_1)\,a_1^2 - 2ab^2}{(4b^2 + a_1^2)\,b}\,c$$

Теперь соотношения (3.4) принимают вид

$$b^2z^2 = -\frac{c_0^2}{\xi^2} + \frac{m_1}{\xi} + m_2 + m_3\xi + m\xi^2 \tag{4.5}$$

$$\gamma_2 = \frac{2}{b}\left(c + \frac{c_1}{\xi}\right)\sqrt{-c_0^2 + m_1\xi + m_2\xi^2 + m_3\xi^3 + m\xi^4} \tag{4.6}$$

$$t = -\int\limits_{\xi_0}^{\xi}\frac{d\xi}{\sqrt{-c_0^2 + m_1\xi + m_2\xi^2 + m_3\xi^3 + m\xi^4}} \tag{4.7}$$

Здесь

$$m_1 = -2c_0\,\{2c_1 + a_1\lambda - (a - a_1)\,\varkappa\lambda_1 + b\lambda_1\}$$

$$m_2 = 2\,\frac{2b^2 - a_1^2}{a_1^2}(cc_0 + 2c_1^2) - 4b\lambda_1c + 4\left(\frac{b^2 - a_1^2}{a_1}\,\lambda + \frac{b^2 + aa_1 - a_1^2}{b}\,\lambda_1\right)c_1 +$$
$$+ (a - a_1)\,c_0 + (b^2 - aa_1 + a_1^2)\,[(a - a_1)\,\varkappa\lambda_1 - 2\lambda a_1] - a_1^2(\lambda^2 + \lambda_1^2) + 2\,\frac{b^2}{a_1}\,E \tag{4.8}$$

$$m_3 = \frac{2c}{(b^2 + a_1^2)}\,\{2\,(5b^2 - a_1^2)\,c_1 + (3b^2 - a_1^2)\,a_1\lambda + [b^3 + (2a_1 - a)\,a_1b + (a - a_1)\,a_1^2\varkappa]\,\lambda_1\} +$$
$$+ 2\,(a - a_1)\,c_1 - (2b^2 + a_1^2 - aa_1)\,\lambda - [(3a_1 - a)\,b + (a - a_1)^2\,\varkappa]\,\lambda_1$$

$$m = 2\,\frac{6c + 2a_1 - a}{4b^2 + a_1^2}\,b^2c - c^2 + (a - a_1)\,c - \frac{1}{4}\,(a - a_1)^2 - b^2$$

Соотношения (3.1), (4.2), (4.5), (4.3), (4.6) выражают основные переменные x, y, z, γ, γ_1, γ_2 в зависимости от ξ. Последняя, как следует из (4.7), является эллиптической функцией времени.

Построение решения будет завершено, если будут указаны условия, которым удовлетворяют коэффициенты c, c_1, c_2 многочлена (4.1). Последний должен обращать уравнение (3.5) в тождество. Подставив (4.1) в (3.5), примем во внимание (4.2), (4.3). Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ξ в обеих сторонах полученного тождества, приходим к шести соотношениям. Два из них исчезают при любых c, c_1, c_0, а остальные четыре, используя обозначения (4.4), (4.8), записываем так:

$$b^2s + \left(c - \frac{a - a_1}{2}\right)bs' + 2mc = 0$$

$$2mc_1 + 2m_3c + b^2s_1 + (a_1\lambda_1 + b\lambda)\,bs + \left(c - \frac{a - a_1}{2}\right)bs' +$$
$$+ [2bc_1 + a_1b\lambda - (a - a_1)\,a_1\lambda_1 + b^2\lambda_1]\,s' = 0 \tag{4.9}$$

$$2m_3c_1 + 2m_2c + b^2s_0 + (a_1\lambda_1 + b\lambda)\,bs_1 + \left(c - \frac{a - a_1}{2}\right)bs_0' +$$
$$+ [2bc_1 + a_1b\lambda - (a - a_1)\,a_1\lambda_1 + b^2\lambda_1]\,s_1' + c_0bs' = 0 \tag{4.10}$$

$$bk = \frac{2}{b}\left\{m_2c_1 + m_1c + c_0c_1\left(c - \frac{a - a_1}{2}\right)\right\} + (a_1\lambda_1 + b\lambda)\,s_0 +$$
$$+ [2c_1 + a_1\lambda + b\lambda_1 - (a - a_1)\,\varkappa\lambda_1]\,s_0' + c_0s_1' \tag{4.11}$$

Внося (4.4), (4.8), в (4.9), находим c и c_1

$$6c = 2R - a - a_1$$

$$6(4b^2 + a_1^2)\,bc_1 = \left\{\frac{b^2 + a_1^2}{R}\,[6b^2 + (2a_1 - a)\,a_1] - (7b^2 + a_1^2)\,a_1\right\} b\lambda -$$

$$- \left\{\frac{b^2 + a_1^2}{R}\,[(7a_1 - 2a)\,b^2 + 2a_1(a_1^2 - aa_1 + a^2)] - 2b^4 - 2(3a_1 - a)\,a_1b^2 - (a + a_1)\,a_1^3\right\} \lambda_1$$

$$R = \pm\sqrt{3b^2 + a_1^2 - aa_1 + a^2}$$

Постоянная энергии E входит в m_2 и определяется из (4.10), а значение постоянной k дает равенство (4.11).

При подстановке (4.3), (4.6) в соотношение

$$\gamma^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = \Gamma^2$$

получим уравнение, связывающее c_0 с Γ

$$s_0^2 + s_0'^2 + 4\,\frac{c_0c_1}{b}\,s_1' + \frac{4}{b^2}\,(c_1^2m_2 + 2cc_1m_1 - c^2c_0^2) = \Gamma^2$$

Найденное решение содержит восемь независимых параметров

$$a,\ a_1,\ b,\ \lambda,\ \lambda_1,\ \Gamma,\ \xi_0,\ \alpha_0$$

Параметр ξ_0 содержится в соотношении (4.7), а α_0 войдет при определении положения тела в пространстве, основанном на кинематических уравнениях, предложенных в §§ 1.5, 1.6 работы [13].

Поступила 13 X 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. В кн. Жуковский Н. Е. Собр. соч., т. 3, М. — Л. ОНТИ, 1936.
2. Volterra V. Sur la theorie des variations des latitudes. Acta Math., 1899, vol. 22.
3. Ковалевская С. В. Задача о движении твердого тела около неподвижной точки. В Сб. «Движение твердого тела вокруг неподвижной точки», М.— Л., Изд-во АН СССР, 1940.
4. Чаплыгин С. А. Новое частное решение задачи о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. В кн. Чаплыгин С. А., Собр. соч., т. 1, М.— Л., Гостехиздат, 1948.
5. Харламов П. В. Полиномиальные решения уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
6. Сретенский Л. Н. О некоторых случаях движения тяжелого твердого тела с гироскопом. Вестн. Моск. ун-та, Сер. матем., механ. 1963, № 3.
7. Чаплыгин С. А. Новый случай вращения тяжелого твердого тела, подпертого в одной точке. В кн. Чаплыгин С. А. Собр. соч., т. 1, М.— Л., Гостехиздат, 1948.
8. Харламов П. В. О равномерных вращениях тела, имеющего неподвижную точку. ПММ, 1965, т. 29, вып. 2.
9. Харламов П. В. Одно решение задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1.
10. Hess W. Über die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren schweren Körpers um einen festen Punkt. Mathem. Ann., 1890, B. 37, H. 2.
11. Grioli G. Esistenza e determinazione della precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante assimetrico. Ann. math. pura ed appl., 1947, s. 4, v. 24, No. 3—4.
12. Харламова Е. И. Об одном частном решении уравнений Эйлера — Пуассона. ПММ, 1959, т. 22, вып. 4.
13. Харламов П. В. Лекции по динамике твердого тела, ч. 1. Изд-во Новосибирск. ун-та, 1965.
14. Жуковский Н. Е. Локсодромический маятник Гесса. В кн. Жуковский Н. Е. Собр. соч., т. 1, М.— Л., Гостехиздат, 1950.