Линейные и квадратичная формы U_{ik} W определяются из уравнений

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial U_{ik}}{\partial z_s} (p_{s1}z_1 + \cdots + p_{sn}z_n) = -\sum_{s=1}^{n} z_s \left(\frac{\partial \psi_{is}}{\partial x_k}\right)_0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, m \\ k = 1, \ldots, m \end{pmatrix}$$

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial z_s} (p_{s1}z_1 + \cdots + p_{sn}z_n) = \sum_{s=1}^{n} z_s^2$$

Функция V вида (2.4) удовлетворяет теореме Ляпунова о неустойчивости [3]. Следовательно, невозмущенное движение неустойчиво.

Поступила 30 X 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Сагитов М. С., Филатов А. Н. Об устойчивости по Ляпунову в критическом случае, когда определяющее уравнение имеет четное число нулевых корней. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения, изд. 2-е, испр. М., Гостехиздат, 1955.
3. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.— Л., Гостехиздат, 1950.

К ВОПРОСУ ОБ ОБЩИХ ИНТЕГРАЛАХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ЖИДКОСТИ

В. Н. Богаевский

(Москва)

Известно [1], что задача о движении твердого тела, погруженного в идеальную однородную несжимаемую жидкость, заполняющую неограниченное односвязное пространство, при отсутствии внешних сил и при предположении, что движение жидкости в начальный момент безвихревое, сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений, установленных Клебшем:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \frac{\partial T}{\partial y_3} - x_3 \frac{\partial T}{\partial y_2}, \qquad \frac{dy_1}{dt} = x_2 \frac{\partial T}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial T}{\partial x_2} + y_2 \frac{\partial T}{\partial y_3} - y_3 \frac{\partial T}{\partial y_2} \qquad (1\ 2\ 3)$$

где T — положительно определенная однородная квадратичная форма переменных x_i, y_i ($i = 1, 2, 3$) с постоянными коэффициентами.

Уравнения Клебша, как установил Кирхгоф, всегда имеют три интеграла

$$2T = M, \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = N, \qquad x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = P$$

где M, N, P — произвольные постоянные. Так как к системе уравнений Клебша применим принцип последнего множителя Якоби, для решения задачи достаточно найти еще один, четвертый, интеграл, не являющийся следствием трех кирхгофовских.

Известны пять случаев, указанные Клебшем, Стекловым и Ляпуновым, когда существует четвертый общий интеграл [1,2]. Стеклов показал [1], что в этих и только в этих случаях четвертый интеграл представляет собой однородный многочлен второй степени относительно x_i, y_i ($i = 1, 2, 3$).

Все пять классических случаев интегрируемости обладают еще одним общим свойством: четвертый общий интеграл в этих случаях можно представить в виде

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2) = \text{const}$$

(этого можно добиться, составляя линейную комбинацию интегралов Кирхгофа и соответствующего четвертого интеграла).

Возникает вопрос: могут ли уравнения Клебша допускать существование первого интеграла вида $F(x_1, x_2, y_1, y_2) = \mathrm{const}$ в случаях, отличных от классических? Этот вопрос без каких-либо дополнительных предположений о виде интеграла решается следующим образом.

Пусть тело отнесено ко второй центральной системе координат [1], так, что

$$
\begin{gathered}
2T = b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + b_{44}y_1^2 + b_{55}y_2^2 + b_{66}y_3^2 + 2b_{12}x_1x_2 + 2b_{23}x_2x_3 + \\
+ 2b_{13}x_1x_3 + 2b_{14}x_1y_1 + 2b_{25}x_2y_2 + 2b_{36}x_3y_3 + 2b_{24}(x_1y_2 + x_2y_1) + 2b_{35}(x_2y_3 + x_3y_2) + \\
+ 2b_{16}(x_3y_1 + x_1y_3)
\end{gathered}
$$

Если тело произвольно, то параметры b_{ij}, входящие в выражение $2T$, подчинены лишь тому условию, что T — определенно положительна; в частности, $b_{jj} > 0$.

Пусть $b_{23} = b_{13} = b_{35} = b_{16} = 0$. Вводя обозначения

$$
a = \frac{b_{44}}{b_{66}}, \quad \alpha = \frac{b_{11} - b_{33}}{b_{66}}, \quad \xi = \frac{b_{36} - b_{25}}{b_{66}}, \quad \varepsilon = \frac{b_{12}}{b_{66}}
$$

$$
b = \frac{b_{55}}{b_{66}}, \quad \beta = \frac{b_{33} - b_{22}}{b_{66}}, \quad \eta = \frac{b_{14} - b_{36}}{b_{66}}, \quad \zeta = \frac{b_{24}}{b_{66}}
$$

и дифференцируя соотношение $F(x_1, x_2, y_1, y_2) = \mathrm{const}$ по времени в силу уравнений движения, получим

$$
\begin{gathered}
(-\zeta x_1 + \xi x_2 - by_2)\frac{\partial F}{\partial x_1} + (\eta x_1 + \zeta x_2 + ay_1)\frac{\partial F}{\partial x_2} + (-\varepsilon x_1 + \beta x_2 - \zeta y_1 + \xi y_2)\frac{\partial F}{\partial y_1} + \\
+ (\alpha x_1 + \varepsilon x_2 + \eta y_1 + \zeta y_2)\frac{\partial F}{\partial y_2} = 0
\end{gathered}
$$

$$
x_2\frac{\partial F}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial F}{\partial x_2} + [-\zeta x_1 + \xi x_2 + (1-b)y_2]\frac{\partial F}{\partial y_1} + [\eta x_1 + \zeta x_2 + (a-1)y_1]\frac{\partial F}{\partial y_2} = 0
$$

Если перейти теперь к новым переменным u, v, ρ, θ так, чтобы второе из этих уравнений перешло в уравнение

$$
\partial F / \partial \theta = 0
$$

так что $F = F(u, v, \rho)$, то первое распадается на несколько линейных уравнений, исследование которых не представляет принципиальных затруднений. Следует заметить, однако, что выкладки при этом оказываются довольно громоздкими. Вид замены переменных будет зависеть от знака и величины выражения $(a - 1)(b - 1)$.

В случае $(a - 1)(b - 1) < 0$ возможны лишь второй случай Клебша и случай Стеклова; в случае $(a - 1)(b - 1) > 0$ — первый и второй случаи Клебша и случай Стеклова; в случае $(a - 1)(b - 1) = 0$ — первый и третий случаи Клебша и случай Ляпунова.

Что касается случая

$$
b_{23}^2 + b_{13}^2 + b_{35}^2 + b_{16}^2 \neq 0
$$

то он дает лишь дополнительные уравнения на функцию F при справедливости выписанных и невозможен в указанных пяти случаях.

Таким образом, общий интеграл вида

$$
F(x_1, x_2, y_1, y_2) = \mathrm{const}
$$

для уравнений Клебша в случаях, отличных от классических, не может иметь места.

Автор благодарит В. В. Румянцева и В. П. Мясникова за внимание к работе.

Поступила 14 II 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Стеклов В. А. О движении твердого тела в жидкости. Харьков, 1893.
2. Ляпунов А. М. Новый случай интегрируемости уравнений движения твердого тела в жидкости. Харьков, 1893.