

Рассматривая формулы (20)—(23), приходим к следующим выводам. Для длинных волн ( $\omega$  достаточно мала) декремент затухания  $\beta$  в два раза больше по абсолютной величине, чем  $\beta_0$ . Для более коротких волн это различие увеличивается: с ростом  $\omega$   $|\beta|$  увеличивается, в то время как  $|\beta_0|$  уменьшается. Кроме того,  $\beta$ , так же как и  $\beta_0$ , в отличие от случая бесконечно глубокой жидкости, зависит от коэффициента поверхностного натяжения. Частоты колебаний  $\delta$  и  $\delta_0$ , меньше, чем для идеальной жидкости. Величина, на которую уменьшается частота колебаний в обоих случаях (с точностью до  $O(1/R)$ ), равна модулю декремента затухания.

Автор приносит благодарность В. Г. Левичу, обратившему внимание за эту задачу, и Н. Н. Моисееву за полезные замечания.

Поступила II XI 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
2. Моисеев Н. Н. О краевых задачах для линеаризованных уравнений Навье — Стокса в случае, когда вязкость мала. Ж. вычислительн. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 3, стр. 548—550.
3. Багаева Н. Я., Моисеев Н. Н. Три задачи о колебании вязкой жидкости. Ж. вычислительн. матем. и матем. физ., 1964, т. 4, № 2, стр. 317—326.
4. Шмидт А. Г. Гравитационные и капиллярные волны на поверхности шарового слоя вязкой гравитирующей жидкости. Ж. вычислительн. матем. и матем. физ., 1964, т. 4, № 1, стр. 183—189.
5. Шмидт А. Г. Колебания вязкой жидкости конечной глубины, вызванные начальным смещением ее свободной поверхности. Ж. вычислительн. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 2, стр. 287—297.
6. Сретенский Л. Н. О волнах на поверхности вязкой жидкости. Тр. ЦАГИ, 1941, № 541.
7. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Успехи матем. н., 1957, т. 12, вып. 5 (77), стр. 3—120.

### МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ОПОРНОМ ПОДШИПНИКЕ

Г. И. Бодяков, Л. А. Оганесян

(Ленинград)

Рассмотрим установившееся течение вязкой несжимаемой жидкости между двумя цилиндрами. Один из цилиндров является круговым и вращается около своей оси с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , а другой неподвижен. Последний близок по форме к некоторому круговому цилиндру, соосному с первым.

1. Введем цилиндрическую систему координат  $(r, \vartheta, z_1)$ , направив ось  $z_1$  по оси вращающегося цилиндра. Запишем уравнения движения жидкости между описанными выше цилиндрами в безразмерном виде, взяв за масштаб длины характерный размер внешнего цилиндра, а за масштаб времени  $1/\omega$ . Согласно [1], они запишутся так:

$$R(\nabla \times \mathbf{V}) \times \mathbf{V} = -\nabla H - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}), \quad \nabla \mathbf{V} = 0, \quad H = p + R\mathbf{V}\mathbf{V}/2 \quad (1.1)$$

Здесь  $R$  — число Рейнольдса,  $\mathbf{V}$  — безразмерный вектор скорости,  $\nabla$  — оператор Гамильтона,  $p$  — гидродинамическое давление.

Неподвижный цилиндр в выбранной системе координат задается уравнением  $r = a + \varepsilon a\Phi(\vartheta)$ , где  $\varepsilon$  и  $a$  — константы. При этом, если неподвижен внешний цилиндр, то  $a = 1$ , если внутренний  $a = r_1$  ( $r_1 < 1$ ).

Граничные условия для уравнения (1.1) запишутся так: если вращается внутренний цилиндр

$$\mathbf{V} = \mathbf{E} \quad \text{при } r = r_1, \quad \mathbf{V} = 0 \quad \text{при } r = 1 + \varepsilon\Phi(\vartheta) \quad (1.2)$$

если вращается внешний цилиндр

$$V = 0 \quad \text{при } r = r_1 + \varepsilon r_1 \Phi(\vartheta), \quad V = E \quad \text{при } r = 1 \quad (1.3)$$

Здесь  $E$  — вектор с компонентами  $E_r = 0$ ,  $E_\vartheta = 1$ .

Кроме (1.2) и (1.3), в дальнейшем будет использовано условие периодичности гидродинамического давления по  $\vartheta$ .

При малых  $\varepsilon$  и  $|\Phi(\vartheta)| < \text{const}$  область, занятая жидкостью, мало отличается от кругового кольца. Относительно кривых, ограничивающих эту область, предполагаем выполненными все условия из [2]. Отобразим конформно область, занятую жидкостью, на круговое кольцо. Отображающая функция может быть записана в виде  $\zeta = \rho e^{i\varphi} = z + \varepsilon \Phi_1(z, \varepsilon)$ , где  $z = r e^{i\vartheta}$ . При конформном отображении фиксируется радиус внутреннего круга  $\rho = 1$ , тогда радиус внешнего круга  $\rho = \beta$  определится данными задачи.

Уравнение (1.1) с краевыми условиями (1.2) или (1.3) перепишем в новой ортогональной системе координат  $(\rho, \varphi)$ . При этом введем новые искомые функции  $V'$  и  $p'$  по формулам

$$V' = J^{1/2} V - V_0, \quad p' = p - p_0 \quad \left( J = \left| \frac{d\zeta}{dz} \right|^2 = 1 + \varepsilon \Phi_2(\rho, \varphi) \right)$$

Здесь  $J$  — якобиан преобразования координат.

Компоненты вектор-функции  $V_0$  и функция  $p_0$  определяются так:

$$u_0 = 0, \quad v_0 = \frac{1}{1 - \beta^2} \left( \rho - \frac{\beta^2}{\rho} \right), \quad p_0 = \frac{1}{(1 - \beta^2)^2} \left( 0.5\rho^2 - 2\beta^2 \ln \rho - \frac{0.25\beta^4}{\rho^4} \right) + \text{const} \quad (1.4)$$

если вращается внутренний цилиндр

$$u_0 = 0, \quad v_0 = \frac{\beta}{\beta^2 - 1} \left( \rho - \frac{1}{\rho} \right), \quad p_0 = \frac{\beta^2}{(\beta^2 - 1)^2} \left( 0.5\rho^2 - 2 \ln \rho - \frac{0.25}{\rho^4} \right) + \text{const} \quad (1.5)$$

если вращается внешний цилиндр.

В последующем предполагается, что  $\Phi_2(\rho, \varphi) \in C^{(1)}(\Omega)$ , где  $\Omega(\rho, \varphi)$  — кольцо, определяемое неравенствами  $1 \leq \rho \leq \beta$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

После указанных замен уравнение (1.1) и краевые условия (1.2) или (1.3) перепишутся так (штрих в обозначении неизвестных в дальнейшем опустим):

$$R [(\nabla \times V_0) \times V + (\nabla \times V) \times V_0 + (\nabla \times V) \times V] = -\nabla H_1 - \nabla \times (\nabla \times V) + \varepsilon F(V) \quad (1.6)$$

$$\nabla V = 0, \quad H_1 = p + 0.5R(V_0 V + V V), \quad V = 0 \quad \text{при } \rho = 1, \quad \rho = \beta$$

$$F(V) = -R\Phi_3 [(\nabla \times V_0) \times V_0 - \Phi_3 \nabla \times (\nabla \times V_0) - \nabla \Phi_3 \times (\nabla \times V_0) - R\Phi_3 [(\nabla \times V_0) \times V + (\nabla \times V) \times V_0] - \Phi_3 \nabla \times (\nabla \times V) - R\Phi_3 (\nabla \times V) \times V - \nabla \Phi_3 \times (\nabla \times V), \quad \Phi_3 = -\Phi_2 / (1 + \varepsilon \Phi_2)$$

Решение задачи (1.6) ищем в виде рядов по малому параметру  $\varepsilon$

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} V_n \varepsilon^n, \quad H_1 = \sum_{n=1}^{\infty} H_{1,n} \varepsilon^n \quad (1.7)$$

Подставим выражения из (1.7) в (1.6) и соберем члены при одинаковых степенях параметра  $\varepsilon$ . Получим следующую последовательность линейных уравнений и краевых условий к ним:

$$R [(\nabla \times V_0) \times V_n + (\nabla \times V_n) \times V_0] + \nabla H_{1,n} + \nabla \times (\nabla \times V_n) = f_n \quad (1.8)$$

$$\nabla V_n = 0, \quad V_n = 0 \quad \text{при } \rho = 1, \quad \rho = \beta$$

$$f_n = -\frac{R}{1 + \varepsilon \Phi_2} \sum_{k=1}^{n-1} (\nabla \times V_k) \times V_{n-k} - R\Phi_3 [(\nabla \times V_0) \times V_{n-1} + (\nabla \times V_{n-1}) \times V_0] - \Phi_3 \nabla \times (\nabla \times V_{n-1}) - \nabla \Phi_3 \times (\nabla \times V_{n-1}) + \chi_n \quad (1.9)$$

Здесь

$$\chi_n = 0 \quad \text{при } n > 1$$

$$\chi_1 = -R\Phi_3 (\nabla \times V_0) \times V_0 - \Phi_3 \nabla \times (\nabla \times V_0) - \nabla \Phi_3 \times (\nabla \times V_0)$$

2. Докажем разрешимость задачи (1.8). Покажем предварительно, что она имеет единственное решение в пространстве вектор-функции  $V_n \in W_2^2(\Omega)$  и  $H_{1,n} \in W_2^1(\Omega)$ . В дальнейшем предполагается, что все операции в (1.8) записаны в полярной системе координат.

Рассмотрим задачу (1.8) при  $f_n \equiv 0$ . Умножим первое векторное уравнение этой задачи скалярно на  $\partial V_n / \partial \varphi$  и проинтегрируем по области  $\Omega$ . Вектор-функция  $\partial V_n / \partial \varphi \in W_2^1$  и соленоидальна. Вследствие ортогональности соленоидальных функций, обращающихся в нуль на границе области, к функциям вида  $\nabla H_{1,n}$ , придем к следующему равенству:

$$R \int_{\Omega} \frac{\partial V_n}{\partial \varphi} [(\nabla \times V_n) \times V_0 + (\nabla \times V_0) \times V_n] \rho d\rho d\varphi + \int_{\Omega} \frac{\partial V_n}{\partial \varphi} \nabla \times (\nabla \times V_n) \rho d\rho d\varphi = 0 \quad (2.1)$$

Можно показать, что второй интеграл в этом равенстве по формулам векторного анализа может быть преобразован так:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial V_n}{\partial \varphi} \nabla \times (\nabla \times V_n) \rho d\rho d\varphi = \int_{\Omega} \left( \nabla \times \frac{\partial V_n}{\partial \varphi} \right) (\nabla \times V_n) \rho d\rho d\varphi + \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial V_n}{\partial \varphi} \times (\nabla \times V_n) \right]_n d\Gamma$$

Здесь  $\Gamma$  — граница области  $\Omega$ , а  $n$  — вектор нормали к  $\Gamma$ . Вследствие того, что  $-\partial V_n / \partial \varphi = 0$  на  $\Gamma$ , интеграл по контуру исчезает. Легко проверить, что  $\nabla \times \partial V_n / \partial \varphi = \partial (\nabla \times V_n) / \partial \varphi$ . Выполнив в правой части предыдущего равенства интегрирование по  $\varphi$ , придем к выводу, что второй интеграл в (2.1) равен нулю. Оставшиеся в (2.1) члены, выраженные в проекциях скорости на направления  $\rho$  и  $\varphi$ , запишутся так:

$$R \int_{\Omega} \left\{ v_0 \left[ \left( \frac{\partial u_n}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_n}{\partial \varphi} \right)^2 \right] - 2v_0 v_n \frac{\partial u_n}{\partial \varphi} + u_n \frac{\partial v_n}{\partial \varphi} \frac{d\rho v_0}{d\rho} \right\} d\rho d\varphi = 0$$

Здесь  $u_n$  и  $v_n$  — компоненты вектора  $V_n$ .

Интегрирование по частям и ряд несложных преобразований приводят последнее равенство к виду

$$R \int_{\Omega} \left\{ v_0 \left[ \left( \frac{\partial u_n}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_n}{\partial \varphi} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \frac{d}{d\rho} \left[ \frac{2v_0}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho v_0}{d\rho} \right] (\rho u_n)^2 \right\} d\rho d\varphi = 0 \quad (2.2)$$

В случае, когда  $v_0$  определяется по формуле (1.5), равенство (2.2) может быть переписано следующим образом:

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\rho^2 - 1}{\rho} \left[ \left( \frac{\partial u_n}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_n}{\partial \varphi} \right)^2 \right] + \frac{2}{\rho} u_n^2 \right\} d\rho d\varphi = 0$$

Из последнего равенства очевидно, что  $u_n \equiv 0$  и  $v_n$  не зависит от  $\varphi$ . В этом случае проекция на направление  $\varphi$  первого уравнения краевой задачи (1.8) при  $f_n \equiv 0$  может быть записана в виде

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_n}{\partial \varphi} = \frac{d^2 v_n}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d v_n}{d\rho} - \frac{v_n}{\rho^2} \quad (2.3)$$

Воспользуемся теперь условием периодичности гидродинамического давления. Правая часть уравнения (2.3) не зависит от  $\varphi$ . Интегрируя (2.3) по  $\varphi$  ( $0 \leq \varphi < 2\pi$ ) и используя периодичность  $p_n$  по  $\varphi$ , получим уравнение

$$\frac{d^2 v_n}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d v_n}{d\rho} - \frac{v_n}{\rho^2} = 0$$

Из этого уравнения и граничных условий для  $v_n$  следует, что  $v_n \equiv 0$ . Следовательно, в том случае, когда вращается внешний цилиндр, уравнения (1.8) имеют единственное решение.

Рассмотрим теперь случай, когда вращается внутренний цилиндр. В этом случае  $v_0$  определяется по формуле (1.4) и равенство (2.2) может быть переписано следующим образом:

$$\int_{\Omega} \frac{\beta^2 - \rho^2}{\rho} \left[ \left( \frac{\partial u_n}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_n}{\partial \varphi} \right)^2 \right] d\rho d\varphi = 2\beta^2 \int_{\Omega} \frac{u_n^2}{\rho} d\rho d\varphi$$

В последнем равенстве заменим  $\partial v_n / \partial \varphi$  согласно уравнению неразрывности выражением  $-(u_n + \rho \partial u_n / \partial \rho)$ . Получим равенство

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\beta^2 - \rho^2}{\rho^2} \left[ \left( \frac{\partial u_n}{\partial \varphi} \right)^2 + \rho^2 \left( \frac{\partial u_n}{\partial \rho} \right)^2 + u_n^2 \right] + (\beta^2 - \rho^2) \frac{\partial u_n^2}{\partial \rho} \right\} d\rho d\varphi = 2\beta^2 \int_{\Omega} \frac{u_n^2}{\rho} d\rho d\varphi$$

Отсюда, интегрируя по частям член  $(\beta^2 - \rho^2) \partial u_n^2 / \partial \rho$ , получим

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\beta^2 - \rho^2}{\rho} \left[ \left( \frac{\partial u_n}{\partial \varphi} \right)^2 + \rho^2 \left( \frac{\partial u_n}{\partial \rho} \right)^2 \right] + \rho u_n^2 \right\} d\rho d\varphi = \beta^2 \int_{\Omega} \frac{u_n^2}{\rho} d\rho d\varphi \leq \beta^2 \int_{\Omega} u_n^2 d\rho d\varphi \quad (2.4)$$

Пусть функция  $u_n$  удовлетворяет неравенству (2.4). Тогда она удовлетворяет и более грубому неравенству.

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\beta^2 - \rho^2}{\rho} \left( \frac{\partial u_n}{\partial \varphi} \right)^2 + \rho u_n^2 + (\beta + 1)(\beta - \rho) \left( \frac{\partial u_n}{\partial \rho} \right)^2 \right] d\rho d\varphi \leq \beta^2 \int_{\Omega} u_n^2 d\rho d\varphi$$

и тем более удовлетворяет неравенству

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\beta^2 - \rho^2}{\rho} \left( \frac{\partial u_n}{\partial \varphi} \right)^2 + \rho u_n^2 + [\beta + 1 - \beta^2(\beta - 1)](\beta - \rho) \left( \frac{\partial u_n}{\partial \rho} \right)^2 \right\} d\rho d\varphi \leq 0 \quad (2.5)$$

полученному из предыдущего заменой правой части по неравенству

$$\int_{\Omega} u_n^2 d\rho d\varphi \leq (\beta - 1) \int_{\Omega} (\beta - \rho) \left( \frac{\partial u_n}{\partial \rho} \right)^2 d\rho d\varphi$$

Последнее неравенство справедливо для функций, обращающихся в нуль на границах кольца. При  $\beta + 1 - \beta^2(\beta - 1) \geq 0$  из (2.5) следует, что  $u_n \equiv 0$ , а тогда, как и выше, получим, что  $v_n \equiv 0$ . Таким образом, и в этом случае имеет место единственность решения задачи (1.8). Во втором случае единственность удалось показать для  $\beta$ , удовлетворяющих неравенству  $\beta + 1 - \beta^2(\beta - 1) \geq 0$ , т. е. для  $\beta \in (1, 1.84)$ . Основное применение рассматриваемая задача находит в теории опорных высокооборотных подшипников, в которой указанное ограничение на  $\beta$  всегда выполнено.

Задачу (1.8) перепишем в операторном виде

$$A \mathbf{V}_n, H + B \mathbf{V}_n, H = \mathbf{f}_n \quad (2.6)$$

оператору  $A$  соответствует краевая задача

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}_n) + \nabla H_n = \mathbf{f}_n, \quad \nabla \mathbf{V}_n = 0, \quad \mathbf{V}_n|_{\Gamma} = 0$$

Последняя исследована в [3]. В этой работе показано, что оператор  $A$ , как оператор из  $W_2^2$  в  $L_2$ , имеет ограниченный обратный  $A^{-1}$ . Оператор  $B$  определяется из (1.8), область его задания шире области задания оператора  $A$ .

Умножив (2.6) слева на  $A^{-1}$ , приходим к уравнению

$$\mathbf{V}_n, H + T \mathbf{V}_n, H = \mathbf{f}_n' \quad (2.7)$$

где  $\mathbf{f}_n' = A^{-1}\mathbf{f}_n$ ,  $T = A^{-1}B$  — вполне непрерывный оператор из  $W_2^2$  в  $L_2$ . Это следует из того, что  $A^{-1}$  ограничен, а  $B$  вполне непрерывен [4], как оператор из  $W_2^2$  в  $L_2$ . Из доказанной единственности решения краевой задачи (1.8) по теоремам Фред-

гольма следует ее разрешимость и оценка

$$\|V_n\|_{W_2^2} \leq c \|f_n\|_{L_2} \quad (2.8)$$

Используя свойства нормы и неравенство Коши, получим из (1.9) оценку

$$\|f_n\|_{L_2} \leq C_1 \left[ \|V_{n-1}\|_{W_2^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \|V_{n-k}\|_{L_4} \|\nabla \times V_k\|_{L_4} + \|\chi_n\|_{L_2} \right] \quad (2.9)$$

Здесь  $c_1$  определяется через функции  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$  и  $V_0$ . Из теорем вложения [4] и из (2.9) следует оценка

$$\|f_n\|_{L_2} \leq C_1 \left[ \|V_{n-1}\|_{W_2^2} + C_2 \sum_{k=1}^{n-1} \|V_{n-k}\|_{W_2^2} \|V_k\|_{W_2^2} + \|\chi_n\|_{L_2} \right] \quad (2.10)$$

где  $C_2$  — константа из соответствующих теорем вложения.

Воспользовавшись (2.10), запишем (2.8) так:

$$\|V_n\|_{W_2^2} \leq C_3 \left[ \|V_{n-1}\|_{W_2^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \|V_{n-k}\|_{W_2^2} \|V_k\|_{W_2^2} + \|\chi_n\|_{L_2} \right] \quad (2.11)$$

( $C_3 = C \max(C_1, C_2 C_1, 1)$ )

3. Докажем сходимость рядов (1.7) по параметру  $\varepsilon$ . Из (1.7) следует, что

$$\|V\|_{W_2^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|V_n\|_{W_2^2} \varepsilon^n \quad (3.1)$$

где  $\|V_n\|_{W_2^2}$  связаны с  $\|V_k\|_{W_2^2}$  ( $k < n$ ) соотношением (2.11).

Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$C_3 x^2 - x(1 - \varepsilon C_3) + C_3 \varepsilon \|\chi_1\|_{L_2} = 0 \quad (3.2)$$

При  $\varepsilon = 0$  это уравнение имеет одним из своих корней  $x = 0$ . Решение уравнения (3.2), близкое к нулю при малых  $\varepsilon$ , ищем в виде

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varepsilon^n \quad (3.3)$$

Подставляя (3.3) в (3.2) и собирая члены при одинаковых степенях параметра  $\varepsilon$ , получим рекуррентное соотношение

$$x_n = C_3 \left[ x_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} x_{n-k} x_k + \|\chi_n\|_{L_2} \right] \quad (3.4)$$

При  $n = 1$  из (2.11) и (3.4) следует неравенство  $\|V_1\|_{W_2^2} \leq x_1$ .

Пусть неравенство  $\|V_m\|_{W_2^2} \leq x_m$  имеет место для всех  $m \leq n - 1$ . Тогда для  $\|V_n\|_{W_2^2}$  справедливо неравенство

$$\|V_n\|_{W_2^2} \leq C_3 \left[ \|V_{n-1}\|_{W_2^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \|V_{n-k}\|_{W_2^2} \|V_k\|_{W_2^2} \right] \leq C_3 \left[ x_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} x_{n-k} x_k \right] = x_n$$

Этим доказано, что ряд (3.3) мажорирует ряд (3.1). Радиус сходимости ряда (3.3) может быть легко определен из (3.2). Ряд (3.3) сходится при  $\varepsilon$ , удовлетворяющих неравенству  $2C_3 \varepsilon |1 + 2C_3 \|\chi_1\|_{L_2} - 2\varepsilon| < 1$ . Следовательно, при таких же условиях сходится ряд (3.1).

Поступила 14 V 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. 2. М., Физматгиз, 1963.
2. Сирьк Г. В. О конформном отображении близких областей. Усп. матем. н., 1965, т. 11, вып. 5 (71).
3. Ладженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., Физматгиз, 1961.
4. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 5. М., Физматгиз, 1959.