О ГАШЕНИИ КАПИЛЛЯРНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ ПОВЕРХНОСТНОАКТИВНЫМИ ВЕЩЕСТВАМИ

А. Г. Шмидт (Москва)

Явление гашения волн на поверхности вязкой жидкости, покрытой пленкой поверхностноактивного вещества, изучалось различными авторами. Математическое исследование этого явления наталкивается на большие трудности. В. Г. Левич в книге [1] предложил гидродинамическую теорию гашения волн и дал решение задачи о затухании волн на поверхности бесконечно глубокой жидкости. Однако точное решение задачи для жидкости конечной глубины оказывается уже довольно громоздким и мало обозримым, в связи с чем возникает необходимость в построении простых приближенных решений. Н. Н. Моисеев [2,3] предложил метод построения асимптотических решений для случая, когда число Рейнольдса велико. В работах автора [4,5] этот метод был применен для решения ряда задач с чистой свободной поверхностью. В настоящей заметке дается приближенное решение плоской линейной задачи о затухании волн вязкой жидкости конечной глубины, свободная поверхность которой покрыта поверхностноактивным веществом. Постановка задачи была сообщена автору В. Г. Левичем.

Пусть ось x системы координат Oxy совпадает с невозмущенной поверхностью жидкости, а ось y направлена вертикально вверх. Введем безразмерные переменные

$$\xi=\frac{x}{h},\qquad \eta=\frac{y}{h},\qquad \tau=\frac{t}{T},\qquad \mathbf{u}=\frac{T}{a}\mathbf{v},\qquad P=\frac{pT^2}{\rho a h}$$

Здесь h — глубина жидкости, T — характерное время, a — характерная амплитуда, V — скорость, p — давление. Приведем уравнения движения вязкой жидкости к следующему виду:

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\tau}+\nabla\left(P+\frac{S}{F}\eta\right)=\frac{1}{R}\Delta\mathbf{u},\qquad \nabla\mathbf{u}=0 \tag{1}$$

$$S=\frac{h}{a},\qquad \mathbf{v}=(v_1,v_2),\qquad \mathbf{u}=(u_1,u_2),\qquad R=\frac{h^2}{\nu T},\qquad F=\frac{(h/T)^2}{gh}$$

Здесь R — число Рейнольдса, F — число Фруда, а уравнение свободной поверхности $y=af(x,t)$ в безразмерных переменных имеет вид

$$\eta=\frac{1}{S}\zeta(\xi,\tau) \tag{2}$$

На дне должно выполняться условие прилипания

$$u_1=u_2=0\qquad \text{при } \eta=-1 \tag{3}$$

На свободной поверхности граничные условия имеют вид [1]

$$p_{nn}+p_\alpha=0,\qquad p_{\gamma\gamma}+p_\gamma=0\qquad \text{при } \eta=0 \tag{4}$$

$$p_\alpha=-\alpha(\Gamma)\,a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\qquad p_\gamma=\frac{\partial\alpha}{\partial\Gamma}\frac{\partial\Gamma}{\partial x}$$

Здесь p_{nn} — нормальная составляющая вектора напряжения; $p_{\gamma\gamma}$ — касательная составляющая вектора напряжения; p_α — капиллярное давление; p_γ — напряжение тангенциальной силы, вызванной наличием поверхностноактивной пленки на свободной поверхности; $\Gamma=\Gamma(x)$ — концентрация поверхностноактивного вещества, $\alpha(\Gamma)$ — переменный коэффициент поверхностного натяжения.

К этим условиям необходимо еще добавить кинематическое условие

$$a\frac{\partial f}{\partial t}=v_2$$

Условия (4) в размерных переменных имеют вид

$$-p+2\mu v_{2y}=\alpha(\Gamma)\,a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\qquad \mu\left(\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial v_2}{\partial x}\right)=\frac{\partial\alpha}{\partial\Gamma}\frac{\partial\Gamma}{\partial x} \tag{5}$$

При больших числах Рейнольдса интересно рассматривать такие поверхностноактивные вещества, которые оказывают максимальное влияние на затухание. В этом предельном случае поверхностноактивная пленка представляет собой несжимаемую пластинку, совершающую вертикальные колебания. Будем считать также, что коэффициент поверхностного натяжения α (Г) слабо зависит от концентрации поверхностноактивного вещества, в силу чего будем полагать его постоянным. Как показал В. Г. Левич [1], в описываемом случае граничное условие (5) на свободной поверхности должно быть заменено следующим условием

$$v_1(x, 0, t) = 0 \tag{6}$$

В безразмерных переменных условия (5) и (6) принимают вид

$$-P + \frac{2}{R} u_{2\eta} = K \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} \quad \text{при } \eta = 0 \left(K = \frac{\alpha T^2}{\rho h^3}\right) \tag{7}$$

$$u_1 = 0 \quad \text{при } \eta = 0 \tag{8}$$

Представим вектор скорости $\mathbf{u}$ в следующем виде:

$$\mathbf{u} = \nabla^* \varphi + \nabla^* \psi \qquad (\nabla^* \psi = (\psi_\eta, -\varphi_\xi)) \tag{9}$$

Тогда, как известно [2,6], уравнения движения (2) и граничные условия запишутся следующим образом:

$$\Delta\varphi = 0, \qquad \psi_\tau = \frac{1}{R} \Delta\psi, \qquad \varphi_\tau + \frac{S}{F} \eta + P = 0 \tag{10}$$

$$\varphi_\xi + \psi_\eta = 0, \qquad \varphi_\eta - \psi_\xi = 0 \qquad (\eta = -1) \tag{11}$$

$$\varphi_{\tau\tau} + \frac{1}{F}(\varphi_\eta - \psi_\xi) = \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial\tau}(\psi_{\xi\eta} - \varphi_{\eta\eta}) + K \frac{\partial^3 \zeta}{\partial\tau\, \partial\xi^2} \tag{12}$$
$$\varphi_\xi + \psi_\eta = 0 \qquad (\eta = 0)$$

Первое условие (12) получено при помощи (7), последнего соотношения (10) и кинематического условия.

Будем рассматривать задачу о свободных колебаниях; решение задачи (10)—(12) будем искать в виде

$$\varphi = \Phi(\xi, \eta) e^{\sigma\tau}, \quad \psi = \Psi(\xi, \eta) e^{\sigma\tau} \tag{13}$$

где σ — некоторое (неизвестное) комплексное число, определяющее декремент затухания и частоту колебаний. В этом случае задача примет вид

$$\Delta\Phi = 0, \qquad \sigma\Psi = R^{-1} \Delta\Psi \tag{14}$$

$$\Phi_\xi + \Psi_\eta = 0, \qquad \Phi_\eta - \Psi_\xi = 0 \qquad \text{при } \eta = -1 \tag{15}$$

$$\sigma^2\Phi + F^{-1}(\Phi_\eta - \Psi_\xi) = 2\sigma R^{-1}(\Psi_{\xi\eta} - \Phi_{\eta\eta}) + K(\Phi_{\eta\xi\xi} - \Psi_{\xi^3}) \tag{16}$$
$$\Phi_\xi + \Psi_\eta = 0 \qquad \text{при } \eta = 0$$

Приближенное решение задачи (14)—(16) может быть получено при помощи асимптотического метода, предложенного Н. Н. Моисеевым [2,3]. В работах автора [4,5] этот метод был использован для построения асимптотических решений ряда задач о колебаниях вязкой жидкости, имеющей чистую свободную поверхность. Идея метода основана на следующем. При больших R в уравнении (14) при старших производных стоит малый параметр. Если этот параметр положить равным нулю, то задача (14)—(16) вырождается в соответствующую задачу о волнах на поверхности идеальной жидкости ($\Psi \equiv 0$ и условия (15) и (16) отсутствуют). Если этот параметр отличен от нуля и достаточно мал, то функция Ψ есть функция типа погранслоя [7].

Функция Ψ компенсирует невязку граничных условий (15) и (16), так как при помощи одной функции Φ удовлетворить этим условиям нельзя. В соответствии с указанным характером функции Ψ вводятся в рассмотрение вместо Ψ функции Ψ_1 и Ψ_2, которые удовлетворяют уравнению (14), причем Ψ_1 компенсирует невязку граничных условий (15), а Ψ_2 компенсирует невязку граничных условий (16). Кроме того, функции Ψ_1 и Ψ_2 вдали от соответствующей границы должны обращаться в нуль, т. е. $\lim \Psi_1 = 0$ при $\eta \to \infty$, $\lim \Psi_2 = 0$ при $\eta \to -\infty$.

Асимптотические представления для функций Ψ_1 и Ψ_2 могут быть теперь найдены при помощи разложения искомых функций в асимптотические ряды по степеням $1 / \sqrt{R}$. Физический интерес представляют первые члены таких разложений. В частности, получим при этом, что функция Ψ_1 (так же как и функция Ψ_2) с точностью до $O(1 / R^{3/2})$ находится из обыкновенного дифференциального уравнения

$$\sigma\Psi_1 = \frac{1}{R}\Psi_{1\eta\eta}$$

Не останавливаясь на деталях построения асимптотического решения (см. [4,5]), приведем результаты вычислений с точностью до $O(1 / R)$ (форма решения соответствует прогрессивным волнам)

$$\Phi = A\left\{\operatorname{ch}[\omega(\eta+1)] + \frac{\omega}{\sqrt{\sigma R}}\operatorname{sh}[\omega(\eta+1)]\right\}e^{-i\omega\xi} \qquad \left(\omega = kh = \frac{2\pi h}{\lambda}\right) \tag{17}$$

$$\Psi_1 = -\frac{i\omega A}{\sqrt{\sigma R}}e^{\sqrt{\sigma R}(\eta+1)-i\omega\xi}, \qquad \Psi_2 = -\frac{i\omega A\operatorname{ch}\omega}{\sqrt{\sigma R}}e^{-\sqrt{\sigma R}\eta-i\omega\xi} \qquad (\operatorname{Re}\sqrt{\sigma}<0)$$

Отметим, что в отличие от случая, когда свободная поверхность является чистой, функция Ψ_2 вблизи свободной поверхности имеет тот же порядок $1/\sqrt{R}$, что и функция Ψ_1 вблизи дна. Подставляя выражения Φ_1 и Φ_2 из (17) в (16), получим для определения σ приближенное уравнение

$$\sigma^2\operatorname{ch}\omega + \omega\operatorname{sh}\omega\left(\frac{1}{F} + K\omega^2\right) + \frac{\omega}{\sqrt{\sigma R}}\left[\sigma^2\operatorname{sh}\omega + 2\omega\operatorname{ch}\omega\left(\frac{1}{F} + K\omega^2\right)\right] = 0 \tag{18}$$

Это уравнение справедливо не для произвольных безразмерных чисел ω, так как при слишком малых ω число Рейнольдса уже нельзя считать большим, а при слишком больших ω (короткие волны) неприменима линейная теория и, кроме того, третий член уравнения (18) уже не будет малым по сравнению с первыми двумя. Однако интервал изменения ω достаточно широк (см. [5]). Если ω находится в указанном интервале, то, согласно теореме Руше, уравнение (18) имеет два корня, т. е. столько же, сколько их имеется в случае идеальной жидкости. Разыскивая эти корни в виде

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{\sigma_1}{\sqrt{R}} + \frac{\sigma_2}{R} + \cdots \tag{19}$$

найдем с точностью до $O(1 / R)$

$$\sigma = \pm\sqrt{\omega\operatorname{th}\omega(F^{-1}+K\omega^2)}\,i - \frac{(1\pm i)\,\omega\sqrt[4]{\omega\operatorname{th}\omega(F^{-1}+K\omega^2)}}{\sqrt{2R}\operatorname{sh}2\omega}(1+\operatorname{ch}^2\omega)$$

Из этого выражения следует, что частота колебаний δ и декремент затухания β определяются следующим образом:

$$\delta = \sqrt{\omega\operatorname{th}\omega(F^{-1}+K\omega^2)} - \frac{\omega\sqrt[4]{\omega\operatorname{th}\omega(F^{-1}+K\omega^2)}}{\sqrt{2R}\operatorname{sh}2\omega}(1+\operatorname{ch}^2\omega) \tag{20}$$

$$\beta = -\frac{\omega\sqrt[4]{\omega\operatorname{th}\omega(F^{-1}+K\omega^2)}}{\sqrt{2R}\operatorname{sh}2\omega}(1+\operatorname{ch}^2\omega) \tag{21}$$

приведем для сравнения аналогичные выражения для случая чистой поверхности (δ_0 — частота колебаний, β_0 — декремент затухания) [4]

$$\delta_0 = \sqrt{\omega\operatorname{th}\omega(F^{-1}+K_0\omega^2)} - \frac{\omega\sqrt[4]{\omega\operatorname{th}\omega(F^{-1}+K_0\omega^2)}}{\sqrt{2R}\operatorname{sh}2\omega} \tag{22}$$

$$\beta_0 = -\frac{\omega\sqrt[4]{\omega\operatorname{th}\omega(F^{-1}+K_0\omega^2)}}{\sqrt{2R}\operatorname{sh}2\omega} \tag{23}$$

где $K_0 = \alpha_0 T^2 / \rho h^3$, α_0 — коэффициент поверхностного натяжения.

Рассматривая формулы (20)—(23), приходим к следующим выводам. Для длинных волн (ω достаточно мала) декремент затухания β в два раза больше по абсолютной величине, чем β_0. Для более коротких волн это различие увеличивается: с ростом ω $|\beta|$ увеличивается, в то время как $|\beta_0|$ уменьшается. Кроме того, β, так же как и β_0, в отличие от случая бесконечно глубокой жидкости, зависит от коэффициента поверхностного натяжения. Частоты колебаний δ и δ_0, меньше, чем для идеальной жидкости. Величина, на которую уменьшается частота колебаний в обоих случаях (с точностью до $O(1/R)$), равна модулю декремента затухания.

Автор приносит благодарность В. Г. Левичу, обратившему внимание за эту задачу, и Н. Н. Моисееву за полезные замечания.

Поступила II XI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
2. Моисеев Н. Н. О краевых задачах для линеаризированных уравнений Навье — Стокса в случае, когда вязкость мала. Ж. вычислительн. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 3, стр. 548—550.
3. Багаева Н. Я., Моисеев Н. Н. Три задачи о колебании вязкой жидкости. Ж. вычислительн. матем. и матем. физ., 1964, т. 4, № 2, стр. 317—326.
4. Шмидт А. Г. Гравитационные и капиллярные волны на поверхности шарового слоя вязкой гравитирующей жидкости. Ж. вычислительн. матем. и матем. физ., 1964, т. 4, № 1, стр. 183—189.
5. Шмидт А. Г. Колебания вязкой жидкости конечной глубины, вызванные начальным смещением ее свободной поверхности. Ж. вычислительн. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 2, стр. 287—297.
6. Сретенский Л. Н. О волнах на поверхности вязкой жидкости. Тр. ЦАГИ, 1941, № 541.
7. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Успехи матем. н., 1957, т. 12, вып. 5 (77), стр. 3—120.

МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ОПОРНОМ ПОДШИПНИКЕ

Г. И. Бодяков, Л. А. Оганесян

(Ленинград)

Рассмотрим установившееся течение вязкой несжимаемой жидкости между двумя цилиндрами. Один из цилиндров является круговым и вращается около своей оси с постоянной угловой скоростью ω, а другой неподвижен. Последний близок по форме к некоторому круговому цилиндру, соосному с первым.

1. Введем цилиндрическую систему координат (r, ϑ, z_1), направив ось z_1 по оси вращающегося цилиндра. Запишем уравнения движения жидкости между описанными выше цилиндрами в безразмерном виде, взяв за масштаб длины характерный размер внешнего цилиндра, а за масштаб времени $1/\omega$. Согласно [1], они запишутся так:

$$R(\nabla\times\mathbf{V})\times\mathbf{V}=-\nabla H-\nabla\times(\nabla\times\mathbf{V}),\qquad \nabla\mathbf{V}=0,\ H=p+R\mathbf{V}\mathbf{V}/2 \tag{1.1}$$

Здесь R — число Рейнольдса, $\mathbf{V}$ — безразмерный вектор скорости, ∇ — оператор Гамильтона, p — гидродинамическое давление.

Неподвижный цилиндр в выбранной системе координат задается уравнением $r=a+\varepsilon a\Phi(\vartheta)$, где ε и a — константы. При этом, если неподвижен внешний цилиндр, то $a=1$, если внутренний $a=r_1$ $(r_1<1)$.

Граничные условия для уравнения (1.1) запишутся так:
если вращается внутренний цилиндр

$$\mathbf{V}=\mathbf{E}\quad\text{при } r=r_1,\qquad \mathbf{V}=0\quad\text{при } r=1+\varepsilon\Phi(\vartheta) \tag{1.2}$$