АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ УПРУГОМ СЛОЕ

С. С. Дымков (Ленинград)

При помощи преобразования Фурье решаются уравнения теории упругости в перемещениях для слоя толщиной h. Получена асимптотика решения по параметру h, причем порядок асимптотики зависит от дифференциальных свойств функций, описывающих объемные силы и внешние напряжения на торцах слоя. Выведены уравнения, сводящие решение трехмерной задачи к решению цепи двухмерных задач.

Решению задачи об упругом слое посвящено большое число работ. Основные из них цитируются в кратком обзоре, приведенном в книге А. И. Лурье [1], в которой даны также оригинальные исследования, использующие символический метод. В настоящей работе применяется преобразование Фурье, что приводит к промежуточным формулам, по существу имеющим тот же вид, что и в [1]. Однако использование преобразования Фурье позволяет при помощи аппарата обобщенных функций провести более подробно анализ полученных выражений. На этом пути удается получить асимптотику решения задачи, а также свести, как обычно принято в подобного рода трехмерных задачах, ее решение к решению цепи двухмерных задач.

Рассмотрим в декартовой системе координат x, y, z упругий слой толщиной h, срединная плоскость которого совпадает с плоскостью $z = 0$. Пусть $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к срединной плоскости, направленный в положительную сторону оси z. Разложим вектор смещения точек слоя на вектор $\mathbf{u}$, параллельный срединной плоскости, и перпендикулярный к ней вектор $w\mathbf{n}$, где w — скалярная функция. Аналогично, на параллельный срединной плоскости вектор $\mathbf{M}$ и перпендикулярный к ней вектор $N\mathbf{n}$ разложим объемную силу, отнесенную к единице объема слоя. Вместо координаты z удобно рассматривать безразмерную координату

$$\zeta = 2z / h \qquad (-1 \leqslant \zeta \leqslant +1)$$

При помощи введенных обозначений уравнения теории упругости в перемещениях можно записать в виде

$$\begin{gathered}\frac{1}{4} h^2\left(\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}\right) + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{2} h \frac{1}{1-2\nu}\operatorname{grad}\frac{\partial w}{\partial \zeta} + \frac{1}{4} h^2 \frac{1}{G}\mathbf{M} = 0 \\ \frac{1}{4} h^2 \Delta w + 2\,\frac{1-\nu}{1-2\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{2} h \frac{1}{1-2\nu}\operatorname{div}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \zeta} + \frac{1}{4} h^2 \frac{1}{G} N = 0\end{gathered} \tag{1}$$

где G — модуль сдвига, а ν — коэффициент Пуассона. Здесь и всюду в дальнейшем дифференциальные операторы Δ, grad и div действуют лишь по переменным x, y. Обратимся к условиям на торцах слоя. Внешнюю силу, действующую на верхнюю поверхность слоя $\zeta = +1$, можно разложить на распределенную по верхней поверхности касательную силу $\mathbf{t}_+$ на единицу площади этой поверхности и действующую по нормали силу $p_+\mathbf{n}$, также отнесенную к единице площади поверхности. Аналогичные внешние силы, действующие на нижнюю поверхность слоя $\zeta = -1$, обозначим через $\mathbf{t}_-$ и $p_-\mathbf{n}$. В принятых обозначениях условия на торцах слоя имеют вид

$$\begin{gathered}\frac{1}{2} h \operatorname{grad} w + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \zeta} = \frac{1}{2} h \frac{1}{G}\begin{cases} \mathbf{t}_+ & (\zeta = +1) \\ -\mathbf{t}_- & (\zeta = -1)\end{cases} \\ \frac{1}{2} h \operatorname{div}\mathbf{u} + \frac{1-\nu}{\nu}\frac{\partial w}{\partial \zeta} = \frac{1}{2} h \frac{1-2\nu}{2G\nu}\begin{cases} p_+ & (\zeta = +1) \\ -p_- & (\zeta = -1)\end{cases}\end{gathered} \tag{2}$$

Рассмотрим отдельно случаи несимметричного и симметричного нагружений слоя по торцам при отсутствии объемных сил и случай слоя, находящегося под действием объемных сил, но свободного от напряжений на торцах. Положим

$$\mathbf{T}_+ = {}^1\!/_2(\mathbf{t}_+ + \mathbf{t}_-), \qquad \mathbf{T}_- = {}^1\!/_2(\mathbf{t}_+ - \mathbf{t}_-), \qquad P_+ = {}^1\!/_2(p_+ + p_-), \qquad P_- = {}^1\!/_2(p_+ - p_-)$$

При несимметричном нагружении (*задача* А) будем решать уравнения

$$\begin{gathered}\frac{1}{4}h^2\left(\Delta\mathbf{u}+\frac{1}{1-2}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}\right)+\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial\zeta^2}+\frac{1}{2}h\frac{1}{1-2\nu}\operatorname{grad}\frac{\partial w}{\partial\zeta}=0\\ \frac{1}{4}h^2\Delta w+2\,\frac{1-\nu}{1-2\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial\zeta^2}+\frac{1}{2}h\frac{1}{1-2\nu}\operatorname{div}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\zeta}=0\end{gathered}\tag{3}$$

с условиями на торцах

$$\frac{1}{2}h\operatorname{grad}w+\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\zeta}=\frac{1}{2}h\frac{1}{G}\mathbf{T}_-,\quad \frac{1}{2}h\operatorname{div}\mathbf{u}+\frac{1-\nu}{\nu}\frac{\partial w}{\partial\zeta}=\pm\frac{1}{2}h\frac{1-2\nu}{2G\nu}P_+(\zeta=\pm 1)\tag{4}$$

Для симметричного нагружения (*задача* В) условия (4) заменяются на

$$\frac{1}{2}h\operatorname{grad}w+\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\zeta}=\pm\frac{1}{2}h\frac{1}{G}\mathbf{T}_+,\qquad \frac{1}{2}h\operatorname{div}\mathbf{u}+\frac{1-\nu}{\nu}\frac{\partial w}{\partial\zeta}=\frac{1}{2}h\frac{1-2\nu}{2G\nu}P_-\qquad(\zeta=\pm 1)$$

Случай объемных сил (*задача* С) сводится к решению уравнений (1) с однородными условиями на торцах

$$\frac{1}{2}h\operatorname{grad}w+\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\zeta}=0,\quad \frac{1}{2}h\operatorname{div}\mathbf{u}+\frac{1-\nu}{\nu}\frac{\partial w}{\partial\zeta}=0\quad(\zeta=\pm 1)$$

Решение исходной задачи (1), (2) дается суммой решений задач А, В и С.

Пусть векторная функция $\mathbf{M}$ и скалярная N допускают разложения

$$\begin{gathered}\mathbf{M}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(1/_2\,h\zeta)^n\mathbf{M}_0^{(n)},\qquad N=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(1/_2\,h\zeta)^n N_0^{(n)}\\ \mathbf{M}_0^{(n)}=\left.\frac{\partial^n\mathbf{M}(x,y,z)}{\partial z^n}\right|_{z=0},\qquad N_0^{(n)}=\left.\frac{\partial^n N(x,y,z)}{\partial z^n}\right|_{z=0}\end{gathered}\tag{5}$$

Во всем дальнейшем изложении предполагается, что векторные функции $\mathbf{M}_0^{(n)}$, $\mathbf{T}_+$, $\mathbf{T}_-$ и скалярные $N_0^{(n)}$, P_+, P_-, которые зависят лишь от переменных x, y, допускают по этим переменным представление в виде интеграла Фурье. Обозначим через $\mathbf{r}$ и $\mathbf{k}$ два радиуса-вектора с компонентами соответственно x, y и ξ, η. Преобразование Фурье для функции $f(\mathbf{r})$ будем обозначать через $f^*(\mathbf{k})$. Таким образом

$$f^*(\mathbf{k})=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\mathbf{r})\,e^{i\mathbf{kr}}\,dx\,dy,\qquad f(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f^*(\mathbf{k})\,e^{-i\mathbf{kr}}\,d\xi\,d\eta$$

Рассмотрим более подробно решение задачи А. Применим преобразование Фурье по переменным x, y к уравнениям (3) и условиям на торцах (4). При этом переменная ζ должна рассматриваться как параметр. Преобразованные уравнения и условия на торцах можно записать в виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\mathbf{u}^*}{\partial\zeta^2}+i\frac{1}{2}h\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial w^*}{\partial\zeta}\mathbf{k}-\frac{1}{4}h^2\left[k^2\mathbf{u}^*+\frac{1}{1-2\nu}(\mathbf{u}^*\mathbf{k})\mathbf{k}\right]=0\\ \frac{\partial^2 w^*}{\partial\zeta^2}+i\frac{1}{2}h\frac{1}{2(1-\nu)}\frac{\partial(\mathbf{u}^*\mathbf{k})}{\partial\zeta}-\frac{1}{4}h^2k^2\,\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}w^*=0\end{gathered}\tag{6}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial\mathbf{u}^*}{\partial\zeta}+i\frac{1}{2}hw^*\mathbf{k}=\frac{1}{2}h\frac{1}{G}\mathbf{T}_-^*\\ \frac{\partial w^*}{\partial\zeta}+i\frac{1}{2}h\frac{\nu}{1-\nu}\mathbf{u}^*\mathbf{k}=\pm\frac{1}{2}h\frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)}P_+^*\end{gathered}\qquad(\zeta=\pm 1)\tag{7}$$

Здесь k — модуль вектора $\mathbf{k}$ ($k=|\mathbf{k}|$). Введем в рассмотрение вектор $\mathbf{Kn}\times\mathbf{k}$, который так же, как и вектор $\mathbf{k}$, параллелен срединной плоскости и равен вектору $\mathbf{k}$ по модулю. Таким образом, можно разложить векторы $\mathbf{u}^*$ и $\mathbf{T}_-^*$ по единичным линейно-независимым векторам $k^{-1}\mathbf{k}$ и $k^{-1}\mathbf{K}$. Обозначим компоненты разложения вектора w^* через $u_{\mathbf{k}}{}^*$ и $\mathbf{u_K}{}^*$ и аналогично — компоненты разложения вектора $\mathbf{T}_-{}^*$. Умножая скалярно первое уравнение (6) последовательно на $k^{-1}\mathbf{k}$ и $k^{-1}\mathbf{K}$, заменим их системой трех уравнений для скалярных функций $u_{\mathbf{k}}{}^*$, $u_{\mathbf{K}}{}^*$ и w^*

$$\frac{\partial^2 u_{\mathbf{k}}{}^*}{\partial\zeta^2}+i\frac{1}{2}hk\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial w^*}{\partial\zeta}-\frac{1}{4}h^2k^2\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}u_{\mathbf{k}}{}^*=0$$

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial\zeta^2}+i\frac{1}{2}hk\frac{1}{2(1-\nu)}\frac{\partial u_{\mathbf{k}}{}^*}{\partial\zeta}-\frac{1}{4}h^2k^2w^*=0,\qquad \frac{\partial^2 u\mathbf{K}^*}{\partial\zeta^2}-\frac{1}{4}h^2k^2u\mathbf{K}^*=0 \tag{8}$$

Условия на торцах примут вид

$$\frac{\partial u_{\mathbf{k}}{}^*}{\partial\zeta}+i\frac{1}{2}hkw^*=\frac{1}{2}h\frac{1}{G}T_{-\mathbf{k}}{}^*,\qquad \frac{\partial u\mathbf{K}^*}{\partial\zeta}=\frac{1}{2}h\frac{1}{G}T_{-\mathbf{K}}{}^*$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial\zeta}+i\frac{1}{2}hk\frac{\nu}{1-\nu}u_{\mathbf{k}}{}^*=\pm\frac{1}{2}h\frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)}P_+{}^*\qquad(\zeta=\pm1) \tag{9}$$

Будем рассматривать уравнения (8) как систему обыкновенных дифференциальных уравнений по аргументу ζ. Решение этой системы с учетом граничных условий (9) можно записать следующим образом:]

$$u_{\mathbf{k}}{}^*=\frac{1}{Gk}\left\{-\frac{[{}^1/_2hk\,\mathrm{ch}\,{}^1/_2hk-2(1-\nu)\mathrm{sh}\,{}^1/_2hk]\,\mathrm{sh}\,{}^1/_2hk\zeta-\mathrm{sh}\,{}^1/_2hk\,{}^1/_2hk\zeta\,\mathrm{ch}\,{}^1/_2hk\zeta}{\mathrm{sh}\,hk-hk}T_{-\mathbf{k}}{}^*+\right.$$
$$\left.+\frac{[{}^1/_2hk\,\mathrm{sh}\,{}^1/_2hk-(1-2\nu)\,\mathrm{ch}\,{}^1/_2hk]\,\mathrm{sh}\,{}^1/_2hk\zeta-\mathrm{ch}\,{}^1/_2hk\,{}^1/_2hk\zeta\,\mathrm{ch}\,{}^1/_2hk\zeta}{\mathrm{sh}\,hk-hk}iP_+{}^*\right\} \tag{10}$$

$$w^*=\frac{1}{Gk}\left\{-\frac{\mathrm{sh}\,{}^1/_2hk\,{}^1/_2hk\zeta\,\mathrm{sh}\,{}^1/_2hk\zeta-[{}^1/_2hk\,\mathrm{ch}\,{}^1/_2hk+(1-2\nu)\,\mathrm{sh}\,{}^1/_2hk]\,\mathrm{ch}\,{}^1/_2hk\zeta}{\mathrm{sh}\,hk-hk}iT_{-\mathbf{k}}{}^*-\right.$$
$$\left.-\frac{\mathrm{ch}\,{}^1/_2hk\,{}^1/_2hk\zeta\,\mathrm{sh}\,{}^1/_2hk\zeta-[{}^1/_2hk\,\mathrm{sh}\,{}^1/_2hk+2(1-\nu)\,\mathrm{ch}\,{}^1/_2hk]\,\mathrm{ch}\,{}^1/_2hk\zeta}{\mathrm{sh}\,hk-hk}P_+{}^*\right\}$$

$$u_{\mathbf{K}}{}^*=\frac{1}{Gk}\frac{\mathrm{sh}\,{}^1/_2hk\zeta}{\mathrm{ch}\,{}^1/_2hk}T_{-\mathbf{K}}{}^*$$

Коэффициенты при функциях $\mathbf{T}_-{}^*$ и $\mathbf{P}_+{}^*$ в формулах (10) суть аналитические функции h и могут быть разложены в ряд Лорана в окрестности точки $h=0$. Такое разложение приводит к следующим выражениям:

$$\mathbf{u}^*=\frac{\zeta}{G}\left\{-\frac{1}{h^2}\frac{6(1-\nu)}{k^4}iP_+{}^*\mathbf{k}+\frac{1}{h}\frac{3(1-\nu)}{k^4}(\mathbf{T}_-{}^*\mathbf{k})\,\mathbf{k}+\frac{3\nu-(2-\nu)\zeta^2}{4k^2}iP_+{}^*\mathbf{k}+O(h)\right\}$$

$$w^*=\frac{1}{G}\left\{\frac{1}{h^3}\frac{12(1-\nu)}{k^4}P_+{}^*+\frac{1}{h^2}\frac{6(1-\nu)}{k^4}i(\mathbf{T}_-{}^*\mathbf{k})+\frac{1}{h}\frac{3[(2-\nu)-\nu\zeta^2]}{2k^2}P_+{}^*+\right.$$
$$\left.+\frac{(2-\nu)-3\nu\zeta^2}{4k^2}i(\mathbf{T}_-{}^*\mathbf{k})+O(h)\right\} \tag{11}$$

где ряды выписаны до членов порядка h. Чтобы получить разложение $\mathbf{u}^*$, здесь учтено, что

$$\mathbf{u}^*=u_{\mathbf{k}}{}^*k^{-1}\mathbf{k}+u_{\mathbf{K}}{}^*k^{-1}\mathbf{K}$$

причем второй член справа в силу последней формулы (10) можно записать в виде

$$u_{\mathbf{K}}{}^*k^{-1}\mathbf{K}=\frac{1}{Gk}\frac{\mathrm{sh}\,{}^1/_2hk\zeta}{\mathrm{ch}\,{}^1/_2hk}[\mathbf{T}_-{}^*-k^{-2}(\mathbf{T}_-{}^*\mathbf{k})\,\mathbf{k}]$$

Применяя к обеим частям (11) почленно обратное преобразование Фурье, придем в правой части к интегралам вида

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[\mathbf{F}(\mathbf{r}')\,\mathbf{k}]\,\mathbf{k}k^{2m}e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}d\xi\,d\eta\,dy'\,dy'=$$
$$=(-1)^{m+1}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{F}(\mathbf{r}')\,\Delta^m\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,dx'\,dy'$$

$$\frac{i}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}')\,\mathbf{k}k^{2m}e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}\,d\xi\,d\eta\,dx'\,dy' = (-1)^m \operatorname{grad}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}')\,\Delta^m\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,dx'\,dy' \tag{12}$$

$$\frac{i}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(\mathbf{r}')\,\mathbf{k}k^{2m}e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}\,d\xi\,d\eta\,dx'\,dy' = (-1)^m \operatorname{div}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(\mathbf{r}')\,\Delta^m\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,dx'\,dy'$$

$$\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}')\,k^{2m}e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}\,d\xi\,d\eta\,dx'\,dy' = (-1)^m\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}')\,\Delta^m\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,dx'\,dy'$$

где $\delta(\mathbf{r})$ — функция Дирака на плоскости. Если $m = -1$ или $m = -2$, то в правые части соотношений (12) можно подставить основные сингулярные решения соответственно уравнения Лапласа или бигармонического уравнения

$$\Delta^{-1}\delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi}\ln r, \qquad \Delta^{-2}\delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi}r^2\ln r$$

вследствие чего придем к обычным интегралам типа потенциала. При $m = 0$ согласно основному свойству δ-функции, во всех точках непрерывности функции $f(\mathbf{r})$ имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}')\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,dx'\,dy' = f(\mathbf{r}) \tag{13}$$

Таким образом, для классического решения, если не требовать от функции T и P дифференцируемости, в разложениях можно выделить лишь члены, не содержащие положительных степеней k. При этом можно получить асимптотику до членов порядка $O(h^0)$ включительно. Так, совершая обратное преобразование Фурье выражений (11) и используя (12), получим

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},\zeta) = -\frac{\zeta}{8\pi G}\operatorname{grad}\Big\{\frac{6(1-\nu)}{h^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} P_+(\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2\ln|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\,dx'\,dy' + \frac{3(1-\nu)}{h}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{T}_-(\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')(2\ln|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|+1)\,dx'\,dy' + [3\nu-(2-\nu)\zeta^2]\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} P_+(\mathbf{r}')\ln|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\,dx'\,dy'\Big\} + \frac{h\zeta}{G}\mathbf{U}$$

$$w(\mathbf{r},\zeta) = \frac{1}{8\pi G}\Big\{\frac{12(1-\nu)}{h^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} P_+(\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2\ln|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\,dx'\,dy' + \frac{6(1-\nu)}{h^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{T}_-(\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')(2\ln|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|+1)\,dx'\,dy' - \frac{6[(2-\nu)-\nu\zeta^2]}{h}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} P_+(\mathbf{r}')\ln|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\,dx'\,dy' - [(2-\nu)-3\nu\zeta^2]\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{T}_-(\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\frac{1}{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}\,dx'\,dy'\Big\} + \frac{h}{G}W$$

где при $h \to 0$ функции $\mathbf{U}$ и W стремятся к своим предельным значениям, которые могут быть легко вычислены. Завися от функций $\mathbf{T}_-$ и P_+, предельные значения $\mathbf{U}$ и W конечны, если функции $\mathbf{T}_-$ и P_+ ограничены по модулю.

Если функции $\mathbf{T}_-$ и P_+ имеют производные вплоть до порядка $2m$, то в лорановских разложениях можно выделить члены до порядка $2m$ по k. В соответствующих интегралах (12) можно в правых частях перебросить итерацию оператора Лапласа с δ-функции на функции $\mathbf{T}_-$ или P_+, придя в результате к формулам вида (13). При этом получается асимптотика соответственно более высокого порядка. Относительно остаточных членов можно повторить рассуждения, аналогичные приведенным выше, причем для ограниченности их предельных значений потребуется ограниченность по модулю некоторых дифференциальных операторов от функций $\mathbf{T}_-$ и P_+.

При помощи полученных выражений можно свести решение задачи об упругом слое к решению цепи двухмерных задач. Если представить решение в виде рядов по степеням h (14)

$$w = \frac{1}{h^3} w_{-3} + \frac{1}{h^2} w_{-2} + \frac{1}{h} w_{-1} + w_0 + h w_1 + \ldots, \quad \mathbf{u} = \frac{1}{h^2} \mathbf{u}_{-2} + \frac{1}{h} \mathbf{u}_{-1} + \mathbf{u}_0 + h \mathbf{u}_1 + \ldots$$

то можно положить

$$w_{-3} = W_{-3}, \quad w_{-2} = W_{-2}, \quad w_{-1} = W_{-1} + \frac{1}{8} \frac{\nu}{1-\nu} \zeta^2 \Delta W_{-3}, \quad W_0 = w_0 + \frac{1}{8} \frac{\nu}{1-\nu} \zeta^2 \Delta W_{-2}, \ldots$$

$$u_{-2} = -\frac{\zeta}{2} \operatorname{grad} W_{-3}, \qquad u_1 = -\frac{\zeta}{2} \operatorname{grad} W_{-2}$$

$$u_0 = -\frac{\zeta}{2} \operatorname{grad} \left(W_{-1} + \frac{1}{4} \frac{1}{1-\nu} \Delta W_{-3} \right) + \frac{1}{48} \frac{2-\nu}{1-\nu} \zeta^3 \operatorname{grad} \Delta W_{-3}, \ldots$$

Здесь функции $W_{-3}, W_{-2}, \ldots$ удовлетворяют уравнениям

$$\Delta^2 W_{-3} = \frac{12(1-\nu)}{G} P_+, \qquad \Delta^2 W_{-1} = -\frac{3(2-\nu)}{2G} \Delta P_+$$
$$\Delta^2 W_{-2} = \frac{6(1-\nu)}{G} \operatorname{div} \mathbf{T}_-, \qquad \Delta^2 W_0 = -\frac{2-\nu}{4G} \Delta \operatorname{div} \mathbf{T}_-, \ldots \tag{15}$$

Эти уравнения будут справедливы в том смысле, в каком можно рассматривать дифференциальные операции над функциями $\mathbf{T}_-$ и P_+ в их правых частях. Так, если искать классическое решение, то можно вычислять функции W_i до значений индекса i, для которых дифференциальные свойства функций $\mathbf{T}_-$ и P_+ еще позволяют применять к ним операторы, стоящие в правых частях соответствующих уравнений (15).

Первое уравнение (15) совпадает с известным уравнением Софи Жермен в теории пластин. Это уравнение может быть выведено, если принять гипотезу Кирхгофа, которая, таким образом, в полученном асимптотическом разложении (14) соответствует первому приближению. Интересно отметить, что к уравнениям (15) можно прийти также чисто формальным путем, если выражения (14) подставить в уравнения (3) и условия (4) и приравнять члены при одинаковых степенях h. Уравнения (3) приведут при этом к рекуррентной системе обыкновенных дифференциальных уравнений по ζ, где x и y можно рассматривать как параметры, от которых зависят произвольные функции W_i. Последние выбираются так, чтобы выполнялись условия на торцах. Эти условия выполняются, если W_i удовлетворяют уравнениям (15).

Решение задачи В проводится совершенно аналогично, поэтому приведем лишь окончательные результаты. Для функций $u_{\mathbf{k}}^*$, w и $u_{\mathbf{K}}^*$ будем иметь

$$u_{\mathbf{k}}^* = \frac{1}{Gk} \left\{ -\frac{[{}^1\!/_2 hk \operatorname{sh} {}^1\!/_2 hk - 2(1-\nu) \operatorname{ch} {}^1\!/_2 hk] \operatorname{ch} {}^1\!/_2 hk\zeta - \operatorname{ch} {}^1\!/_2 hk \, {}^1\!/_2 hk\zeta \operatorname{sh} {}^1\!/_2 hk\zeta}{\operatorname{sh} hk + hk} T_{+\mathbf{k}}^* + \right.$$
$$\left. + \frac{[{}^1\!/_2 hk \operatorname{ch} {}^1\!/_2 hk - (1-2\nu) \operatorname{sh} {}^1\!/_2 hk] \operatorname{ch} {}^1\!/_2 hk\zeta - \operatorname{sh} {}^1\!/_2 hk \, {}^1\!/_2 hk\zeta \operatorname{sh} {}^1\!/_2 hk\zeta}{\operatorname{sh} hk + hk} iP_-^* \right\} =$$
$$= \frac{1}{Gk} \left[\frac{1}{h} \frac{1-\nu}{k} T_{+\mathbf{k}}^* + \frac{1}{2} \nu i P_-^* + O(h) \right]$$

$$w^* = \frac{1}{Gk}\left\{-\frac{\operatorname{ch}{}^1/_2hk\,{}^1/_2hk\zeta\,\operatorname{ch}{}^1/_2hk\zeta - [{}^1/_2hk\operatorname{sh}{}^1/_2hk + (1-2\nu)\operatorname{ch}{}^1/_2hk]\operatorname{sh}{}^1/_2hk\zeta}{\operatorname{sh}kk + hk}\, iT_{+\mathbf{k}}^* - \right.$$

$$\left. - \frac{\operatorname{sh}{}^1/_2hk\,{}^1/_2hk\zeta\,\operatorname{ch}{}^1/_2hk\zeta - [{}^1/_2hk\operatorname{ch}{}^1/_2hk + 2(1-\nu)\operatorname{sh}{}^1/_2hk]\operatorname{sh}{}^1/_2hk\zeta}{\operatorname{sh}hk + hk} P_-^*\right\} =$$

$$= \frac{\zeta}{Gk}\left[-\frac{1}{2}\nu i T_{+\mathbf{k}}^* + O(h)\right]$$

$$u_{\mathbf{K}}^* = \frac{1}{Gk}\frac{\operatorname{ch}{}^1/_2hk\zeta}{\operatorname{sh}{}^1/_2hk} T_{+\mathbf{K}}^* = \frac{1}{Gk}\left[\frac{1}{h}\frac{2}{k} T_{+\mathbf{K}}^* + O(h)\right]$$

и, следовательно,

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, \zeta) = -\frac{1}{\pi G}\frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{T}_+(\mathbf{r}')\ln|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\,dx'\,dy' +$$

$$+\frac{1}{4\pi G}\operatorname{grad}\left[\frac{1+\nu}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{T}_+(\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')(2\ln|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|+1)\,dx'\,dy' -\right.$$

$$\left.-\nu\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}P_-(\mathbf{r}')\ln|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\,dx'\,dy'\right] + O(h)$$

$$w(\mathbf{r}, \zeta) = \frac{\zeta}{4\pi G}\nu\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{T}_+(\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\frac{1}{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}\,dx'\,dy' + O(h)$$

Наконец, если положить

$$\mathbf{u} = \frac{1}{h}\mathbf{u}_{-1} + \mathbf{u}_0 + h\mathbf{u}_1 + \ldots, \qquad w = w_0 + hw_1 + \ldots$$

$$\left(\mathbf{u}_{-1} = \mathbf{U}_{-1},\ \mathbf{u}_0 = \mathbf{U}_0, \ldots, w_0 = -\frac{1}{2}\zeta\frac{\nu}{1-\nu}\operatorname{div}\mathbf{U}_{-1}, \ldots\right),$$

то для определения функций $\mathbf{U}_i$ получим уравнения

$$\Delta\mathbf{U}_{-1} + \frac{1+\nu}{1-\nu}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{U}_{-1} = -\frac{2}{G}\mathbf{T}_+$$

$$\Delta\mathbf{U}_0 + \frac{1+\nu}{1-\nu}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{U}_0 = -\frac{1}{G}\frac{\nu}{1-\nu}\operatorname{grad}P_-, \ldots$$

При решении задачи C приходится иметь дело с неоднородными уравнениями (1). Это не вносит никаких принципиальных трудностей, однако делает выкладки значительно более громоздкими. Окончательные результаты можно записать в виде

$$w = \frac{1}{h^2}w_{-2} + \frac{1}{h}w_{-1} + w_0 + hw_1 + \ldots \qquad \mathbf{u} = \frac{1}{h}\mathbf{u}_{-1} + \mathbf{u}_0 + h\mathbf{u}_1 + \ldots$$

$$w_{-2} = W_{-2}, \qquad w_{-1} = W_{-1}, \qquad w_0 = W_0 + \frac{1}{8}\zeta^2\frac{\nu}{1-\nu}\Delta W_{-2}, \ldots$$

$$u_{-1} = -\frac{1}{2}\zeta\operatorname{grad}W_{-2}, \qquad \mathbf{u}_0 = \mathbf{U}_0 - \frac{1}{2}\zeta\operatorname{grad}W_{-1}, \ldots$$

и, наконец, уравнения для определения $\mathbf{U}_i$, W_i имеют вид

$$\Delta\mathbf{U}_0 + \frac{1+\nu}{1-\nu}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{U}_0 = -\frac{1}{G}\mathbf{M}_0, \ldots$$

$$\Delta^2 W_{-2} = \frac{6(1-\nu)}{G}N_0,\ \Delta^2 W_{-1} = 0,\ \Delta^2 W_0 = -\frac{6-\nu}{4G}\Delta N_0 + \frac{1-\nu}{2G}\operatorname{div}\mathbf{M}'_0 + \frac{1-\nu}{4G}N_0'', \ldots$$

где $\mathbf{M}_0^{(n)}$ и $N_0^{(n)}$ определяются согласно (5).

Поступила 12 VII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Л у р ь е А. И. Пространственные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1965.