ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ РАЗРЫВОВ В СПЛОШНОЙ СРЕДЕ

М. В. Лурье (Москва)

Вопрос о применении вариационного принципа в качестве исходного базиса для построения моделей сред в рамках специальной и общей теории относительности был подробно рассмотрен в работах Л. И. Седова [1,2]. В предлагаемой работе вариационные соотношения применяются для получения условий на поверхности разрыва характеристик среды. Этим методом получены уравнения на разрывах в средах, имеющих внутренние степени свободы, что выражается в наличии среди их определяющих параметров тензоров скоростей деформации и градиентов деформации. Такие среды рассматривались, например, в работах [3-9].

Другими методами для различных сред, имеющих микроструктуру, вопрос о граничных условиях и соотношениях на разрывах исследовался в работах [10-14]. Рассмотрение производится в рамках ньютоновской механики [1].

1. Вариационный принцип. Рассмотрим произвольно выделенный объем сплошной среды $V(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$, отнесенный к лангранжевым координатам ξ^1, ξ^2, ξ^3. Для характеристики движения, следуя [3], введем три системы отсчета.

1. Подвижную лагранжеву систему с базисом $Э_i{}^\wedge$ и метрическим тензором (актуальное пространство)

$$G^\wedge = g_{ij} Э^{\wedge i} Э^{\wedge j}$$

2. Неподвижную лагранжеву систему с базисом $Э_i{}^\circ$ и метрическим тензором (пространство начальных состояний)

$$G^\circ = g_{ij}{}^\circ Э^{i\circ} Э^{j\circ}$$

3. Неподвижную систему наблюдателя $Э_i(x^1, x^2, x^3)$, по отношению к которой рассматривается движение (будем считать систему $Э_i$ — декартовой)

$$x^k = x^k(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t), \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$$

Здесь $\mathbf{u}$ — вектор перемещения частиц среды, $\mathbf{v}$ — вектор скорости частиц среды

$$\mathbf{u} = u^i Э_i = u^{\wedge i} Э_i^\wedge, \qquad \mathbf{v} = v^i Э_i = v^{\wedge i} Э_i{}^\wedge, \qquad v^i = \frac{\partial u^i}{\partial t}\ {}_{\xi^k = \mathrm{const}}$$

В качестве исходного базиса для построения модели нашей среды будем пользоваться вариационными уравнениями вида [1]

$$\delta \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_V L d\tau dt + \delta W + \delta W^* = 0 \tag{1.1}$$

Здесь L — функция Лагранжа, зависящая допускаемым соображениями инвариантности образом от v^i, начальной плотности ρ_0, энтропии — S, $g_{ij}{}^\circ$, тензора g_{ij} его производной по времени $g_{ij}^{\cdot}$, градиентов по начальному пространству [2]

$$\nabla_k{}^\circ g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial \xi^k} - \Gamma^{\circ\omega}_{ki} g_{\omega j} - \Gamma^{\circ\omega}_{kj} g_{\omega i}$$

так что

$$L = L(\xi^k, \rho_0, g_{ij}^{\cdot}\ v^i, g_{ij}, g_{ij}^{\bullet}, \nabla_k{}^\circ g_{ij}, S)$$

Вариация δW (δ — при постоянных лагранжевых координатах) представляется интегралом по поверхности $\Sigma(\xi^k, t)$, ограничивающей произвольный объем $V(\xi^k\ t)$

---

[1] Это ограничение не столь существенно. Методы, развитые в указанных работах [1,2], позволяют легко обобщить полученные выводы на случай специальной и общей теории относительности.

[2] Вместо $\nabla_k{}^\circ g_{ij}$ можно было бы рассмотреть $\nabla_k{}^\wedge g_{ij}{}^\circ$ производную по актуальному пространству. Однако в силу существующей между ними связи [4,5] это привело бы лишь к переопределению функции L.

от линейной комбинации δu^ω, δg_{ij} и определяется заданием функции L, δW^* задается и берется в виде

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_V \rho T\delta S\,d\tau dt$$

Выражению вариационного принципа можно придать другой вид, если интегрирование проводить по неподвижному объему V_0 и по его поверхности Σ_0 в пространстве начальных состояний, т. е. по прообразу объема $V(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$ в начальный момент времени. Для этого введем якобиан преобразования

$$\Delta = \det\left\|\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}\right\| = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_0}} = \left(\frac{\det\|g_{ik}\|}{\det\|\overset{\circ}{g}_{ik}\|}\right)^{1/2}$$

$$d\tau = \sqrt{g}\,d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3, \quad d\tau_0 = \sqrt{g_0}\,d\xi^1,\ d\xi^2,\ d\xi^3, \quad d\tau_\xi = d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3$$

Тогда

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\int_{V_0} L\sqrt{g}\,d\tau_\xi dt + \delta W + \int_{t_0}^{t_1}\int_{V_0}\rho\sqrt{g}\,T\delta S d\tau_\xi dt = 0 \qquad (1.2)$$

При вычислении вариаций в (1.2) необходимо учесть следующие соотношения

$$\delta v^i = \frac{\partial}{\partial t}(\delta u^i)_{\xi^k=\text{const}}, \qquad \delta\rho_0 = 0, \qquad \delta g_{ij}{}^\circ = 0$$

$$\delta g_{ij} = \delta(\mathfrak{Э}_i{}^\wedge\mathfrak{Э}_j{}^\wedge) = \mathfrak{Э}_i{}^\wedge\delta\mathfrak{Э}_j{}^\wedge + \mathfrak{Э}_j{}^\wedge\delta\mathfrak{Э}_i{}^\wedge = \mathfrak{Э}_i{}^\wedge\delta\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\xi^j} + \mathfrak{Э}_j{}^\wedge\delta\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\xi^i} =$$

$$= \mathfrak{Э}_i{}^\wedge\frac{\partial}{\partial\xi^j}(\delta u_k{}^\wedge\mathfrak{Э}^{\wedge k}) + \mathfrak{Э}_j{}^\wedge\frac{\partial}{\partial\xi^i}(\delta u_k{}^\wedge\mathfrak{Э}^{\wedge k}) = \nabla_j{}^\wedge\delta u_i{}^\wedge + \nabla_i{}^\wedge\delta u_j{}^\wedge$$

$$\nabla_j{}^\wedge u_i{}^\wedge = \frac{\partial u_i{}^\wedge}{\partial\xi^j} - \Gamma^\wedge{}_{ij}^{\omega}u_\omega{}^\wedge, \qquad \delta u_i{}^\wedge = g_{ik}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^\omega}\delta u^\omega$$

$$\delta\nabla_k{}^\circ g_{ij} = \nabla_k{}^\circ\delta g_{ij}, \quad \delta g_{ij}^{\cdot} = \frac{\partial}{\partial t}(\delta g_{ij})_{\xi^k=\text{const}}$$

Здесь и в дальнейшем считается, что вариации δu^i — непрерывные функции с непрерывными производными по ξ^k и t до второго порядка включительно. При отсутствии высших производных среди определяющих параметров достаточно требовать лишь существование производных первого порядка.

Нетрудно также проверить справедливость формулы:

$$A^{ij}\delta g_{ij} = \frac{\partial}{\partial\xi^j}\left(2A^{ij}g_{ik}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^\omega}\delta u^\omega\right) - \sqrt{g}\,g_{ik}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^\omega}\nabla_i{}^\wedge\left(\frac{2}{\sqrt{g}}A^{ij}\right)\delta u^\omega$$

Производя варьирование в (1.2), после обычных преобразований получаем

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{V_0}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L\sqrt{g}}{\partial v^\omega} + \sqrt{g}\,g_{ik}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^\omega}\nabla_j{}^\wedge\left[\frac{2}{\sqrt{g}}\frac{\partial L\sqrt{g}}{\partial g_{ij}} - 2\frac{\sqrt{g_0}}{\sqrt{g}}\nabla_k{}^\circ\frac{1}{\sqrt{g_0}}\frac{\partial L\sqrt{g}}{\partial\nabla_k{}^\circ g_{ij}} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{2}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L\sqrt{g}}{\partial g_{ij}^{\cdot}}\right]\right\}\delta u^\omega d\tau_\xi dt + \int_{t_0}^{t_1}\int_{V_0}\left(\frac{\partial L\sqrt{g}}{\partial S} - \rho\sqrt{g}\,T\right)\delta S d\tau_\xi dt +$$

$$+ \int_{t_0}\int_{\Sigma_0}\left\{\frac{\partial L\sqrt{g}}{\partial v^\omega}n_t\delta u^\omega + \frac{\partial L\sqrt{g}}{\partial g_{ij}^{\cdot}}n_t\delta g_{ij} + \frac{\partial L\sqrt{g}}{\partial\nabla_k{}^\circ g_{ij}}\delta g_{ij}n_k{}^\circ + \right. \qquad (1.3)$$

$$\left. + 2g_{ik}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^\omega}\left(\frac{\partial L\sqrt{g}}{\partial g_{ij}} - \sqrt{g_0}\nabla_k{}^\circ\frac{1}{\sqrt{g_0}}\frac{\partial L\sqrt{g}}{\partial\nabla_k{}^\circ g_{ij}} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L\sqrt{g}}{\partial g_{ij}^{\cdot}}\right)n_i{}^\circ\right\}\delta u^\omega d\sigma_0 dt + \delta W = 0$$

Здесь индексы t_0 и Σ_0 означают интегрирование по четырехмерной поверхности, ограничивающей объем в пространстве координат ξ^k, t, рассматриваемых как декартовые; через n_t, $n_j{}^\circ$ обозначены компоненты единичного вектора, нормального к этой поверхности. В силу произвольности вариаций внутри и на границе области интегрирования, а также самой области интегрирования уравнение (1.3) дает

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L\sqrt{g}}{\partial v^\omega}+\sqrt{g}g_{ik}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^\omega}\nabla_j{}^\wedge\left(\frac{2}{\sqrt{g}}\frac{\partial L\sqrt{g}}{\partial g_{ij}}-2\frac{\sqrt{g_0}}{\sqrt{g}}\nabla_k{}^\circ\frac{1}{\sqrt{g_0}}\frac{\partial L\sqrt{g}}{\partial\nabla_k{}^\circ g_{ij}}-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L\sqrt{g}}{\partial g_{ij}^{\cdot}}\right)=0 \tag{1.4}$$

Полученные уравнения следует рассматривать как уравнения движения среды в форме Лангранжа в проекциях на оси системы наблюдателя $Э_i$.

Поверхностный интеграл приводит к соотношению

$$\delta W=\iint\limits_{t_0\Sigma_0}(\sqrt{g}p^{ij}\delta u_i{}^\wedge n_j{}^\circ-Q^{kij}\delta g_{ij}n_k{}^\circ-J_\omega\delta u^\omega n_t-J^{ij}\delta g_{ij}n_t)d\sigma_0\,dt \tag{1.5}$$

Здесь

$$p^{ij}=-\frac{2}{\sqrt{g}}\frac{\partial L\sqrt{g}}{\partial g_{ij}}+2\frac{\sqrt{g_0}}{\sqrt{g}}\nabla_k{}^\circ\frac{1}{\sqrt{g_0}}\frac{\partial L\sqrt{g}}{\partial\nabla_k{}^\circ g_{ij}}+\frac{2}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L\sqrt{g}}{\partial g_{ij}^{\cdot}} \tag{1.6}$$

$$J_\omega=\frac{\partial L\sqrt{g}}{\partial v^\omega},\qquad J^{ij}=\frac{\partial L\sqrt{g}}{\partial g_{ij}^{\cdot}},\qquad Q^{kij}=\frac{\partial L\sqrt{g}}{\partial\nabla_k{}^\circ g_{ij}} \tag{1.7}$$

Кроме того, коэффициент при δS дает

$$\frac{\partial L\sqrt{g}}{\partial S}=-\rho\sqrt{g}T \tag{1.8}$$

В этих обозначениях уравнения движения преобретают вид

$$\frac{\partial J_\omega}{\partial t}-\sqrt{g}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^\omega}\nabla_j{}^\wedge p^j{}_k=0 \tag{1.9}$$

а соотношения (1.5)—(1.9) можно рассматривать как обобщенные уравнения состояния среды и, в частности, p^{ij} как тензор напряжений.

В заключение отметим, что если в основном соотношении (1.1) произвести варьирование времени t, то оно позволяет получить уравнение энергии. Действительно, рассмотрим варьированное $t^*=t+\delta t$, где δt берем произвольной постоянной. При таком варьировании в δW^* следует добавить член

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_V N\delta t\,d\tau\,dt$$

который обращается в нуль при $\delta t=0$, а все вариации считать полными, т. е.

$$\delta q=\delta q_{t=\text{const}}+q^{\cdot}\delta t.$$

Тогда в качестве добавочного уравнения получим уравнение энергии

$$\frac{\partial}{\partial t}(L\sqrt{g}-J_\omega v^\omega-J^{ij}g_{ij}^{\cdot})+\frac{\partial}{\partial\xi^k}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}p^{ik}v_i{}^\wedge-Q^{kij}g_{ij}^{\cdot}\right)+\rho\sqrt{g}N=0 \tag{1.10}$$

Умножая уравнения (1.4) на v^ω и складывая с последним, получим в силу соотношений (1.5)—(1.9) уравнение для энтропии S

$$T\frac{\partial S}{\partial t}=N \tag{1.11}$$

Здесь N можно рассматривать как приток энергии к частице.

2. Примеры. *Модель упругого тела.* Для характеристики среды вводится тензор конечных деформаций $\varepsilon_{ij}={}^1/_2(g_{ij}-g_{ij}{}^\circ)$. Положим, что функция Лагранжа в качестве аргументов имеет ρ_0, $g_{ij}{}^\circ, \varepsilon_{ij}$, v^k, S. Тогда имеем следующие соотношения:

$$p^{ij}=-\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial L\sqrt{g}}{\partial g_{ij}},\qquad J^{ij}=0,\qquad Q^{kij}=0$$

Если принять, $L={}^1/_2\rho v^iv_i-\rho U(\varepsilon_{ij},S)$, где U — энергия единицы массы, то

$$p^{ij}=\rho\frac{\partial U}{\partial\varepsilon_{ij}},\qquad J_\omega=\rho\sqrt{g}\,v_\omega$$

Модель идеальной жидкости. Эта модель получается из предыдущей, если считать, что $L = L(\rho_0, g_{ij}^\circ, \sqrt{g}, v^k, S)$, т. е. что L зависит не от всех компонент метрического тензора, а лишь от его определителя g. (В силу уравнения неразрывности $\sqrt{g} = \rho^{-1}\rho_0 \sqrt{g_0}$.) Учитывая известную формулу анализа

$$\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial g_{ij}} = \frac{1}{2} \sqrt{g} g^{ij}$$

для тензора напряжений получаем

$$p^{ij} = -\frac{\partial L \sqrt{g}}{\partial \sqrt{g}} g^{ij} = -pg^{ij}, \qquad p = \frac{\partial L \sqrt{g}}{\partial \sqrt{g}}$$

Здесь p рассматривается как давление. Формула показывает, что контравариантные компоненты тензора напряжений образуют шаровой тензор.

Его смешанные компоненты равны $p^j{}_k = -p\delta^j{}_k$. Если за функцию Лагранжа взять выражение $L = {}^1/_2\rho v^i v_i - \rho U(\rho, S)$, то для p получим $p = \rho^2 \partial U / \partial\rho$.

Уравнения] движения в этом случае примут вид

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \frac{\partial p}{\partial \xi^k} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} = 0$$

Модель среды, характеризующейся плотностью и производной по времени от плотности. В качестве определяющих параметров для функции Лагранжа берутся ρ_0, g_{ij}°, $\sqrt{g}$, $(\sqrt{g})^\cdot$, v^k, S. Учитывая соотношения

$$\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial g_{ij}} = \frac{\sqrt{g}}{2} g^{ij}, \qquad \left.\frac{\partial (\sqrt{g})^\cdot}{\partial g_{ij}}\right|_{g_{ij}^\cdot = \mathrm{const}} = \frac{(\sqrt{g})^\cdot}{2} g^{ij} + \frac{\sqrt{g}}{2} g^{\cdot ij}$$

получаем

$$p^{ij} = -\left[\frac{\partial L \sqrt{g}}{\partial \sqrt{g}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L \sqrt{g}}{\partial (\sqrt{g})^\cdot}\right] g^{ij} = -pg^{ij}, \qquad p = \frac{\partial L \sqrt{g}}{\partial \sqrt{g}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L \sqrt{g}}{\partial (\sqrt{g})^\cdot}$$

Здесь p — давление. Если $L = {}^1/_2\rho v^i v_i - \rho U(\rho, \rho^\cdot, S)$, то

$$p = \rho^2 \frac{\partial U}{\partial \rho} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho^2 \frac{\partial U}{\partial \rho^\cdot}\right)_S$$

Такая модель среды может быть применена для описания несжимаемой идеальной жидкости с меняющими свой объем пузырьками (Б. С. Когарко [9]).

Следует отметить, что модель среды в этой работе построена в предположении об отсутствии дополнительного притока энергии к частице dq^{**} связанного с внутренними степенями свободы [3]. Наше выражение содержит такой приток, который равен

$$dq^{**} = \frac{1}{\rho} d\left(\rho^2 \rho^\cdot \frac{\partial U}{\partial \rho^\cdot}\right)$$

Надлежащим выбором δW^* можно получить модель среды, рассмотренной в работе [9]. Наконец, получаемые формулы позволяют рассмотреть пример среды [5,6], характеризующейся пространственными производными по плотности $\nabla_k{}^\circ\rho$.

3. Разрывы в сплошной среде. Пусть в сплошной среде имеется поверхность, на которой ее характеристики терпят разрыв. Для нахождения условий, которым должны удовлетворять значения этих характеристик на поверхности разрыва, используем вариационный принцип в следующей форме:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \int_V L(\rho_0, g_{ij}^\circ, g_{ij}, \nabla_k{}^\circ g_{ij}, g_{ij}^\cdot, v^k, S)\, d\tau\, dt = 0 \tag{3.1}$$

Здесь для простоты считается

$$\delta W = 0, \qquad \delta W^* = 0 \quad \text{или} \quad \delta u\,|_\Sigma = 0, \qquad \delta g_{ij}\,|_\Sigma = 0$$

Сама функция Лагранжа может иметь различный вид с обеих сторон поверхности разрыва. (Отметим, что в таких случаях может быть отличным от нуля δW^* за счет дополнительных внутренних источников энергии на поверхности разрыва.) Поэтому дальнейшие результаты будут относиться и к случаю, когда поверхность разрыва служит поверхностью раздела двух сред, а в случае стационарного разрыва условия на нем можно рассматривать как граничные.

Уравнение поверхности разрыва заранее неизвестно, поэтому варьированию подлежат не только характеристики среды, но и сама поверхность разрыва S_{04}. Пусть разрыв происходит на поверхности S_{04}, уравнение которой $F(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t) = 0$. S_{04} делит четырехмерный объем V_{04} на две части: V_{0+} и V_{0-}. Возьмем в качестве поверхности сравнения, варьированного положения поверхности разрыва (фиг. 1), поверхность (S_{04}), определяемую при помощи виртуального смещения по нормали δl_{n_0}

$$\delta l_{n0} = \delta\xi^k n_k^\circ + \delta t n_t$$

$$n_k^\circ = F_{\xi k} \Big/ \sqrt{F_{\xi^1}^2 + F_{\xi^2}^2 + F_{\xi^3}^2 + F_t^2}, \qquad n_t = F_t \Big/ \sqrt{F_{\xi^1}^2 + F_{\xi^2}^2 + F_{\xi^3}^2 + F_t^2}$$

и подсчитаем полную вариацию функционала (3.1), например, по области V_{0+}, учитывая и вариацию самой области. Эта вариация есть главная линейная часть изменения функционала при интегрировании по объему $V_{0+} + \Delta V_0$ и V_{0+}

$$\int\limits_{V_{0+}+\Delta V_0} (L\sqrt{g})\, d\tau_\xi\, dt - \int\limits_{V_{0+}} L\sqrt{g}\, d\tau_\xi\, dt = \int\limits_{V_{0+}} \delta L \sqrt{g}\, d\tau_\xi\, dt + \int\limits_{\Delta V_0} L\sqrt{g}\, d\tau_\xi\, dt + R$$

Здесь R — малые высшего порядка. Легко заметить, что с точностью до малых высшего порядка интеграл по ΔV_0 можно записать как интеграл по поверхности S_{04}

$$\int\limits_{\Delta V_0} L\sqrt{g}\, d\tau_\xi\, dt = \int\limits_{S_{04}} L\sqrt{g}\,\delta l_{n0}\, d\sigma_0 = \int\limits_{S_{04}} L\sqrt{g}\,(\delta\xi^k n_k^\circ + \delta t n_t)\, d\sigma_0$$

Выражение для полной вариации функционала по области V_{0+} имеет вид

$$\delta \int\limits_{V_{0+}} L\sqrt{g}\, d\tau_\xi\, dt = \int\limits_{V_{0+}} \delta L \sqrt{g}\, d\tau_\xi\, dt + \int\limits_{S_{04}} L\sqrt{g}\,(\delta\xi^k n_k^\circ + \delta t n_t)\, d\sigma_0$$

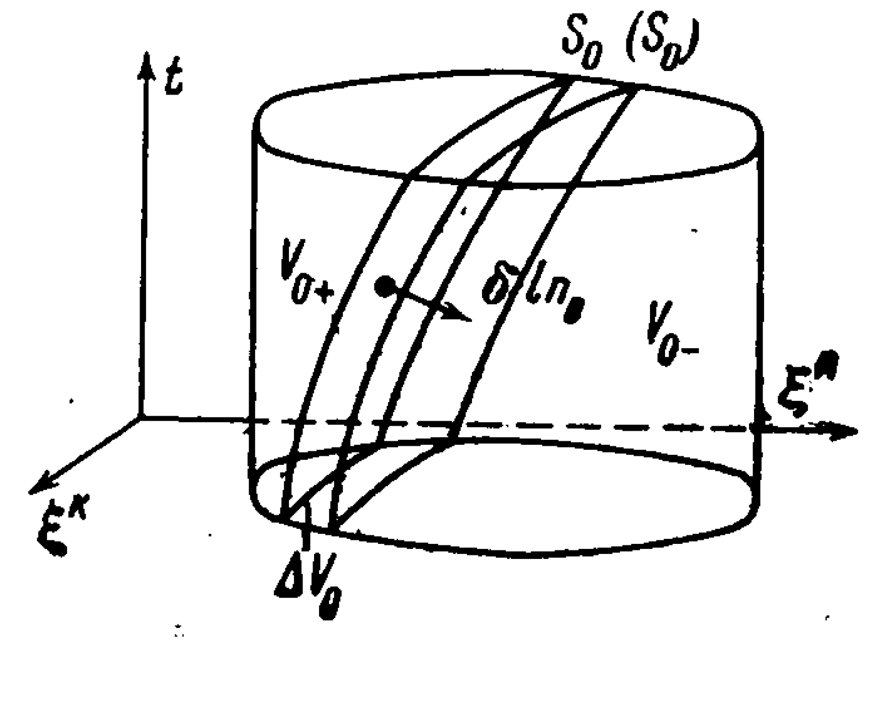
Учитывая формулы (1.5)—(1.9), полученные в п. 1, имеем

$$\delta \int\limits_{V_{0+}} L\sqrt{g}\, d\tau_\xi\, dt = -\int\limits_{V_{0+}} \left(\frac{\partial J_\omega}{\partial t} - \sqrt{g}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^\omega} \nabla_j{}^\wedge p^j{}_k\right) \delta u^\omega\, d\tau_\xi\, dt + \iint\limits_{tS_{03}} \left(J_\omega n_t - \sqrt{g}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^\omega} p^j{}_k n_j^\circ\right) \{\delta u^\omega\}\, d\sigma_0\, dt +$$
$$+ \iint\limits_{tS_0^3} (J^{ij} n_t + Q^{kij} n_k^\circ)\{\delta g_{ij}\}\, d\sigma_0\, dt + \iint\limits_{tS_{03}} (L\sqrt{g}\, n_t \delta t + L\sqrt{g}\,\delta\xi^k n_k^\circ)\, d\sigma_0\, dt \qquad (3.2)$$

Здесь символом { } обозначено, что вариации берутся при $\delta\xi^k = \delta t = 0$. Объемный интеграл в правой части исчезает в силу уравнений движения среды.

Для дальнейших преобразований нужно учесть, что все вариации $\{\delta g_{ij}\}$ на поверхности не будут независимыми.

Независимой будет лишь та их часть, которая выражается через вариации производных от перемещений по нормали к поверхности. Чтобы иметь в соотношении (3.2) лишь независимые вариации, используем очевидные соотношения [15]



$$\{\delta g_{ij}\} = \nabla_i{}^\wedge \{\delta u_j{}^\wedge\} + \nabla_j{}^\wedge \{\delta u_i{}^\wedge\}$$

$$\nabla_i{}^\wedge \{\delta u_j{}^\wedge\} = \frac{\partial\{\delta u_j{}^\wedge\}}{\partial\xi^i} - \Gamma^\wedge{}^s_{ij}\{\delta u_s{}^\wedge\}$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi^\alpha} = (\delta_\alpha{}^k - n_\alpha n^k)\frac{\partial}{\partial\xi^k} + n_\alpha n^k \frac{\partial}{\partial\xi^k}$$

Здесь $n_k = n_k^\circ / \sqrt{n_1^{\circ 2} + n_2^{\circ 2} + n_3^{\circ 2}}$ — компоненты единичного вектора нормали к поверхности S_{03}

$$(\delta_\alpha^{\ k} - n_\alpha n^k) \frac{\partial}{\partial \xi^k} = D_\alpha, \qquad n_\alpha n^k \frac{\partial}{\partial \xi^k} = \frac{\partial}{\partial n}$$

— производные вдоль поверхности и по нормали к поверхности.

В принятых обозначениях верна следующая формула [16]:

$$\int\limits_{S_{03}} \Phi^{ij} \frac{\partial \{\delta u_j\}}{\partial \xi^i} d\sigma_0 = \int\limits_{S_{03}} (n_i D_\alpha n^\alpha - D_i) \Phi^{ij} \{\delta u_j\} d\sigma_0 + \int\limits_{S_{03}} \Phi^{ij} n_i \frac{\partial \{\delta u_j\}}{\partial n} d\sigma_0 \tag{3.3}$$

Здесь S_{03} — замкнутая, гладкая поверхность [1]. Принимая за Φ^{ij} выражение $2(J^{ij}n_t + Q^{kij}n_k^\circ)$ перепишем вариацию по объему V_{0+} в следующем виде:

$$\delta \int\limits_{V_{0+}} L \sqrt{g}\, d\tau_\xi\, dt = \int\limits_t \int\limits_{S_{03}} \left[J_\omega n_t - \frac{\partial \xi^k}{\partial x^\omega} (\sqrt{g} p^j_{\ k} n_j^\circ - \Omega_{ijk} \Phi^{ij}) \right] \{\delta u^\omega\} d\sigma_0\, dt +$$

$$+ \int\limits_t \int\limits_{S_{03}} \Phi^{ij} n_i \frac{\partial}{\partial n} \{\delta u_j^{\wedge}\} d\sigma_0\, dt + \int\limits_t \int\limits_{S_{03}} (L \sqrt{g} n_t \delta t + L \sqrt{g} \delta \xi^k n_k^\circ) d\sigma_0\, dt \tag{3.4}$$

$$\Omega_{ijk} = (n_i D_\alpha n^\alpha - D_i) g_{jk} - \Gamma^{\wedge}_{\ ijk}$$

Аналогичное выражение получается для вариации по области V_{0-}.

Выражение для суммы этих вариаций, равное нулю, может служить для определения соотношений на разрывах различного типа. Рассмотрим разрыв, на котором перемещения и их производные по нормали остаются непрерывными, так что

$$\delta u_+^{\ \omega} = \delta u_-^{\ \omega}, \qquad \frac{\partial}{\partial n} (\delta u_j^{\wedge})_+ = \frac{\partial}{\partial n} (\delta u_j^{\wedge})_-$$

Тогда, полагая $\delta \xi^k = \delta t = 0$, получим в силу произвольности вариаций $\delta u_+^{\ \omega}$ и $\partial (\delta u_j^{\wedge}) / \partial n_+$ первую группу соотношений

$$\left[J_\omega n_t - \frac{\partial \xi^k}{\partial x^\omega} (\sqrt{g} p^j_{\ k} n_j^\circ - \Omega_{ijk} \Phi^{ij}) \right] = 0, \quad [(J^{ij} n_t + Q^{kij} n_k^\circ) n_i] = 0$$

где символом [], как обычно, обозначены скачки характеристик среды. Далее, полагая $\delta \xi^k \neq 0$, $\delta t \neq 0$ и учитывая формулу полной вариации

$$\{\delta u^\omega\} = \delta u^\omega - v^\omega \delta t - \frac{\partial u^\omega}{\partial \xi^k} \delta \xi^k$$

получим еще одно соотношение

$$\left[(L \sqrt{g} - J_\omega v^\omega) n_t + \frac{\partial \xi^k}{\partial x^\omega} (\sqrt{g} p^j_{\ k} n_j^\circ - \Omega_{ijk} \Phi^{ij}) v^\omega - \Phi^{ij} n_j \frac{\partial v_i^{\wedge}}{\partial n} \right] = 0$$

Соотношения, получающиеся при $\delta \xi^k$, удовлетворяются тождественно, в силу уравнения при δt, а также известных условий кинематической совместности [17].

Если добавить к полученным соотношениям уравнение сохранения массы, то полная система условий на разрыве рассматриваемого типа примет вид

$$[\rho \sqrt{g}] = 0 \tag{3.5}$$

$$\left[J_\omega n_t - \frac{\partial \xi^k}{\partial x^\omega} (\sqrt{g} p^j_{\ k} - \Omega_{ijk} \Phi^{ij}) \right] = 0 \tag{3.6}$$

$$[(J^{ij} n_t + Q^{kij} n_k^\circ) n_i] = 0 \tag{3.7}$$

---

[1] Рассматриваемая поверхность не замкнута, но интегрирование легко распространить на замкнутую поверхность, состоящую из поверхности разрыва и поверхности тела, так как вариации $\delta u_j^{\wedge}$ на последней равны нулю. Такую поверхность, очевидно, всегда можно выбрать гладкой, что существенно, так как в противном случае в приведенной формуле появятся дополнительно контурные интегралы.

$$\left[(L\sqrt{g} - J_\omega v^\omega)\, n_t + \frac{\partial \xi^k}{\partial x^\omega} \left(\sqrt{g}\, p^j{}_k n_j{}^\circ - \Omega_{ijk} \Phi^{ij}\right) v^\omega - \Phi^{ij} n_j \frac{\partial v_i{}^\wedge}{\partial n} \right] = 0 \qquad (3.8)$$

Формулу (3.6) можно рассматривать как уравнение импульсов, (3.8) — как уравнение энергии, а (3.7) — как добавочные «моментные» соотношения за счет наличия высших производных. Здесь — $n_t / | n^\circ |$ дает «скорость» распространения поверхности разрыва в системе ξ^k. Соотношения другого вида получаются, если считать независимыми нормальные производные $\partial \delta u_j{}^\wedge / \partial n$ с обеих сторон поверхности разрыва.

Тогда условие (3.7) заменится следующими:

$$(J^{ij} n_t + Q^{kij} n_k{}^\circ)\, n_i |_+ = 0, \qquad (J^{ij} n_t + Q^{kij} n_k{}^\circ)\, n_i |_- = 0$$

а (3.8) будет иметь более простой вид

$$\left[(L\sqrt{g} - J_\omega v^\omega)\, n_t + \frac{\partial \xi^k}{\partial x^\omega} \left(\sqrt{g}\, p^j{}_k n_j{}^\circ - \Omega_{ijk} \Phi^{ij}\right) v^\omega \right] = 0$$

Особенностью полученных условий является то, что они отражают геометрические свойства поверхности разрыва (через Ω_{ijk}).

В заключение отметим, что эти условия сильно упрощаются в случае малых деформаций, а при отсутствии высших производных переходят в обычные условия на скачке [18].

Автор благодарит Л. И. Седова за интерес к работе и ценные указания.

Поступила 28 X 1965.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. О тензоре энергии — импульса и о макроскопических внутренних взаимодействиях в гравитационном поле и материальных средах. ДАН СССР, 1965, т. 164, № 3.
2. Седов Л. И. Математические методы построения новых моделей сплошных сред. Усп. матем. н., 1965, т. 20, № 5.
3. Седов Л. И. Введение в механику сплошных сред. М., Физматгиз, 1962.
4. Идин М. А. Анизотропные сплошные среды, энергия и напряжения, в которых зависят от градиентов тензора деформации и других величин. ПММ, 1965, № 3.
5. Эглит М. Э. Одно обобщение модели идеальной сжимаемой жидкости. 1965, ПММ, т. 29, вып. 2.
6. Casal P. Capillarite interne' en me'canique des miliex continus. Compt. Rend Acad. Sci., 1963, vol. 256, No 18, p. 3820.
7. Mindlin R. D. Micro-structure in linear elasticity. Arch. Rational Mechanics and Analisis, 1964, vol. 16, No 1, p. 51.
8. Бердичевский В. Л. Построение моделей сплошных сред при помощи вариационного принципа. ПММ, 1966, № 3,
9. Когарко Б. С. Об одной модели кавитирующей жидкости. Докл. АН СССР, 1961, т. 137, № 6.
10. Ericksen Г. L., Truesdell C. Exact theory of stress and strain in rods and shells. Arch. Ration Mech. and Analysis, 1958, 1, p. p. 295—323.
11. Truesdell C., Toupin R. A. The classical field theories, Encyclopedia of Physics, vol III/1, Secs. 200, 203, 205, Berlin — Gottingen — Heildelberg, 1960.
12. Truesdell C. The mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics. J. Ration Mech. and Analysis, 1952, 1, 125.
13. Green A. E. Micro-materials and Multiporal Continuum Mechanics. Int. J. Engng. Sci, 1965, vol. 3, p. p. 533—537.
14. Green A. E., Noghdi P. M. A Dynamical theory of Interacting Continua. Int. J. Engng. Sci., 1965, vol. 3, p. p. 231—241.
15. Brand L. Vector and Tensor Analisis, N — Y, 1948, p. 439.
16. Mindlin R. D. Second Gradient of Strain and Surface — tension in Linear Elasticity. Int. J. Solids Structures, 1965, Vol. 1, pp. 417—438.
17. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. Е. Теоретическая гидромеханика. Изд. 4-е, ч. 2, М., Физматгиз, 1963.
18. Zemplen G. Kriterien für die physikalische Bedeutung der unstetigen Lösungen der hydrodynamischen Bewegungsgleichungen. Math. Annalen, 61 (1905). S. 437—499.