Прикладная математика и механика. Том 30, 1966

О СОВМЕСТНОМ ДЕЙСТВИИ НА УПРУГУЮ ПОЛУПЛОСКОСТЬ КЛИНА И ШТАМПА

В. А. Свекло

(Калининград)

§ 1. Основные зависимости. Исходим из следующего легко проверяемого представления решения уравнений равновесия плоской теории упругости в перемещениях:

$$2\mu u = \operatorname{Re}[\varkappa_0\Phi + iy\Phi' + (1+\varkappa_0)\Psi - x\Psi']$$
$$2\mu v = -\operatorname{Re}[(1+\varkappa_0)\Phi - iy\Phi' + \varkappa_0\Psi + x\Psi']\, i \qquad \left(\varkappa_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right) \quad (1.1)$$

Здесь Φ, Ψ — произвольные аналитические функции комплексного переменного $z = x + iy$, определенные в области сечения тела или пластинки. Решение (1.1) может быть найдено путем наложения первого и второго решений и отбрасывания лишних функций [1]. Получаем

$$\sigma_x = \operatorname{Re}[\Phi' + iy\Phi'' + \Psi' - x\Psi''],$$
$$\sigma_y = \operatorname{Re}[\Phi' - iy\Phi'' + \Psi' + x\Psi''] \quad (1.2)$$
$$\tau_{xy} = -\operatorname{Re}[y\Phi'' + ix\Psi'']$$

Имеют место соотношения

$$2\mu\frac{\partial v}{\partial x} = -(1+\varkappa_0)\operatorname{Re} i(\Phi' + \Psi') + \tau_{xy}$$
$$2\mu\frac{\partial u}{\partial y} = (1+\varkappa_0)\operatorname{Re} i(\Phi' + \Psi') + \tau_{xy} \quad (1.3)$$

§ 2. Представление решения для полуплоскости. Пусть в упругую полуплоскость $x \geqslant 0$ на участке L_x вдоль оси x внедрен гладкий тонкий симметричный абсолютно жесткий клин заданной формы. На границе полуплоскости $x = 0$ приложена симметричная относительно начала координат только нормальная нагрузка интенсивности $-p(y)$. В силу симметрии нагружения, касательные напряжения равны нулю также на оси x. По той же причине вне клина на оси x равны нулю упругие смещения точек в направлении оси y.

Отсутствие касательных напряжений в точках осей x и y приводит к условиям (2.1)

$$\operatorname{Re} i\Phi' = 0, \quad x=0, -\infty<y<\infty, \qquad \operatorname{Re} i\Psi' = 0, \quad y=0, \ 0<x<\infty$$

Отсюда и из (1.3) следует, что функция $\Phi'(z)$ аналитически продолжается через ось y, а также через те участки оси x, где $\partial v / \partial x$ обращается в нуль. При этом в точках оси x, симметричных относительно начала координат, мнимые части Φ' принимают значения, противоположные по знаку. На основании (2.1) и (1.3) приходим к задаче: в верхней полуплоскости найти исчезающую на бесконечности аналитическую функцию $\Phi'(z)$ по следующему условию на двух участках L_x оси x, расположенных симметрично относительно начала координат:

$$\operatorname{Re} i\Phi' = -q_0 v_x', \qquad q_0 = \frac{2\mu}{1+\varkappa_0} \tag{2.2}$$

Ее решение запишем в форме

$$\Phi'(z) = \frac{2q_0}{\pi} \int\limits_{L_x} \frac{x v_x' \, dx}{x^2 - z^2} \tag{2.3}$$

Здесь L_x — участок, лежащий справа от начала координат. Из свойств функции $\Psi'(z)$ вытекают условия на оси y

$$\operatorname{Re} \Psi'(z) = \sigma_x^\circ(y), \qquad \sigma_x^\circ(-y) = \sigma_x^\circ(y) \tag{2.4}$$

Отсюда

$$\Psi'(z) = \frac{2z}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\sigma_x^\circ \, dy}{y^2 + z^2} \tag{2.5}$$

На оси y имеем

$$\sigma_x = -p(y) \tag{2.6}$$

Удовлетворяя этому граничному условию, получим

$$\frac{2q_0}{\pi} \frac{d}{dy} \left(y \int\limits_{L_x} \frac{x v_x' \, dx}{x^2 + y^2} \right) + \sigma_x^\circ = -p(y) \tag{2.7}$$

Подставляя значение σ_x° в (2.5), найдем после взятия промежуточного интеграла

$$\Psi'(z) = -\frac{2q_0}{\pi} \int\limits_{L_x} \frac{x v_x' \, dx}{(x+z)^2} - \frac{2z}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{p(y)\, dy}{y^2 + z^2} \tag{2.8}$$

При заданных v_x' и $p(y)$ формулы (2.3) и (2.8) дают решение задачи о действии на полуплоскость жесткого клина и пригрузки. В частности, при $p(y) = 0$ получаем решение задачи о расклинивании полуплоскости без учета образования трещины, не требующее знания второй производной [1] от $v(x, 0)$. Рассмотрим примеры.

1. Клин параболической формы, забитый вдоль оси x на глубину H. Имеем на участке клина

$$v_x' = -\frac{h}{2\sqrt{H}\sqrt{H-x}} \tag{2.9}$$

Вне этого участка на оси x производная $v_x' = 0$. Получим

$$\Phi'(z) = -\frac{hq_0}{\pi\sqrt{H}} \int\limits_0^H \frac{x dx}{\sqrt{H-x}\,(x^2 - z^2)}, \qquad \Psi'(z) = \frac{hq_0}{\pi\sqrt{H}} \int\limits_0^H \frac{x dx}{\sqrt{H-x}\,(x+z)^2} \tag{2.10}$$

или

$$\Phi'(z) = -\frac{q_0 h}{2\pi H} [\chi(\xi_1) - \chi(\xi_2)], \qquad \Psi'(z) = \frac{q_0 h}{\pi(H+z)} [\chi(\xi_1) - 1] \tag{2.11}$$

$$\chi(\xi) = \xi \ln \frac{1-\xi}{1+\xi}, \qquad \xi^2_1 = \frac{H}{H+z}, \qquad \xi_2^2 = \frac{H-z}{H}$$

2. Полуплоскость, армированная вдоль оси x системой m жестких тонких включений эллиптического вида с полуосями h_j, l_j. Получим

$$v_{xj}' = -\frac{h_j}{l_j}(x - H_j)[l_j^2 - (x - H_j)^2]^{-1/2} \tag{2.12}$$

где H_j — расстояние центра j-го эллипса до начала координат.

Подставляя в (2.3) (2.8) и вычисляя интегралы, найдем

$$\Phi'(z) = q_0 i \sum_{j=1}^{m} [\sqrt{l_j^2 - (z - H_j)^2} + \sqrt{l_j^2 - (z + H_j)^2} + 2iz]$$
$$\Psi'(z) = q_0 z \sum_{j=1}^{m} \frac{h_j}{l_j}\left[\frac{i(z + H_j)}{\sqrt{l_j^2 - (z + H_j)^2}} + 1\right] \tag{2.13}$$

Если $l_j = h_j$, то получаем решение задачи для полуплоскости, армированной вдоль оси x тонкими круглыми включениями различных радиусов.

3. Полуплоскость, армированная вдоль оси x тонкими включениями прямоугольного вида. Здесь необходимо сначала рассмотреть включения постоянной толщины $2h_j^\circ$ с трехугольными наконечниками длины l, а затем, сохраняя неизменной длину включения $2h_j$, перейти к пределу, устремляя l к нулю. Получим после вычислений

$$\Phi(z) = \frac{q_0}{\pi}\sum_{j=1}^{m} h_j^\circ \ln\frac{\tau_{1j}^2 - 1}{\tau_{2j}^2 - 1}, \qquad \tau_{1j} = \frac{z + h_j}{H_j}$$
$$\Psi(z) = \frac{4q_0}{\pi} z \sum_{j=1}^{m} h_j^\circ h_j [(H_j + z)^2 - h_j^2]^{-1}, \qquad \tau_{2j} = \frac{z - h_j}{H_j} \tag{2.14}$$

где H_j — расстояния центров включений до начала координат.

§ 3. Действие на полуплоскость клина и штампа. Пусть на полуплоскость $x \geqslant 0$ на участке L_x оси x действует тонкий гладкий клин заданной формы, симметричный относительно оси x, а на участке L_y оси y — система гладких штампов заданной формы, симметричной относительно начала координат

Согласно (2.3) и (2.8)

$$\Phi'(z) = \frac{2q_0}{\pi}\int_{L_x} \frac{xv_x'\,dx}{x^2 - z^2}, \quad \Psi'(z) = -\frac{2q_0}{\pi}\int_{L_x} \frac{xv_x'\,dx}{(x + z)^2} - \frac{1}{\pi i}\int_{L_y'} \frac{p(t)\,dt}{t - z} \tag{3.1}$$

Здесь второе слагаемое в (2.8) переписано в другой форме при помощи переменной $t = iy$, L_y' обходится в положительном направлении, $p(t)$ — давление под штампом.

На оси y имеем

$$\tau_{xy} = 0, \qquad \operatorname{Re} i\Phi' = 0 \tag{3.2}$$

Поэтому из второго соотношения (1.3) выводим на участке давления

$$\operatorname{Re} i\Psi' = q_0 u_y' \tag{3.3}$$

где u_y' известна. Отсюда, подставляя значение Ψ' из (3.1), находим

$$-\frac{1}{\pi}\int_{L_y'} \frac{p(t)\,dt}{t - t_0} = q_0 u_y' + \frac{4q_0 y_0}{\pi}\int_{L_x} \frac{v_x' x^2\,dx}{(x^2 + y_0^2)^2} \tag{3.4}$$

или, возвращаясь к переменной y,

$$\frac{1}{\pi}\int_{L_y} \frac{p(y)\,dy}{y - y_0} = q_0 u_y' + \frac{4q_0 y_0}{\pi}\int_{L_x} \frac{x^2 v_x'\,dx}{(x^2 + y_0^2)^2} \qquad (L_y = -L_y') \tag{3.5}$$

В качестве примера рассмотрим простейшую задачу о действии на упругую полуплоскость прямоугольного клина и прямолинейного штампа.

Если клин толщины $2h$ забит на глубину H, то, записав сначала интеграл в правой части (3.5) для прямолинейного клина с трехугольным наконечником длины l и переходя затем к пределу, устремляя l к нулю, запишем, учитывая, что $u_y' = 0$

$$\int_{-b}^{b} \frac{p dy}{y - y_0} = -\frac{4hq_0H^2y_0}{(H^2 + y_0^2)^2} \tag{3.6}$$

Здесь b — полуширина участка соприкосновения штампа с полуплоскостью.

Наиболее общее решение уравнения (3.6) имеет вид [2]

$$p(y_0) = \frac{4hq_0H^2}{\pi^2 \sqrt{b^2 - y_0^2}} \int_{-b}^{b} \frac{y\sqrt{b^2 - y^2}\, dy}{(y^2 + H^2)^2 (y - y_0)} + \frac{P_0}{\pi \sqrt{b^2 - y_0^2}} \tag{3.7}$$

Здесь P_0 — сила, прижимающая штамп к полуплоскости. Интеграл в первом слагаемом вычисляется. Получим

$$p(y_0) = \frac{2q_0hH}{\pi\Delta \sqrt{b^2 - y_0^2}} \frac{b^2H^2 - (H^2 + \Delta^2) y_0^2}{(y_0^2 + H^2)^2} + \frac{P_0}{\pi \sqrt{b^2 - y_0^2}} \qquad (\Delta = \sqrt{b^2 + H^2}) \tag{3.8}$$

Формула (3.8) справедлива, если

$$P_0 > 2q_0hb^2H\Delta^{-3} \tag{3.9}$$

При этом края штампа войдут в соприкосновение с полуплоскостью.

Если (3.9) не выполняется, то $p(b) = 0$. Отсюда

$$P_0 = 2q_0hb^2H\Delta^{-3} \tag{3.10}$$

Подставляя в (3.8) и произведя выкладки, получим

$$p(y_0) = \frac{2q_0hH}{\pi\Delta^3} \frac{[H^2(H^2 + \Delta^2) - b^2y_0^2]\sqrt{b^2 - y_0^2}}{(y_0^2 + H^2)^2} \tag{3.11}$$

При заданной величине P_0 соотношение (3.10) определяет размеры участка давления. Возможность решения (3.11) для прямолинейного штампа обусловлена выпучиванием границы полуплоскости в окрестности начала координат под влиянием забитого клина.

Если в полуплоскость вдоль оси x справа забит полубесконечный прямоугольный клин так, что расстояние его конца до границы полуплоскости равно H, то в правой части равенства (3.6) надо брать знак плюс и для данного случая получим

$$p(y_0) = -\frac{2q_0hH}{\pi\Delta \sqrt{b^2 - y_0^2}} \frac{b^2H^2 - (H^2 + \Delta^2) y_0^2}{(y_0^2 + H^2)^2} + \frac{P_0}{\pi \sqrt{b^2 - y_0^2}} \tag{3.12}$$

Давление $p(y)$ оказывается положительным вдоль всего штампа при условии

$$P_0 > 2q_0hb^2H^{-1}\Delta^{-1} \tag{3.13}$$

В противном случае область давления состоит из участков (a, b), $(-b, -a)$. При этом $p(\pm a) = 0$.

Исследовать этот случай проще всего, переписав уравнение (3.6) в форме

$$\int_{a}^{b} \frac{p dy}{y^2 - y_0^2} = \frac{2hq_0H^2}{(H^2 + y_0^2)^2} \tag{3.14}$$

Совершая замену $y^2 = \xi$, $p_1(\xi) = p(\sqrt{\xi}) / 2\sqrt{\xi}$, запишем

$$\int_{a^2}^{b^2} \frac{p_1(\xi)\, d\xi}{\xi - \xi_0} = \frac{2hq_0H^2}{(\xi_0 + H^2)^2} \tag{3.15}$$

Отсюда

$$p_1(\xi_0) = -\frac{hq_0H^2}{\pi^2}\left(\frac{\xi_0 - a^2}{b^2 - \xi_0}\right)^{1/2}\int\limits_{a^2}^{b^2}\left(\frac{b^2 - \xi}{\xi - a^2}\right)^{1/2}\frac{d\xi}{(\xi^2 + H^2)^2(\xi - \xi_0)} \tag{3.16}$$

Вычисляя интеграл и возвращаясь к старой переменной, получим

$$p(y_0) = \frac{2hq_0H^2y_0}{\pi(y_0^2 + H^2)^2}\left[1 + \frac{b^2 - a^2}{m_1\Delta^2}\left(\frac{1}{m_1 + 1} + \frac{y_0^2 + H^2}{2m_1^2\Delta^2}\right)\right]\left(\frac{y_0^2 - a^2}{b^2 - y_0^2}\right)^{1/2}$$

$$m_1^2 = \frac{a + H}{b + H} \tag{3.17}$$

Здесь под радикалом понимается ветвь, принимающая положительные значения на верхнем берегу разреза (a, b).

Сила, прижимающая штамп к полуплоскости, имеет значение

$$P_0 = \frac{2hq_0H^2(b^2 - a^2)}{(a^2 + H^2)^{3/2}\Delta} \tag{3.18}$$

Если она задана, то из равенства (3.18) находим размеры участка давления.

Существование решения (3.17) связано здесь с опусканием границы полуплоскости в сторону клина под влиянием клина. Это опускание и вообще изменение границы полуплоскости под влиянием клина характеризуется как раз вторым слагаемым в уравнении (3.5). Если прижимающая сила недостаточно велика, то между границей области и штампом остается зазор.

Легко выписать решение уравнения (3.5) в общем случае для любых u_y' и v_x'.

Отметим, что для заданного клина существует такая форма штампа (или штампов), при которой правая часть уравнения (3.5) обращается в нуль. Именно, это будет иметь место, если

$$u_{y_0}' = -\frac{4y_0}{\pi}\int\limits_{L_x}\frac{x^2v_x'\,dx}{(x^2 + y_0^2)^2} \tag{3.19}$$

В данном случае, например, для одного штампа получим

$$p(y_0) = \frac{P_0}{\pi\sqrt{b^2 - y_0^2}} \tag{3.20}$$

где P_0 — сила, прижимающая штамп. При этом граница штампа оказывается вогнутой, если правая часть равенства (3.19) положительна.

Поступила 14 XII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Свекло В. А. Об одном комплексном представлении решения в плоской теории упругости. МТТ, 1966, т. I, вып. 2.
2. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Гостехиздат, 1953.