Прикладная математика и механика. Том 30, 1966

ОБ ОДНОМ АСИМПТОТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ ПРИ РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В. А. Бабешко

(Ростов на Дону)

В работе рассматриваются интегральные уравнения, к которым сводятся некоторые плоские смешанные задачи теории упругости, в частности плоские контактные задачи о вдавливании абсолютно твердого штампа в упругий слой, покоящийся на жестком основании. Целью работы является изучение структуры решений интегральных уравнений (1.1), когда параметр a — большой. В работе получено точное решение интегрального уравнения (1.1) в форме ряда для значений $a^* < a < \infty$. Как следствие из полученных результатов вытекает строгое обоснование метода работы [1]. Приведены примеры.

§ 1. Будем рассматривать интегральное уравнение

$$\int_{-a}^{a} k(x-\xi)\, q_\eta(\xi)\, d\xi = \pi e^{i\eta x} \qquad (|x| \leqslant a, \ \operatorname{Im}\eta = 0) \tag{1.1}$$

ядро которого имеет вид

$$k(t) = \int_0^\infty \frac{L(u)}{u} \cos tu \, du \tag{1.2}$$

Здесь $L(u)/u$ — четная, действительная на действительной оси функция, являющаяся мероморфной в комплексной плоскости.

Функцию $L(z)/z$ можно представить в комплексной области в виде

$$\frac{L(z)}{z} = \frac{P(z)}{Q(z)} = K(z) \tag{1.3}$$

где $P(z)$ и $Q(z)$ — целые функции, причем асимптотика их нулей имеет следующий вид:

$$z_n \sim \pm i(\beta n + b) \pm c_1 \ln n, \quad \zeta_n \sim \pm i(\beta n + g) \pm c_2 \ln n \qquad (n \to \infty) \tag{1.4}$$

все входящие в (1.4) постоянные — действительны. Предполагается, что функция $L(z)/z$ обладает следующими свойствами:

$$\lim \frac{L(z)}{z} = A \quad \text{при } z \to 0, \quad \frac{L(z)}{z} = 0(z^{-2\gamma}) \quad \text{при } z \to \infty, \quad 0 < \gamma < 1 \tag{1.5}$$

Свойство (1.5) налагает на постоянные β, b, g, γ определенные связи

$$\begin{aligned} 2(b-g) &= \beta\gamma \qquad \text{при } c_1 \neq 0, \quad c_2 \neq 0 \\ b - g &= \beta\gamma \qquad \text{при } c_1 = 0, \quad c_2 = 0 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Будем считать, что все нули z_n, ζ_n — различны. В случае кратных нулей или в случае несколько отличной от (1.3) асимптотики корней все устанавливаемые ниже результаты могут быть получены аналогичным путем.

Ниже будет показано, что, решив уравнение Винера-Хопфа

$$\int_0^\infty k(x-\xi) f_\eta(\xi)\, d\xi = \pi e^{i\eta x} \qquad (0 \leqslant x \leqslant \infty) \tag{1.7}$$

мы одновременно найдем решение некоторой бесконечной системы (I) линейных алгебраических уравнений.

Затем, установив общий вид асимптотического решения уравнения (1.1) при $a \to \infty$, покажем, что для его решения необходимо обратить некоторую бесконечную систему (II) линейных алгебраических уравнений, являющуюся возмущенной по отношению к (I). Обращая эту систему методом последовательных приближений, найдем в форме рядов точное решение уравнения (1.1) для $a^* < a < \infty$.

§ 2. Отметим некоторые свойства ядра $k(t)$, задаваемого формулой (1.2) Используя свойства интегралов Фурье, можно показать,что

$$k(t) = O(t^{2\gamma-1}), \qquad k(t) = O(\ln t) \tag{2.1}$$

соответственно для $0 < \gamma < 0.5$ и $\gamma = 0.5$ при $t \to 0$. В случае $0.5 < \gamma < 1$ ядро $k(t)$ будет непрерывно. Используя теорию вычетов, ядро $k(t)$ можно представить в форме

$$k(t) = \sum_{r=1}^\infty s_r \exp i\zeta_r t \qquad (s_r = \pi i P(\zeta_k)[Q'(\zeta_k)]^{-1}) \tag{2.2}$$

причем ряд сходится равномерно при всех t, за исключением точки $t = 0$, где он в случае $0 < \gamma \leqslant 0.5$ имеет интегрируемую особенность.

Получим методом Винера-Хопфа решение интегрального уравнения (1.7) [2], которое можно переписать в виде

$$f_\eta(t) = e^{i\eta t}[K(\eta)]^{-1} + \sum_{l=1}^\infty c_l(\eta) \exp iz_l t \qquad (|z_k| < |z_{k+1}|, \quad |\zeta_k| < |\zeta_{k+1}|) \tag{2.3}$$

Здесь

$$c_l(\eta) = [K_+(\eta)]^{-1}[(\eta - z_l) K_+'(-z_l)]^{-1}$$

$$K_+(\alpha) = \sqrt{A}\, \frac{\prod_{k=1}^\infty (1 + \alpha / z_k) \exp i\alpha / \beta k}{\prod_{k=1}^\infty (1 + \alpha / \zeta_k) \exp i\alpha / \beta k}$$

$$K_-(\alpha) = \sqrt{A}\, \frac{\prod_{k=1}^\infty (1 - \alpha / z_k) \exp (-\alpha i / \beta k)}{\prod_{k=1}^\infty (1 - \alpha / \zeta_k) \exp (-\alpha i / \beta k)} \tag{2.4}$$

z_k и ζ_k принадлежат верхней полуплоскости.

Отметим, что (2.3), (2.4) справедливы для следующих η:

$$\operatorname{Im} \eta \geqslant -\operatorname{Im} \zeta_1, \qquad \eta \neq z_l$$

Используя известные свойства преобразования Лапласа, можно показать, что

$$f_\eta(t) = O(t^{-\gamma}) \qquad (t \to 0) \tag{2.5}$$

Последнее устанавливается путем исследования асимптотики преобразования Лапласа функции $f_\eta(t)$; при этом используется оценка

$$K_+(\alpha)=O\left[\frac{\Gamma^k(1+g/\beta-i\alpha/\beta)}{\Gamma^k(1+b/\beta-i\alpha/\beta)}\right] \qquad (\alpha\to\infty,\ |{}^1/{}_2\pi-\arg\alpha|<\pi) \tag{2.6}$$

причем $k=2$ в первом случае (1.6) и $k=1$ — во втором; $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера.

Теперь подставим в интегральное уравнение (1.7) ядро $k(x-\xi)$, записанное в форме (2.2), решение $f_\eta(\xi)$ — в форме (2.3) и результат проинтегрируем, подведя интеграл под знак двойной суммы. Правомерность этой операции можно обосновать, если учесть, что имеется конечное число точек неравномерной сходимости ряда и в них функция интегрируема

В результате получим

$$\int_0^\infty k(x-\xi)f_\eta(\xi)\,d\xi=\frac{2i}{K(\eta)}\sum_{r=1}^\infty\frac{s_r\zeta_r}{\zeta_r^2-\eta^2}\exp i\eta x+$$
$$+2i\sum_{l=1}^\infty c_l(\eta)\left(\sum_{r=1}^\infty\frac{s_r\zeta_r}{\zeta_r^2-z_l^2}\right)\exp iz_lx-$$
$$-i\sum_{r=1}^\infty s_r\left(\frac{1}{K(\eta)}\frac{1}{\zeta_r-\eta}+\sum_{l=1}^\infty\frac{c_l(\eta)}{\zeta_r-z_l}\right)\exp i\zeta_rx \tag{2.7}$$

Сумму ряда первого члена формулы (2.7) можно найти следующим образом:

$$\frac{2i}{K(\eta)}\sum_{r=1}^\infty\frac{s_r\zeta_r}{\zeta_r^2-\eta^2}=\frac{1}{K(\eta)}\lim_{x\to\infty}\int_0^\infty k(x-\xi)e^{i\eta(\xi-x)}\,d\xi= \tag{2.8}$$
$$=\frac{1}{K(\eta)}\lim_{x\to\infty}\left[\int_{-\infty}^\infty k(y)e^{i\eta y}\,dy+\int_{-\infty}^{-x}k(y)e^{i\eta y}\,dy\right]=\frac{1}{K(\eta)}\int_{-\infty}^\infty k(y)e^{i\eta y}\,dy=\pi$$

Здесь принята в учет асимптотика нулей (1.4).

Правая часть выражения (2.7) должна равняться $\pi e^{i\eta x}$, поскольку $f_\eta(x)$ является точным решением интегрального уравнения (1.7). Тогда, с учетом (2.8), тождественно выполняется равенство

$$2\sum_{l=1}^\infty c_l(\eta)\left(\sum_{r=1}^\infty\frac{s_r\zeta_r}{\zeta_r^2-z_l^2}\right)\exp iz_lx-$$
$$-\sum_{r=1}^\infty s_r\left(\frac{1}{K(\eta)}\frac{1}{\zeta_r-\eta}+\sum_{l=1}^\infty\frac{c_l(\eta)}{\zeta_r-z_l}\right)\exp i\zeta_rx\equiv0 \tag{2.9}$$

Из последнего тождества, принимая во внимание линейную независимость функций $\exp iz_lx$, $\exp i\zeta_rx$, сразу получаем

$$\sum_{r=1}^\infty\frac{s_r\zeta_r}{\zeta_r^2-z_l^2}=0 \qquad (l=1,2,\ldots) \tag{2.10}$$

$$(\mathrm{I})\qquad \frac{1}{K(\eta)}\frac{1}{\zeta_r-\eta}+\sum_{l=1}^\infty\frac{c_l(\eta)}{\zeta_r-z_l}=0 \qquad (r=1,2,\ldots) \tag{2.11}$$

Таким образом, если $f_\eta(x)$ является решением интегрального уравнения (1.7), то коэффициенты $c_l(\eta)$ удовлетворяют бесконечной системе (2.11) и одновременно выполняются равенства (2.10).

Установим общий вид решения $q_\eta(x)$ интегрального уравнения (1.1), именно покажем, что оно имеет вид

$$q_\eta(x) = B_0(a, \eta)\, e^{i\eta x} + \sum_{k=1}^{\infty} [B_k^+(a, \eta) \exp iz_k(a + x) + B_k^-(a, \eta) \exp iz_k(a - x)] \tag{2.12}$$

Для этого предварительно исследуем результат подстановки в интегральное уравнение (1.1) нулевого члена асимптотики в форме [1]

$$q_\eta^\circ(x) = e^{-i\eta a} f_\eta(a + x) + e^{i\eta a} f_{-\eta}(a - x) - K^{-1}(\eta)\, e^{i\eta x} \tag{2.13}$$

Подставляя $q_\eta^\circ(x)$ в (1.1), интегрируя и учитывая формулы (2.8), (2.10) и (2.11), получим

$$\int_{-a}^{a} k(x - \xi)\, q_\eta^\circ(\xi)\, d\xi = \pi e^{i\eta x} + i \sum_{r=1}^{\infty} s_r \sum_{l=1}^{\infty} \frac{c_l(\eta)}{\zeta_r + z_l} \exp[2aiz_l + i\zeta_r(a - x) - i\eta a] + i \sum_{r=1}^{\infty} s_r \sum_{l=1}^{\infty} \frac{c_l(-\eta)}{\zeta_r + z_l} \exp[2aiz_l + i\zeta_r(a + x) + i\eta a] \tag{2.14}$$

Выясним, какому интегральному уравнению удовлетворяют последующие члены асимптотики уравнения (1.1). Отыскивая последующие члены асимптотики в форме

$$q_\eta^*(x) = q_\eta(x) - q_\eta^\circ(x) \tag{2.15}$$

(здесь $q_\eta(x)$ — точное решение уравнения (1.1)), после подстановки в уравнение (1.1) получим

$$\int_{-a}^{a} k(x - \xi)\, q_\eta^*(\xi)\, d\xi = -i \sum_{r=1}^{\infty} s_r \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\exp 2aiz_l}{\zeta_r + z_l} \{c_l(\eta) \exp[i\zeta_r(a - x) - i\eta a] + c_l(-\eta) \exp[i\zeta_r(a + x) + i\eta a]\} \tag{2.16}$$

Применим к уравнению (2.16) вновь методику выделения нулевого члена асимптотики [1]. Для его получения необходимо решить интегральное уравнение

$$\int_{0}^{\infty} k(x - \xi)\, f_{\zeta_r}(\xi)\, d\xi = \pi \exp i\zeta_r x \qquad (0 \leqslant x < \infty) \tag{2.17}$$

Отметим, что нулевой член асимптотики решения уравнения (2.16), являющийся первым для уравнения (1.1), выступает с малым параметром вида $\exp 2aiz_l$.

Решение интегрального уравнения (2.17) можно получить по формулам (2.3), (2.4) заменой η на ζ_r, причем оно по-прежнему будет комбинацией функций $\exp iz_l t$. Таким же путем можно убедиться, что и все последующие члены асимптотики решения $q_\eta(x)$ будут иметь такую же структуру, так как на каждом этапе нужно будет решать уравнение вида (2.17).

Таким образом, справедливость формулы (2.12) доказана.

Теперь необходимо определить коэффициенты $B_0(a, \eta), B_k^+(a, \eta)$ $B_k^-(a, \eta)$ в разложении (2.12). Покажем, что эти коэффициенты удовлетворяют некоторой бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (II). Для этого подставим $q_\eta(x)$, взятое в форме (2.12), в интегральное уравнение (1.1), предварительно взяв $k(t)$ в форме (2.2). В результате интегрирования и учета (2.8), (2.10) получим

$$\int_{-a}^{a} k(x-\xi)\, q_\eta(\xi)\, d\xi = 2iB_0(a, \eta)\, e^{i\eta x} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{s_r \zeta_r}{\zeta_r^2 - \eta^2} -$$

$$- i\sum_{r=1}^{\infty} s_r \left\{\left[\frac{B_0(a, \eta)\, e^{-ia\eta}}{\zeta_r - \eta} + \sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{B_l^+(a, \eta)}{\zeta_r - z_l} + \frac{B_l^-(a, \eta)\exp 2aiz_l}{\zeta_r + \zeta_l}\right)\right]\exp i\zeta_r(a+x) + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{B_0(a, \eta)\, e^{ia\eta}}{\zeta_r + \eta} + \sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{B_l^-(a, \eta)}{\zeta_r - z_l} + \frac{B_l^+(a, \eta)\exp 2aiz_l}{\zeta_r + z_l}\right)\right]\exp j\zeta_r(a-x)\right\} \qquad (2.18)$$

Потребуем, чтобы правая часть (2.18) равнялась $\pi e^{i\eta x}$. Тогда должны выполняться условия

$$B_0(a, \eta) = K^{-1}(\eta)$$

$$\begin{aligned} &\frac{B_0 e^{-i\eta a}}{\zeta_r - \eta} + \sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{B_l^+(a, \eta)}{\zeta_r - z_l} + \frac{B_l^-(a, \eta)\exp 2aiz_l}{\zeta_r + z_l}\right) = 0 \\ &\frac{B_0 e^{i\eta a}}{\zeta_r + \eta} + \sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{B_l^-(a, \eta)}{\zeta_r - z_l} + \frac{B_l^+(a, \eta)\exp 2aiz_l}{\zeta_r + z_l}\right) = 0 \end{aligned} \qquad (r = 1, 2, \ldots) \qquad (2.19)$$

Найдя такие $B_l^+(a, \eta)$ и $B_l^-(a, \eta)$, которые удовлетворяют бесконечной системе (2.19), тем самым найдем решение уравнения (1.1).

Сравнивая вторую и третью системы в (2.19), получим

$$B_l^+(a, \eta) = B_l^-(a, -\eta) \qquad (2.20)$$

Введя новые неизвестные

$$x_l^\mp = B_l^+(a, \eta) \pm B_l^-(a, \eta) \qquad (2.21)$$

возникающие в результате сложения и вычитания второй и третьей систем в (2.19), можем заключить, что для получения решения уравнения (1.1) достаточно найти решение бесконечной системы вида (случай x_l^+)

$$\text{(II)} \sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\zeta_r - z_l} + \frac{\exp 2aiz_l}{\zeta_r + z_l}\right)x_l + \frac{e^{-i\eta a}K^{-1}(\eta)}{\zeta_r - \eta} + \frac{e^{+i\eta a}K^{-1}(\eta)}{\zeta_r + \eta} = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots) \qquad (2.22)$$

В дальнейшем, наряду с системой (2.11), нам понадобятся бесконечные системы вида (2.11) для случая $\eta = \zeta_r$. Строя описанным выше способом системы, аналогичные (2.11), получим

$$\frac{1}{\pi i}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{s_r c_l(\zeta_r)}{\zeta_k - z_l} = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq r, \quad r, k = 1, 2, \ldots \\ 1 & \text{при } k = r \end{cases} \qquad \left(\tau_{lr} = \frac{s_r c_l(\zeta_r)}{\pi i}\right) \qquad (2.23)$$

Теперь задачу можно сформулировать следующим образом: найти решения x_l системы (2.22), если известны решения систем (2.11) и (2.23).

§ 3. Запишем задачу в матричной форме. Введем обозначения:

$$a_{r,l} = \frac{1}{\zeta_r - z_l}, \qquad b_{r,l} = \frac{1}{\zeta_r + z_l} \exp 2aiz_l, \qquad d_r = \frac{2(\zeta_r \cos \eta a - \eta \sin \eta a)}{K(\eta)(\eta^2 - \zeta_r^2)}$$

$$x^\circ_l(\eta) = c(\eta)e^{-i\eta a} + c_l(-\eta)e^{+i\eta a}, \qquad \tau_{l,r} = \frac{-1}{K_+(\zeta_r)K_+'(-z_l)(z_l - \zeta_r)[K^{-1}(\zeta_r)]'} \tag{3.1}$$

Используя (1.4), (2.4) и (2.6), а также известные свойства гамма-функций Эйлера, можно установить справедливость следующих оценок:

$$c_k(\eta)|_{k\to\infty} = O(k^{\gamma-1}), \qquad |\tau_{k,r}|_{k\to\infty} = O(k^{\gamma-1}), \qquad |\tau_{k,r}|_{r\to\infty} = O(r^{1-\gamma}) \tag{3.2}$$

Причем вторая оценка (3.2) выполняется для фиксированного r, а третья — для фиксированного k. Введем в рассмотрение матрицы

$$A = (a_{r,l}), \qquad B(a) = (b_{r,l}), \qquad {}^{-1}A = (\tau_{l,r}), \qquad D = (dr) \tag{3.3}$$

а также $X = (x_l)$ и $X_0 = (x_l^\circ(\eta))$ — матрицы-столбцы.

Теперь сформулированную в конце § 2 задачу можно поставить в матричной форме следующим образом.

Найти матрицу-столбец X_0, удовлетворяющую уравнению

$$(A + B(a))X = D \tag{3.4}$$

если известна матрица-столбец X_0 — решение уравнения

$$AX_0 = D \tag{3.5}$$

а также известна правосторонняя обратная ${}^{-1}A$ матрица к матрице A, т. е.

$$A \cdot {}^{-1}A = I \tag{3.6}$$

где I — единичная матрица.

Отметим, что матрица $B(a)$ обладает очевидным свойством

$$B(a) \to 0 \quad (a \to \infty) \ (0 \text{ — нуль-матрица}) \tag{3.7}$$

Переходя в уравнении (3.4) к новой неизвестной Y по формуле

$$X = X_0 + Y \tag{3.8}$$

и используя (3.5), получим для ее нахождения уравнение вида

$$AY = -B(a)Y - B(a)X_0 \tag{3.9}$$

Отыскивая решение этого уравнения в форме

$$Y = {}^{-1}AZ \tag{3.10}$$

(Z — новое неизвестное) и учитывая (3.6), получим уравнение для определения Z

$$Z = -B(a) \cdot {}^{-1}AZ - B(a)X_0 \tag{3.11}$$

Заметим, что для использования правосторонней обратной матрицы для отыскания решения в форме (3.10) необходимо доказать [3] ассоциативность произведения $A^{-1}AZ$. Однако можно, не доказывая ассоциативности, убедиться в возможности такого использования путем исследования последующих членов асимптотики, получаемых из уравнения (2.16). Это замечание подтверждает правильность формул (3.10), (3.11).

Рассмотрим матрицу

$$U(a) = -B(a)\cdot^{-1}A \tag{3.12}$$

Ее элементы имеют следующий вид:

$$u_{l,m} = -\sum_{k=1}^{\infty} b_{l,k}\tau_{k,m} = \frac{1}{K_+(\zeta_m)[K^{-1}(\zeta_m)]'}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\exp 2aiz_k}{(\zeta_l+z_k)K_+'(-z_k)(z_k-\zeta_m)} \tag{3.13}$$

Из последнего выражения и оценок (3.2) видно, что матрица $U(a)$ существует для всех $0 < a < \infty$ и

$$U(a) \to 0 \qquad \text{при } a \to \infty \tag{3.14}$$

Аналогичным путем можно убедиться в существовании матрицы $B(a)X_0$.

Будем рассматривать уравнение (3.11), записанное в форме

$$Z = U(a)Z - B(a)X_0 \tag{3.15}$$

в пространстве m бесконечных ограниченных последовательностей. Определим норму оператора $U(a)$ следующим образом:

$$\|U(a)\| = \sup_l \sum_{m=1}^{\infty} |u_{l,m}| \tag{3.16}$$

Покажем корректность определения (3.16). Справедливы оценки

$$\|U(a)\| = \sup_l \sum_{m=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{\infty} b_{l,k}\tau_{k,m}\right| \leqslant \sup_l \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|b_{l,k}\cdot\tau_{k,m}| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_l \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|b_{l,k}|\cdot|\tau_{k,m}| = \sup_l S_l(a) \tag{3.17}$$

Для доказательства существования $S_l(a)$ достаточно установить сходимость при всех l повторного ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}|b_{l,k}|\sum_{m=1}^{\infty}|\tau_{k,m}| \tag{3.18}$$

Внутренний ряд сходится при любом фиксированном k в силу свойства (3.2), но тогда и повторный ряд сходится, поскольку коэффициенты $b_{l,k}$ экспоненциально убывают при $k \to \infty$.

Поскольку ряд (3.18) сходится абсолютно, то сходится и соответствующий двойной ряд, причем их суммы совпадают.

Как видно из формулы (3.1), $|b_{1,k}| > |b_{l,k}|$ $(l = 2, 3, \ldots)$, а тогда

$$\sup_l S_l(a) = S_1(a) \tag{3.19}$$

Таким образом, существование нормы (3.16) доказано.

Из определения нормы видно, что она обладает свойством

$$\|U(a)\| \to 0 \qquad \text{при } a \to \infty \tag{3.20}$$

Из этого свойства следует: можно найти такое a_0, что для $a > a_0$

и $0 < q < 1$ будет выполняться неравенство

$$\| U(a) \| < q \tag{3.21}$$

Но тогда, как нетрудно проверить, для значений $a_0 < a < \infty$ оператор $U(a)$ действует из m в m. Так как m — пространство Банаха, то применима теорема Банаха о существовании решения уравнения (3.15) в области $a_0 < a < \infty$ [4]. Само решение можно получить методом последовательных приближений, причем процесс сходится к единственному решению. Принимая в качестве начального элемента $-B(a)X_0$, найдем решение уравнения (3.15) в форме

$$Z = -\left(I + \sum_{k=1}^{\infty} U^k(a)\right) B(a) X_0 \tag{3.22}$$

Или, возвращаясь по формулам (3.8), (3.10) к первоначальной неизвестной X, получим решение уравнения (3.4) в виде

$$X = X_0 - {}^{-1}A \left[I + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (B(a) \cdot {}^{-1}A)^k\right] B(a) X_0 \tag{3.23}$$

Таким же путем из соответствующей системы можно определить x_l^-.

Для определения границы применимости формулы (3.23) по a необходимо решить уравнение

$$\| U(a) \| = 1 \tag{3.24}$$

максимальный положительный корень этого уравнения и будет a_0. Решить уравнение (3.24) в общем виде трудно, однако можно решить приближенное уравнение, которое даст завышенное значение a^*, т. е. $a_0 < a^*$. В качестве такого уравнения можно взять

$$S_1(a) = 1 \tag{3.25}$$

которое представимо в форме

$$\psi(a) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-2a\tau_k} - 1 = 0 \qquad \left(S = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\right) \tag{3.26}$$

$$b_k = \frac{1}{|\zeta_1 + z_k|} \sum_{m=1}^{\infty} |\tau_{k,m}| > 0, \qquad \tau_k = \operatorname{Im} z_k > 0$$

Очевидно, если $S < 1$, то уравнение (3.25) не имеет вещественных корней и решение (3.23) справедливо при $0 < a < \infty$.

Если окажется что $S > 1$, то существует единственный положительный корень a^* уравнения (3.26), и можно сказать, что решение (3.23) справедливо, по крайней мере, в области $a^* < a < \infty$.

Так как кривая (3.25) выпуклая вниз, то для нахождения корня можно применить метод Ньютона, который всегда будет сходиться к корню a^*, если в качестве начального значения корня брать $0 < a_0^* < \infty$ такое, что $\psi(a_0^*) > 0$. Если, например, найдется $b_r > 1$, то можно взять

$$a_0^* = \frac{\ln b_r}{2\tau_r}$$

Заметим, как показывают конкретные расчеты, получаемое значение границы применимости a^* является завышенным. Причина этого заключается в том, что для сходимости метода последовательных приближений достаточно, чтобы сходился ряд

$$U(a) + U^2(a) + \ldots + U^n(a) + \ldots$$

У нас же требовалась сходимость ряда, составленного из норм, причем a^* находилось из приближенного уравнения (3.25), дающего завышенное значение корня по отношению к уравнению (3.24).

Исследуя структуру коэффициентов x_l в формуле (3.23), можно видеть, что, действительно, при больших a нулевой член асимптотики решения определяется по формуле (2.13). Причем первый член асимптотики решения имеет порядок $O(\exp(-2a\tau_1))$. Последним и объясняются широкие границы применимости нулевого члена асимптотики (смотри [1]).

§ 4. Рассмотрим в качестве примера на применение изложенного выше метода случай, когда функция $u^{-1}L(u)$ берется в виде

$$u^{-1}L(u) = u^{-1}\,\mathrm{th}\, u \tag{4.1}$$

В. М. Александров при рассмотрении смешанной задачи о плоском кручении упругого слоя получил замкнутое решение уравнения (1.1) с ядром, определяемым формулой (4.1). Он любезно сообщил, что для $\eta = 0$ это решение представимо в форме

$$q_0(x) = \frac{\pi e^{{}^1\!/_2\pi a}}{4K\,[e^{-\pi a}]\left(\mathrm{sh}^2\dfrac{a\pi}{2} - \mathrm{sh}^2\dfrac{x\pi}{2}\right)^{0.5}} = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!\,(2r-1)!!}{2k!!\,2r!!}\,e^{\pi[(k+r)a+(r-k)x]}}{\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{(2m-1)!!}{2m!!}\right]^2 e^{-2\pi a m}}$$

Здесь $K(x)$ — полный эллиптический интеграл. (4.2)

Применим для построения решения уравнения (1.1) метод, предложенный в настоящей работе. Для этого составим таблицу необходимых выражений

$$K(\alpha) = \frac{\mathrm{th}\,\alpha}{\alpha}, \quad K_+(\alpha) = \frac{\Gamma({}^1\!/_2 - i\alpha/\pi)}{\Gamma(1 - i\alpha/\pi)}\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad z_l = \pi l i, \quad \zeta_r = (r - {}^1\!/_2)\pi i$$

$$a_{r,l} = \frac{1}{(r - l - {}^1\!/_2)\pi i}, \quad b_{r,l} = \frac{\exp(-2a\pi l)}{(r + l - {}^1\!/_2)\pi i}, \quad s_r = \frac{2}{2r-1} \quad \left(\begin{matrix} l = 1, 2, \ldots \\ r = 1, 2, \ldots \end{matrix}\right)$$

$$c_l = \frac{(2l-1)!!}{(2l)!!}, \quad \tau_{l,r} = \frac{(2r-3)!!\,(2l-1)!!}{i\,(2r-2)!!\,(2l-2)!!\,(2l-2r+1)} \tag{4.3}$$

и построим решение по формулам (2.12) и (3.23).

Как видно из формул (4.2), (2.12), (3.23), нулевые члены асимптотики в обоих решениях совпадают. Сравним числовые коэффициенты у первых членов асимптотики, например, коэффициент у гармоники $\exp^{-2\pi a - \pi(a+x)}$.

В решении, полученном по формуле (3.23), этот коэффициент у выбранной гармоники порождается только матрицей ${}^{-1}AB\,(a)X_0$, общий элемент которой

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\tau_{l,k}b_{k,r}x_r = \frac{1}{2}\frac{(2l-1)!!}{(2l-2)!!}\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{(2r-1)!!}{2r!!}\right)^2\frac{\exp(-2\pi a r)}{(l+r)} \tag{4.4}$$

Из формулы (4.4) получим необходимый коэффициент при $r = l = 1$, что дает ${}^1\!/_{16}$. В формуле (4.2) этот коэффициент слагается из двух частей, именно, при $k = 1$, $r = 2$, $m = 0$ получится ${}^3\!/_{16}$ и при $k = 0$, $r = 1$, $m = 1$ будет соответственно $-{}^1\!/_8$. Сумма этих двух чисел дает ${}^1\!/_{16}$.

Аналогично можно убедиться, что коэффициент у гармоники $\exp[-2\pi a - 2\pi(a+x)]$ равен ${}^1\!/_{16}$, а у гармоники $\exp[-2\pi a - 3\pi(a+x)]$ — соответственно ${}^{15}\!/_{256}$.

Таким же путем можно убедиться и в равенстве всех остальных коэффициентов членов разложения. Другими словами, формулы (2.12), (3.23) дают точное решение интегрального уравнения (1.1) для случая (4.1), справедливое для всех $0 < a < \infty$.

Предложенный метод можно также использовать и для практических расчетов, причем весьма эффективным оказывается использование нулевого члена асимптотики решения. В контактных задачах теории упругости для слоя нулевой член асимптотики решения обычно полностью перекрывает диапазон малых, средних толщин и даже частично захватывает диапазон больших.

В качестве примера рассмотрим интегральное уравнение вида (1.1) при $\eta = 0$ для случая

$$\frac{L(u)}{u} = \operatorname{th}\frac{u}{2}\,\frac{u^4+3.526u^2+12.479}{u^4+2.522u^2+12.479}\,u^{-1} \tag{4.5}$$

Интегральное уравнение с ядром, определяемым (4.5), аппроксимирует интегральное уравнение плоской контактной задачи теории упругости для полосы, когда она покоится без трения на жестком основании и подвержена действию штампа с плоским основанием [1]. Точность аппроксимации (4.5) по отношению к функции $L(u)\,/\,u$ контактной задачи не превышает 1.5%. Ограничиваясь в формулах (2.12), (3.23) нулевым членом асимптотики и суммируя соответствующие ряды, получим асимптотическое решение в форме

$$q(x) = \frac{2\Delta}{h}\,[f(a+x) + f(a-x) - 1] \tag{4.6}$$

$$f(t) = (1 - \exp 2\pi t/h)^{-1/2} - 0.113\exp(-1.627\,t/h)\sin(0.940\,t/h + 0.436) +$$
$$+\,0.113\sin 0.436\exp(-3.13\pi t/h) \qquad \left(\Delta = \frac{E}{2(1-\sigma^2)}, \quad \lambda = \frac{h}{a}\right)$$

Член $\exp(-3{,}13\pi\, t\,/\,h)$ в формуле (4.6) появился как результат приближенного вычисления ряда.

Приводим результаты расчета по формуле (4.6) величины $aq(x)\,/\,\Delta$ при $\lambda = 2$ для некоторых значений $x\,/\,a$. В третьей строке для сравнения приведены соответствующие результаты, полученные методом больших λ работы [5].

$x\,/\,a =$	0,	0.2,	0.4,	0.6,	0.8,	0.95
$aq(x)\,/\,\Delta =$	0.97,	0.98,	1.01,	1.10,	1.38,	2.56
$aq(x)\,/\,\Delta =$	0.96,	0.98,	1.02,	1.12,	1.42,	2.59

(4.7)

Уклонение значений в (4.7) не превышает 3%.

В заключение отметим, что метод, предложенный в настоящей работе, можно применять и для решения уравнений второго рода

$$q(x) + \delta\int_{-a}^{a} k(x-\xi)\,q(\xi)\,d\xi = \pi\varphi(x) \tag{4.8}$$

только вместо $K(\alpha) = L(\alpha)\,/\alpha$ необходимо рассматривать функцию $\pi^{-1} + \delta L(\alpha)\,/\alpha$.

Автор искренне благодарен И. И. Воровичу и В. М. Александрову за постоянное внимание к работе и ценные советы.

Поступила 15 IX 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М., Бабешко В. А. Контактные задачи для упругой полосы малой толщины. Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 2.
2. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. Изд. иностр. лит., 1962.
3. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. Физматгиз, 1960.
4. Канторович Л. В. и Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, 1959.
5. Александров В. М. О приближенном решении одного типа интегральных уравнений. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.