

О ЗАСТОЙНЫХ ЗОНАХ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ В ТРУБАХ

П. П. Мосолов, В. П. Мясников

(Москва)

В работе [1] рассмотрена задача об установившемся движении несжимаемой вязко-пластической среды в трубах с произвольным поперечным сечением; доказаны теоремы существования и единственности решения; было проведено качественное исследование характера течения. Установлены необходимые и достаточные условия существования движения с отличной от нуля скоростью, а также доказано существование хотя бы одного жесткого ядра внутри области течения; выделен достаточно большой класс поперечных сечений, для которых ядро будет единственным.

В настоящей работе рассматриваются два вопроса, не затронутых в статье [1]:

- во-первых, существования застойных зон при течениях в трубах;
- во-вторых, математическая сторона задачи, связанная с недифференцируемостью рассматриваемого функционала.

Ответ на второй вопрос позволяет заключить, что уравнение Эйлера в рассматриваемом случае остается справедливым только в областях, где решение имеет отличный от нуля градиент поля скоростей. В областях же, в которых решение имеет постоянное значение, уравнение Эйлера заменяется некоторыми естественными геометрическими условиями, допускающими прозрачную физическую интерпретацию. Так, например, такое условие для жесткого ядра является динамическим условием его движения как твердого тела. Следует отметить, что ранее такие условия вводились в задачу как дополнительные предположения.

Аналогичная ситуация имеет место и для застойных зон. В § 1 работы сформулированы необходимые и достаточные условия, которым удовлетворяет функция, минимизирующая исходный функционал. Показано, что границы застойных зон всегда вогнуты в сторону застойной зоны и имеют в каждой точке кривизну не меньшую, чем τ_0 / c , а границы ядер в точках выпуклости, наоборот, имеют кривизну не большую, чем τ_0 / c .

В § 2 показано, что известные точные решения в задачах о движении вязко-пластической среды в трубах действительно минимизируют соответствующие функционалы. Доказана возможность существования застойных зон в зависимости от геометрических особенностей границы (угловые точки, области с пережатием).

Результаты § 3 статьи [1] часто используются в настоящей работе, и поэтому сохранены все принятые в ней обозначения; как и в статье [1] все громоздкие доказательства вынесены в приложения в конце статьи.

§. 1. Критерий выбора истинного движения. Рассмотрим функционал

$$J(u) = \int_{\omega} \left\{ \frac{\mu}{2} (\nabla u)^2 + \tau_0 |\nabla u| - cu \right\} d\omega \quad (1.1)$$

определенный на функциях $u(x, y)$, непрерывных вместе с первыми частными производными в замыкании ограниченной области ω и удовлетворяющих на границе Γ области ω краевому условию

$$u|_{\Gamma} = \varphi(x, y) \quad (1.2)$$

В работе [1] было показано, что функция, описывающая действительное движение вязко-пластической среды в трубе с произвольным поперечным сечением, минимизирует функционал (1.1).

Целью настоящего параграфа является нахождение эффективных условий, позволяющих проверить, что заданная достаточно гладкая функция $u_0(x, y)$, подчиненная условию (1.2), минимизирует функционал (1.1).

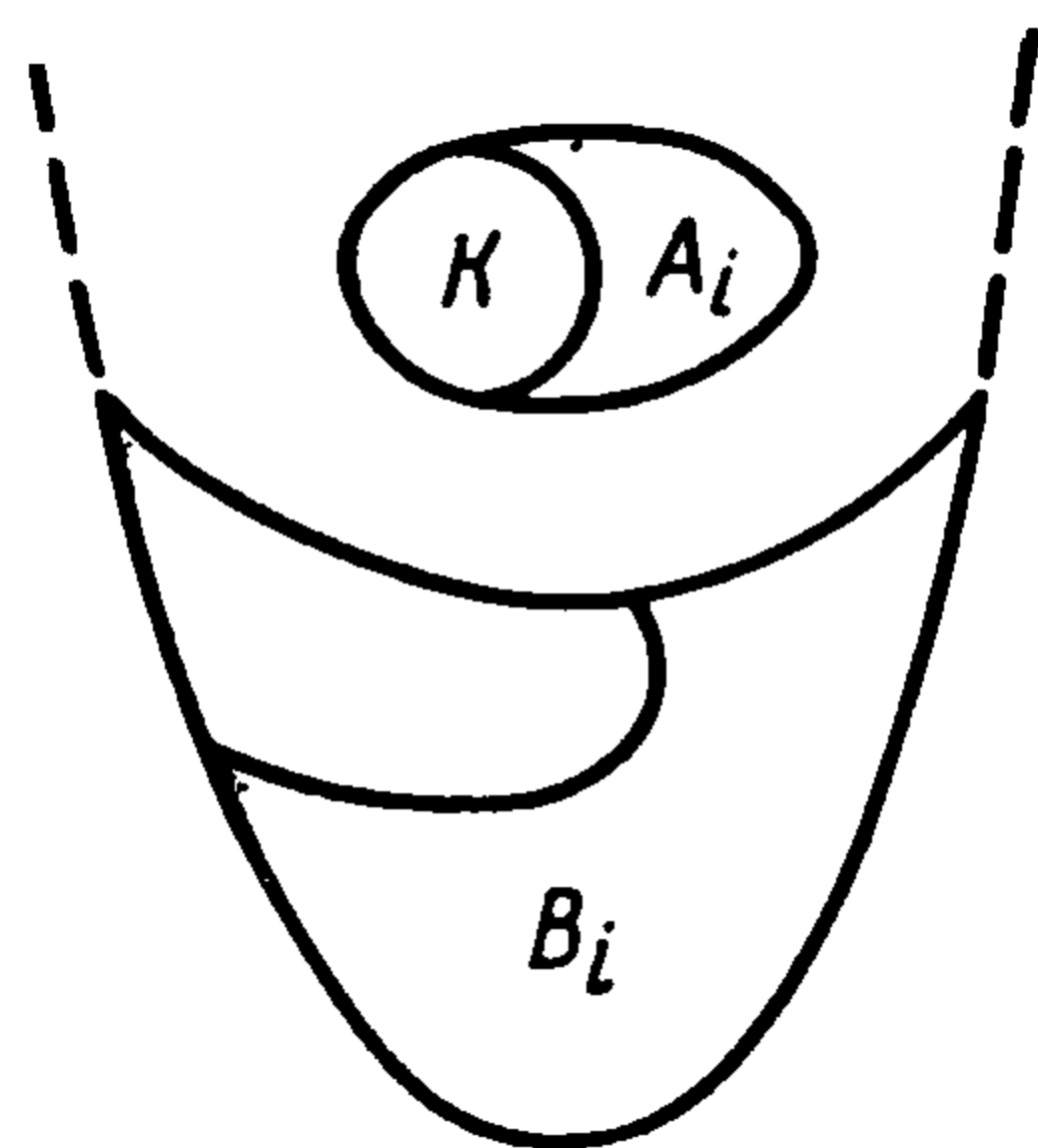
Предположим, что множество точек области ω , где $|\nabla u_0| = 0$, является совокупностью замкнутых, непересекающихся областей $A_1, \dots, A_s, B_1, \dots, B_p$, где все A_i расположены строго внутри ω , а каждое из B_i имеет, по крайней мере, одну общую точку с Γ . Границу области A_i обозначим a_i , границу области B_i обозначим b_i . Относительно $u_0(x, y)$ предположим еще, что она достигает на каждом из A_i своего локального максимума и что в области Ω , являющейся частью области ω , где $|\nabla u_0| > 0$ она непрерывна вместе со своими производными до второго порядка включительно. В дальнейшем области A_i будем называть ядрами течения, области B_i — застойными зонами.

Необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять функция, минимизирующая функционал (1.1), могут быть сформулированы в виде следующей теоремы.

Теорема* 1.1 (критерий)¹. Для того, чтобы функция $u_0(x, y)$ минимизировала функционал (1.1), необходимо и достаточно:

1°. В области Ω функция $u_0(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\mu \Delta u_0 + \tau_0 \operatorname{div} [\nabla u_0 / |\nabla u_0|] + c = 0$$



Фиг. 1

2°. В каждой области B_j для любого контура K , расположенного в B_j и ограничивающего подобласть K^* области B_j , имеет место неравенство² (фиг. 1)

$$\tau_0 \operatorname{mes} L \geq c \operatorname{mes} K^* + \tau_0 \operatorname{mes} \gamma \quad (K = L + \gamma)$$

где γ — часть контура K , совпадающая³ с $b_j \setminus \Gamma$.

3°. В каждой области A_i имеют место соотношения

$$(a) \quad \tau_0 \operatorname{mes} a_i = c \operatorname{mes} A_i, \quad (b) \quad \tau_0 \operatorname{mes} K \geq c \operatorname{mes} K^*$$

где K — произвольный контур, лежащий в области A_i и ограничивающий подобласть K^* области A_i .

Условия 2°, 3° критерия хотя и носят чисто геометрический характер, однако трудно проверяемы в силу произвольности фигурирующего в них контура K . Приводимые ниже леммы 1.1 и 1.2 существенно облегчают практическое использование критерия. Они выделяют сравнительно узкий класс контуров, на которых следует проверять условия 2°, 3° критерия.

Рассмотрим область D с границей d . Пусть K — контур, расположенный в замыкании области D , ограничивает подобласть K^* области D .

¹ Доказательства теорем и лемм, отмеченных звездочкой, даны в приложении.

² Через $\operatorname{mes} L$, $\operatorname{mes} \gamma$, $\operatorname{mes} K^*$ обозначены соответственно длины линий L , γ и площадь области K .

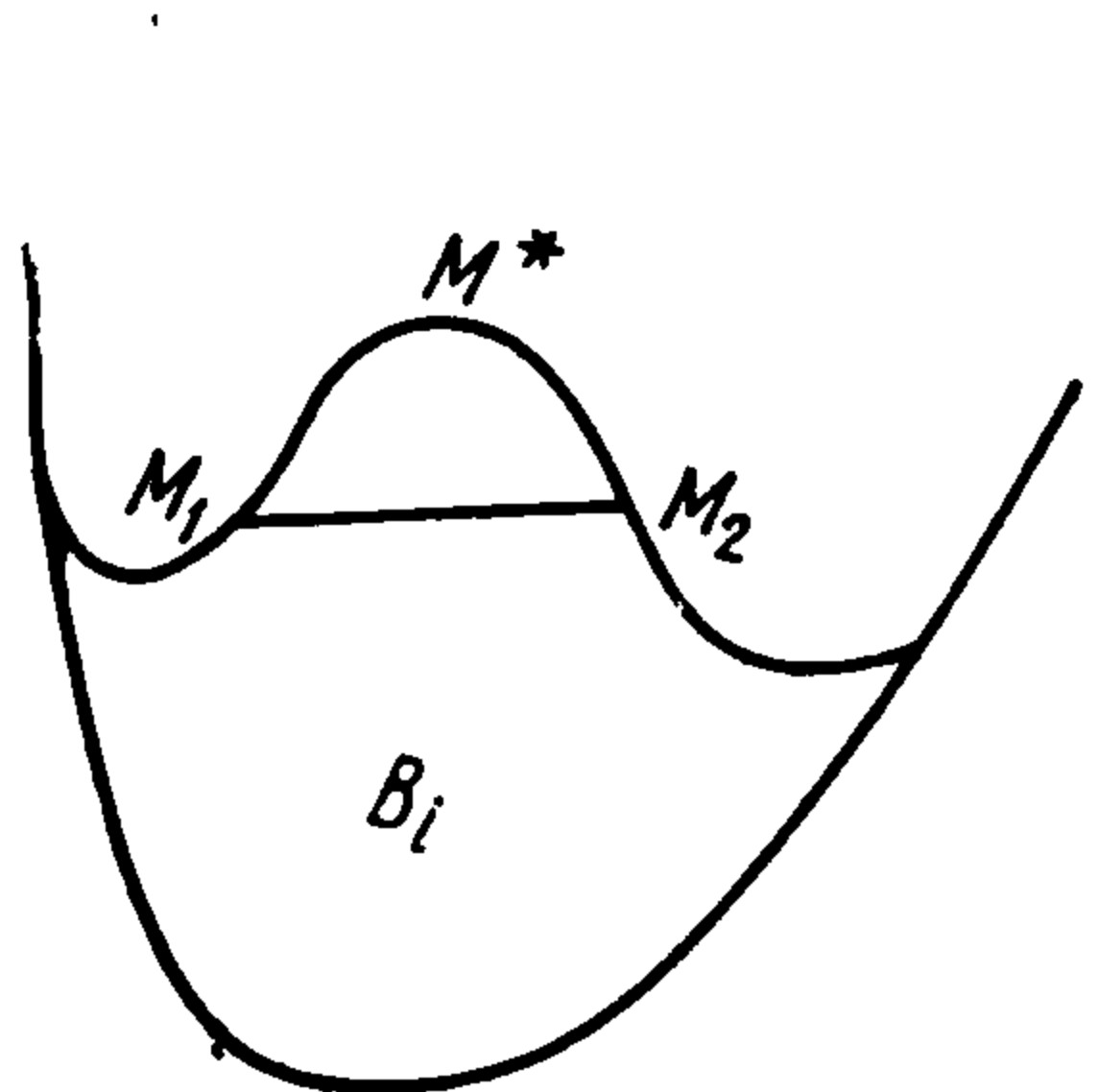
³ $b_i \setminus \Gamma$ обозначает множество точек кривой b_i , которые не лежат на Γ .

Лемма* 1.1. Функционал $M(K) = \tau_0 \text{mes } K - c \text{mes } K^*$ достигает своего минимума на контуре K' со следующими свойствами.

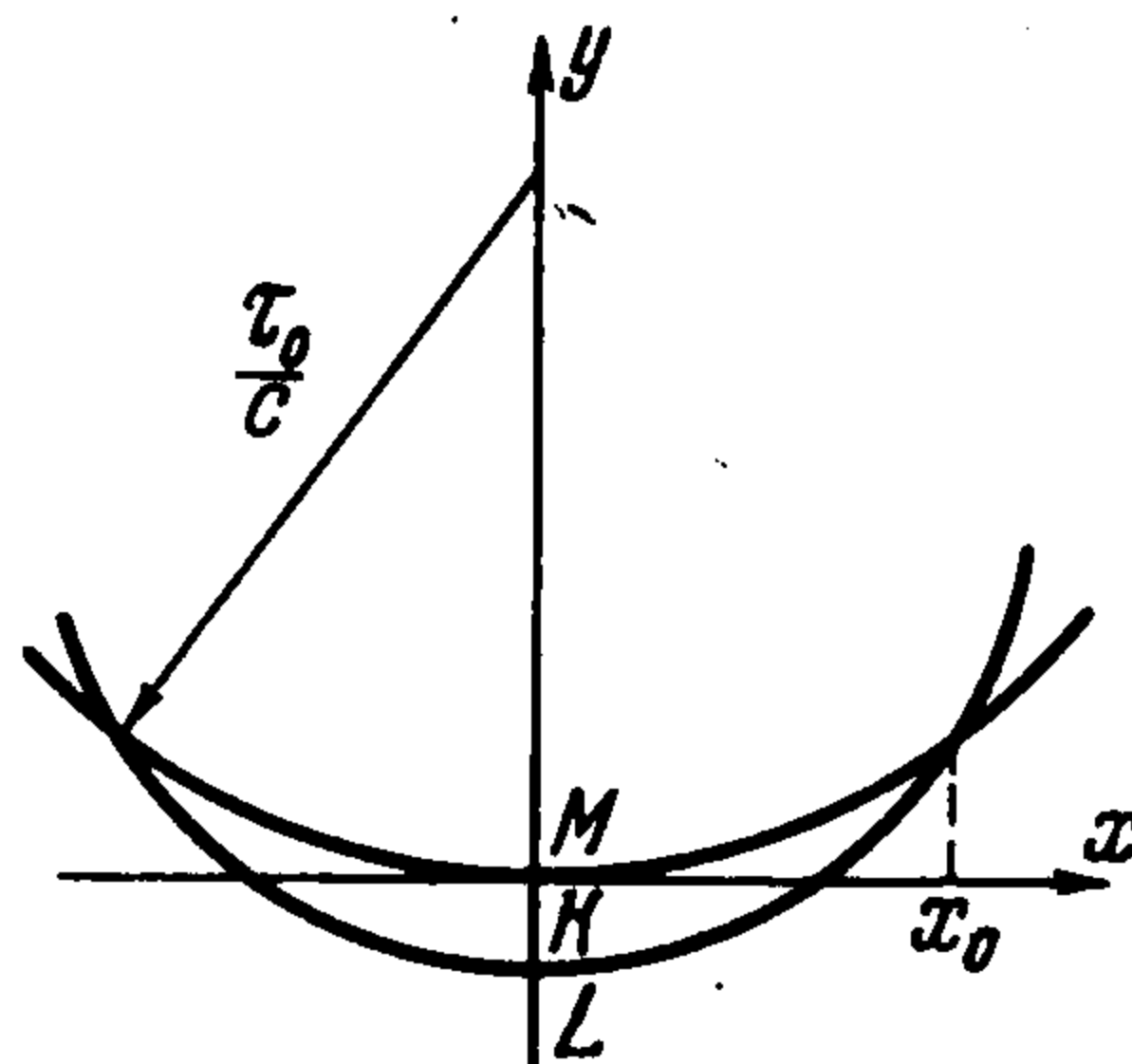
1°. Во внутренних точках D контур K' совпадает с дугой окружности радиуса τ_0 / c .

2°. Контур K' может подходить к границе d под ненулевым углом лишь в точках, где граница d негладкая.

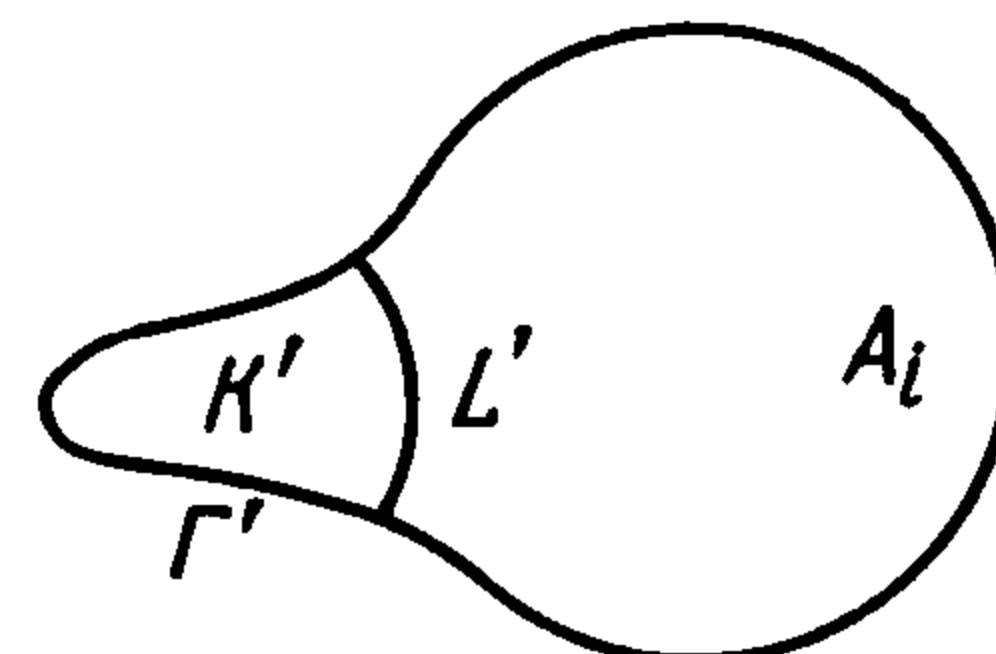
Пусть граница d представима в виде $d = \gamma + L$, где γ — совокупность конечного числа гладких кривых. Тогда рассмотренный выше контур K допускает представление $K = T + \tau$, где τ — часть γ .



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Лемма 1.2. Функционал $N(K) = \tau_0 \text{mes } T - \tau_0 \text{mes } \tau - c \text{mes } K^*$ достигает своего минимума на контуре K' , обладающем свойствами 1°, 2° леммы 1.1.

Доказательство леммы 1.2 является дословным повторением доказательства леммы 1.1.

Условия 2°, 3° критерия позволяют сделать некоторые выводы относительно геометрических особенностей границ застойных зон и ядер течения. Во-первых совершенно очевидно, что ни одна из областей A_i или B_i не может содержать круга радиуса большего $2\tau_0 / c$. Во-вторых, легко видеть, что $b_i \setminus \Gamma$ вогнута по отношению к области B_i .

Действительно, предположим противное. Рассмотрим контур $K = \sim M_1 M^* M_2 + [M_1, M_2]$ (см. фиг. 2). Очевидно, при этом $\text{mes } \sim M_1 M^* M_2 > \text{mes } [M_1, M_2]$, что противоречит условию 2° критерия. Менее очевидным является следующее свойство¹ кривой $b_i \setminus \Gamma$.

Теорема 1.2. Если $b_i \setminus \Gamma$ — кривая с непрерывно меняющейся кривизной κ , то $|\kappa| \leq c / \tau_0$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует точка M на $b_i \setminus \Gamma$, где $|\kappa| > c / \tau_0$. Рассмотрим окрестность точки M и введем в этой окрестности новые координаты, направив ось Ox по касательной к кривой, а ось Oy — по нормали. Начало координат выберем в точке M . Кривая $b_i \setminus \Gamma$ в окрестности точки M представима в виде $y = ax^2 + O(x^3)$, $a < c / 2\tau_0$. Проведем окружность радиуса τ_0 / c так, как это показано на фиг. 3. Заметим, что такое построение возможно при достаточно малом x_0 именно в силу того, что $a < c / 2\tau_0$.

В качестве контура K возьмем контур, состоящий из дуги окружности L и дуги кривой τ . Через K^* обозначим область, ограниченную

контуром K . Легко подсчитать, что

$$\begin{aligned} \text{mes } K^* &= -\frac{4}{3}ax_0^3 - (\tau_0/c)x_0 + cx_0^3/2\tau_0 + (\tau_0/c)^2 \arcsin(cx_0/\tau_0) + O(x_0^4) \\ \text{mes } \tau &= 2x_0 + \frac{4}{3}a^2x_0^3 + O(x_0^4) \\ \text{mes } L &= (2\tau_0/c) \arcsin(cx_0/\tau_0) \end{aligned}$$

Из условия 2° критерия следует, что

$$\tau_0 \text{mes } L \geq \tau_0 \text{mes } \tau + c \text{mes } K^* \quad (1.3)$$

Подставляя в это неравенство найденные значения для $\text{mes } L$, $\text{mes } \tau$, $\text{mes } K^*$, получим $O \geq (2a\tau_0 - c)^2x_0^3 + O(x_0^4)$, что невозможно при достаточно малом x_0 . Теорема 1.2 доказана.

Совершенно аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 1.3. Если граница a_i ядра течения A_i в точке M выпукла и кривизна κ границы непрерывна в M , то в M

$$|\kappa| > c/\tau_0$$

При доказательстве теоремы 1.3 вместо условия (1.3) следует использовать следующее неравенство, вытекающее из соотношений (а), (б) пункта 3° критерия

$$\tau_0 \text{mes } \Gamma' \leq \tau_0 \text{mes } L' + c \text{mes } K'^*$$

Обозначения Γ' , L' , K'^* указаны на фиг. 4.

Условия 2° и 3° теоремы 1.1 имеют ясный физический смысл. Если составить условия движения ядра как твердого тела без ускорения, то они будут иметь вид

$$\tau_0 \text{mes } a_i = c \text{mes } A_i$$

Ясно, что если условия равновесия всех сил, действующих на ядро, выполнены для всего ядра в целом, то они и подавно должны быть выполнены для любой его части. Аналогичное положение имеет место и для застойных зон.

Таким образом, условия 2°, 3° теоремы 1.1 представляют собой динамические условия движения ядер и равновесия застойных зон.

§ 2. Проверка известных точных решений. Сформулированный в § 1 критерий выбора действительного движения вязко-пластической среды в трубах из всех кинематически возможных движений позволяет проверить известные точки решения [2-4].

1°. Движение в круглой трубе [2]. В этом случае точное решение имеет вид (фиг. 5)

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{\tau_0}{\mu} \ln \frac{r}{R} + \frac{c}{4\mu} (R^2 - r^2) \quad \text{при } R_1 \leq r \leq R \\ u_0 &= \frac{\tau_0}{\mu} \ln \frac{R_1}{R} + \frac{c}{4\mu} (R^2 - R_1^2) \quad \text{при } 0 \leq r \leq R_1 \end{aligned} \quad \left(R_1 = \frac{2\tau_0}{c} \right) \quad (2.1)$$

Условие 1° теоремы 1.1 проверяется непосредственной подстановкой $u_0(r)$ в дифференциальное уравнение. Поскольку застойных зон нет, то условие 2° отпадает. Необходимо, следовательно, проверить только условие 3° теоремы 1.1. В рассматриваемом случае ядро единственно, и границей Γ его является окружность радиуса R_1 . Лемма 1.1 позволяет утверждать, что условие 3° критерия 1.1 должно быть проверено на двух контурах. Одним из них является окружность радиуса τ_0/c , а другим — окружность радиуса $2\tau_0/c$. В обоих случаях условие 3° теоремы 1.1 выполнено. Тем самым доказано, что функция $u_0(r)$ минимизирует функционал 1.1.

2°. Продольное движение в кольцевом зазоре [3]. Точное решение дается формулой (Фиг. 6)

$$u_0 = \frac{\tau_0}{\mu} (R_1 - r) + \left[\frac{\tau_0 R_2}{\mu} + \frac{C R_2^2}{2\mu} \right] \ln \frac{r}{R_1} + \frac{c}{4\mu} (R_1^2 - r^2) \quad \text{при } R_1 \leq r \leq R_2$$

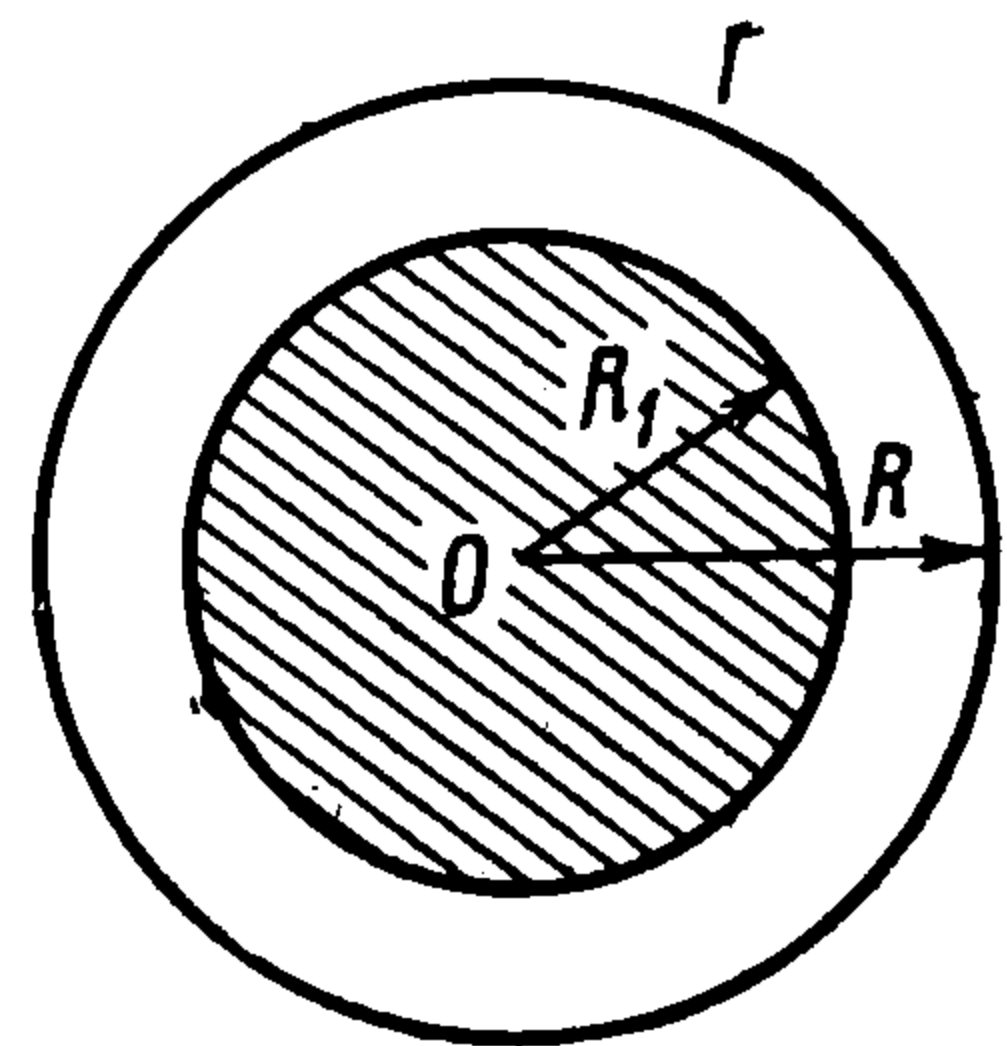
$$u_0 = \frac{\tau_0}{\mu} (r - R_4) + \left[-\frac{\tau_0 R_3}{\mu} + \frac{C R_3^2}{2\mu} \right] \ln \frac{r}{R_4} + \frac{c}{4\mu} (R_4^2 - r^2) \quad \text{при } R_3 \leq r \leq R_4$$

$$u_0 = \frac{\tau_0}{\mu} (R_1 - R_2) + \left[\frac{\tau_0 R_2}{\mu} + \frac{C R_2^2}{2\mu} \right] \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{c}{4\mu} (R_1^2 - R_2^2) \quad \text{при } R_2 \leq r \leq R_3$$

$$\begin{aligned} & \frac{\tau_0}{\mu} (R_1 - R_2) + \left[\frac{\tau_0 R_2}{\mu} + \frac{C R_2^2}{2\mu} \right] \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{c}{4\mu} (R_1^2 - R_2^2) = \frac{\tau_0}{\mu} (R_3 - R_4) + \\ & + \left[-\frac{\tau_0 R_3}{\mu} + \frac{C R_3^2}{2\mu} \right] \ln \frac{R_3}{R_4} + \frac{C}{4\mu} (R_4^2 - R_3^2) \quad R_3 - R_2 = \frac{2\tau_0}{c} \end{aligned}$$

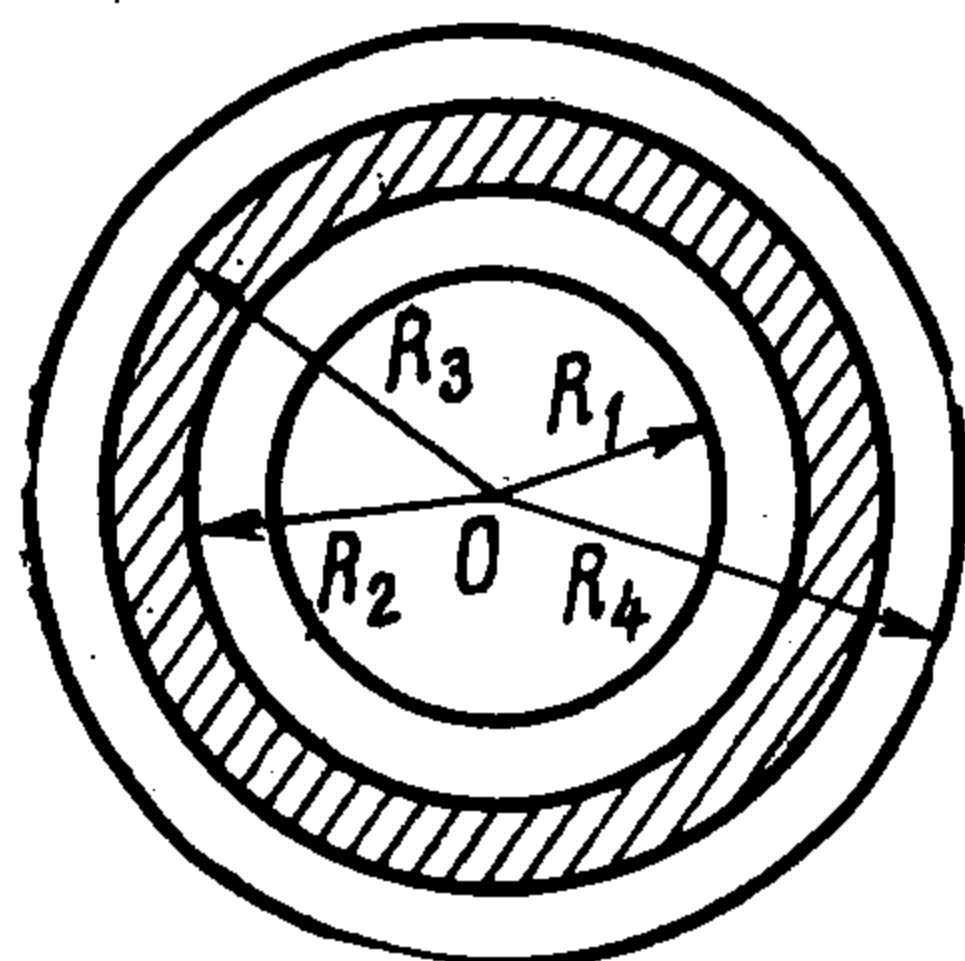
Условие 1° точно так же проверяется непосредственной подстановкой в уравнение Эйлера. Застойные зоны отсутствуют, и условие 2° теоремы 1.1 отпадает. Условие 3° критерия 1.1 нужно опять проверять на двух контурах: один контур — окружность радиуса τ_0/c , который вписывается с касанием в само ядро, а вторым контуром, состоящим из двух частей, является граница самого ядра. В обоих случаях условие 3° выполнено, это доказывает, что функция u_0 (2.2) минимизирует (1.1).

3°. Течение в некруговых трубах. [4]. Решение для трубы с некруговым поперечным сечением, полученное в работе [4], минимизирует функционал (1.1). Этот факт получается с использованием леммы 1.1 довольно просто, но требует громоздких вычислений, которые для краткости опущены. Приступим к рассмотрению застойных зон. В [4] построено точное решение u_0 в угловой области ($\alpha > 1/4\pi$). При этом в некоторой окрестности вершины угла, ограниченной сторонами OA , OB и кривой γ , функция u_0 обращается в нуль (рис. 7). Проведем окружность радиуса OR_1 с центром в точке O . Функция u_0 обращается в нуль на прямых OR_1 , OR_2 и принимает значения $\varphi(x, y) > 0$ на дуге окружности R_1MR_2 .



Фиг. 5

Покажем, что из всех функций, обращающихся в нуль на радиусах OR_1 , OR_2 и равных $\varphi(x, y)$ на дуге R_1MR_2 , функция u_0 дает наименьшее значение функционалу (1.1). Для того чтобы убедиться в этом, достаточно проверить условия 1°, 2° критерия. Ядер течения здесь нет, поэтому условие 3° отпадает. Условие 1° критерия легко проверяется непосредственной подстановкой u_0 в соответствующее дифференциальное уравнение. Проверим условие 2° критерия. Так как радиус кривизны R кривой γ равен $(\tau_0/c) \{1 + [4a(B + \cos^2 \varphi)]^{-1}\}$ (обозначения см. в [4]), то в области застойной зоны невозможно провести окружность, касающуюся границ застойной зоны.



Фиг. 6

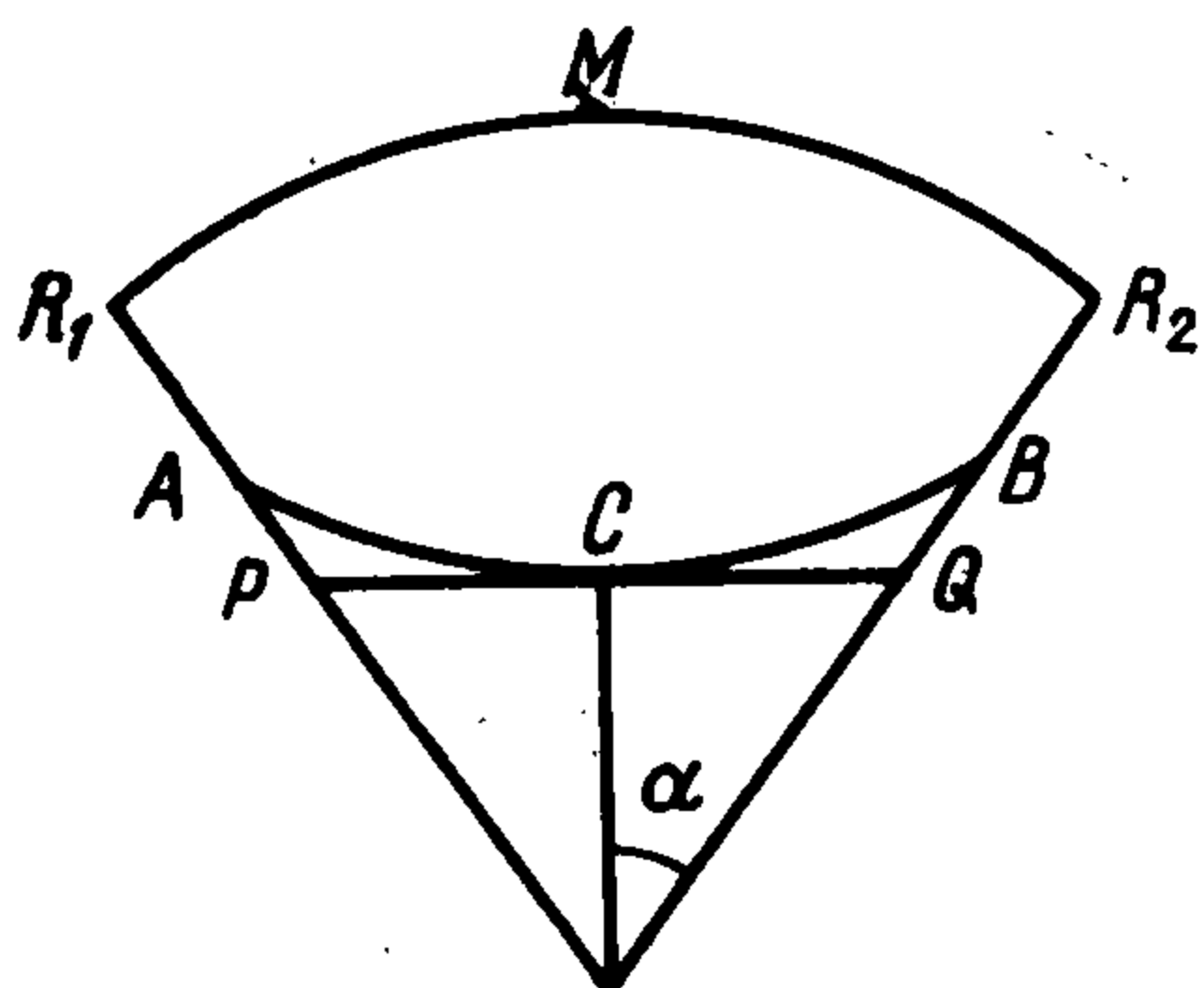
Используя утверждение леммы 1.2, находим, что условие 2° критерия нужно проверять лишь на двух контурах. Первый контур K_1 представляет собой границу застойной зоны, второй контур K_2 — вырожденный и представляет собой дугу γ , проходящую дважды. Заметим, что первый контур не является экстремальным для функционала $N(K)$ (см. лемму 1.2), так как для контура $K_3 = \gamma + APQB$ (Фиг. 7)

$$N(K_1) - N(K_3) = \rho \left(\frac{2\tau_0(1 - \sin \alpha)}{\cos \alpha} - c\rho \operatorname{ctg} \alpha \right), \quad \rho \leq \frac{\tau_0(1 - \sin \alpha)}{c \sin \alpha} \quad (2.3)$$

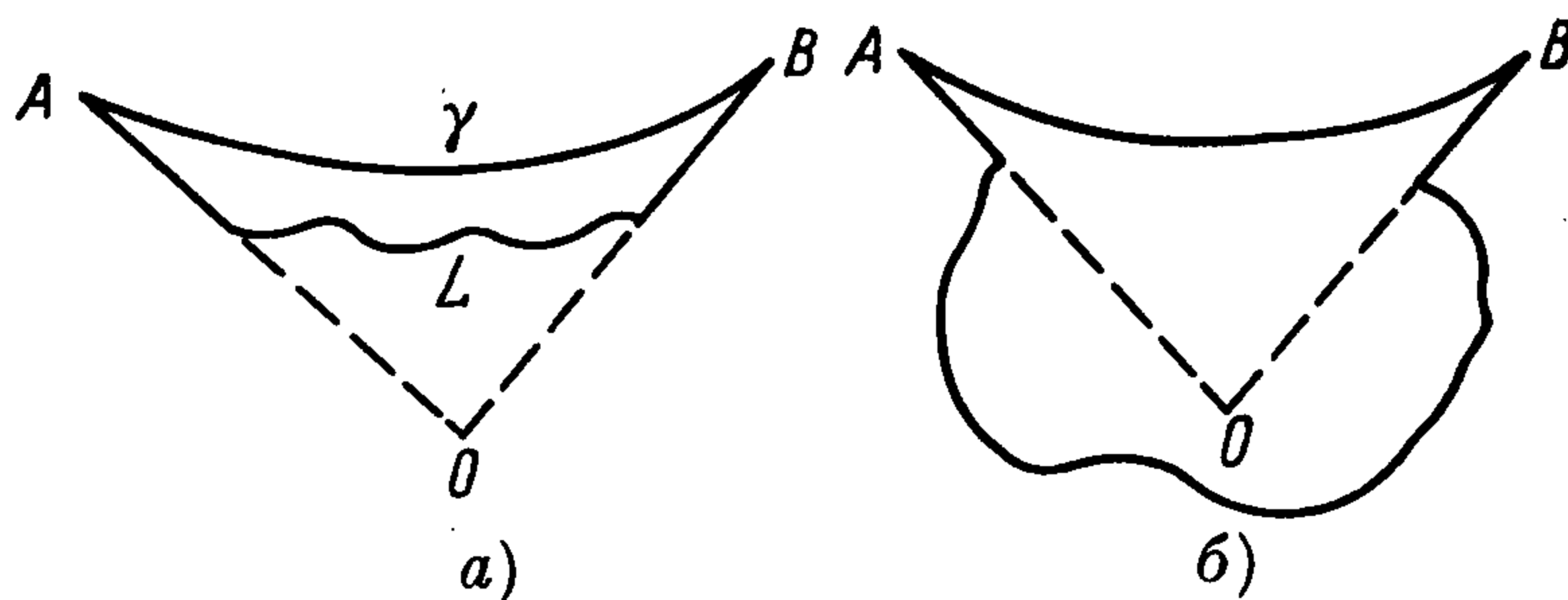
и $N(K_1) \geq N(K_3)$. Отсюда вытекает, что $\inf N(K)$ достигается на вырожденном контуре K_2 и $\inf N(K) = 0$. Условие 2° критерия проверено. Заметим, что решение u_0

в этом случае минимизирует функционал (1.1) не только в рассмотренном секторе, но и в области, изображенной на фиг. 8 а), если только кривая L не задевает границы γ .

Таким образом, внешнюю границу застойной зоны можно произвольным образом деформировать внутрь сектора, не задевая при этом границы γ , но решение u_0 в области течения будет оставаться неизменным. Можно рассмотреть и наращивание застойной зоны (фиг. 8, б), которое сохраняет решение u_0 неизменным в области течения. Граница L в этом случае не любая, а например, такая, что в области, ограниченной кривыми γ и L (рис. 8, б), нельзя провести окружность радиуса τ_0 / c , касающуюся



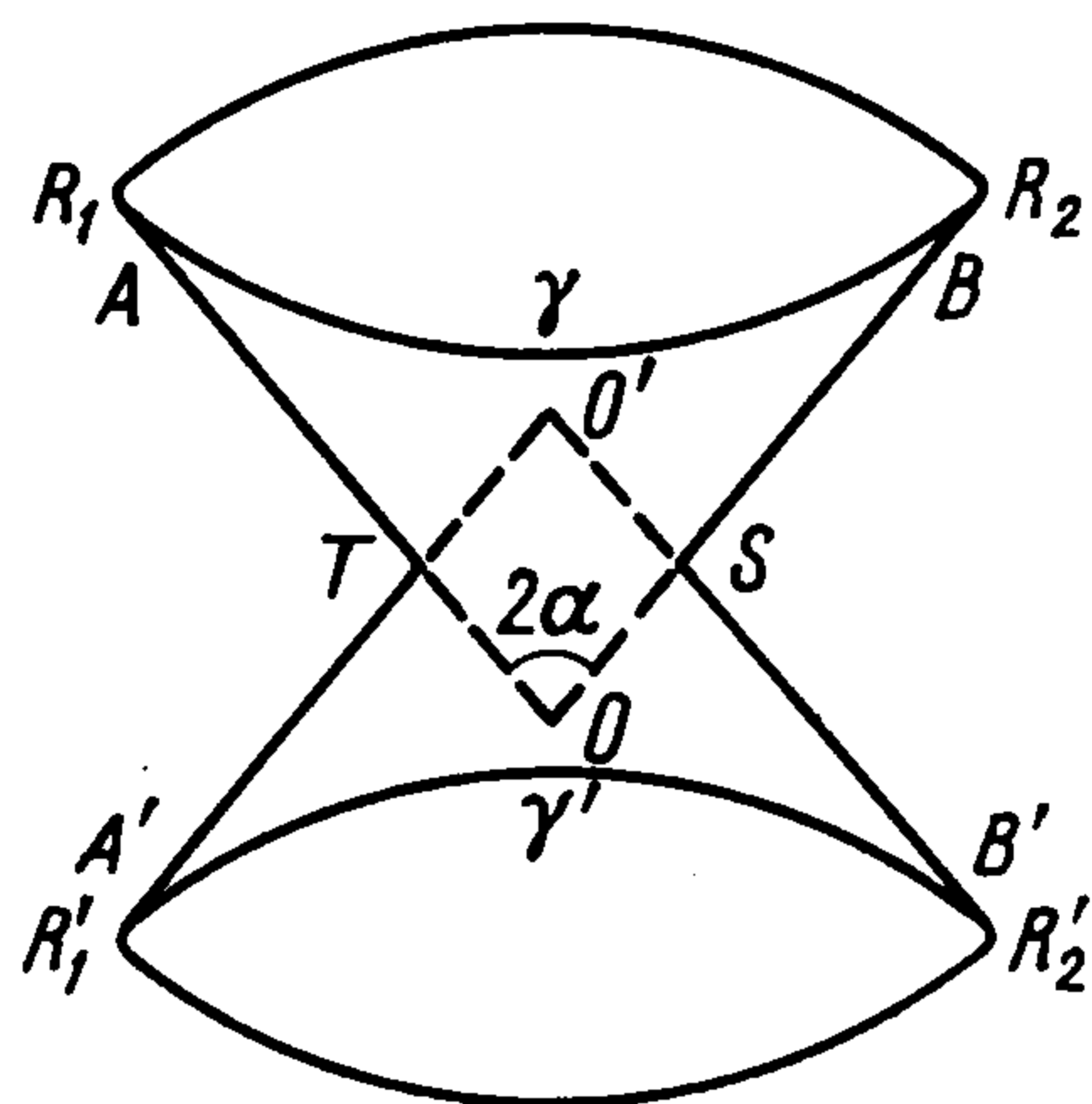
Фиг. 7



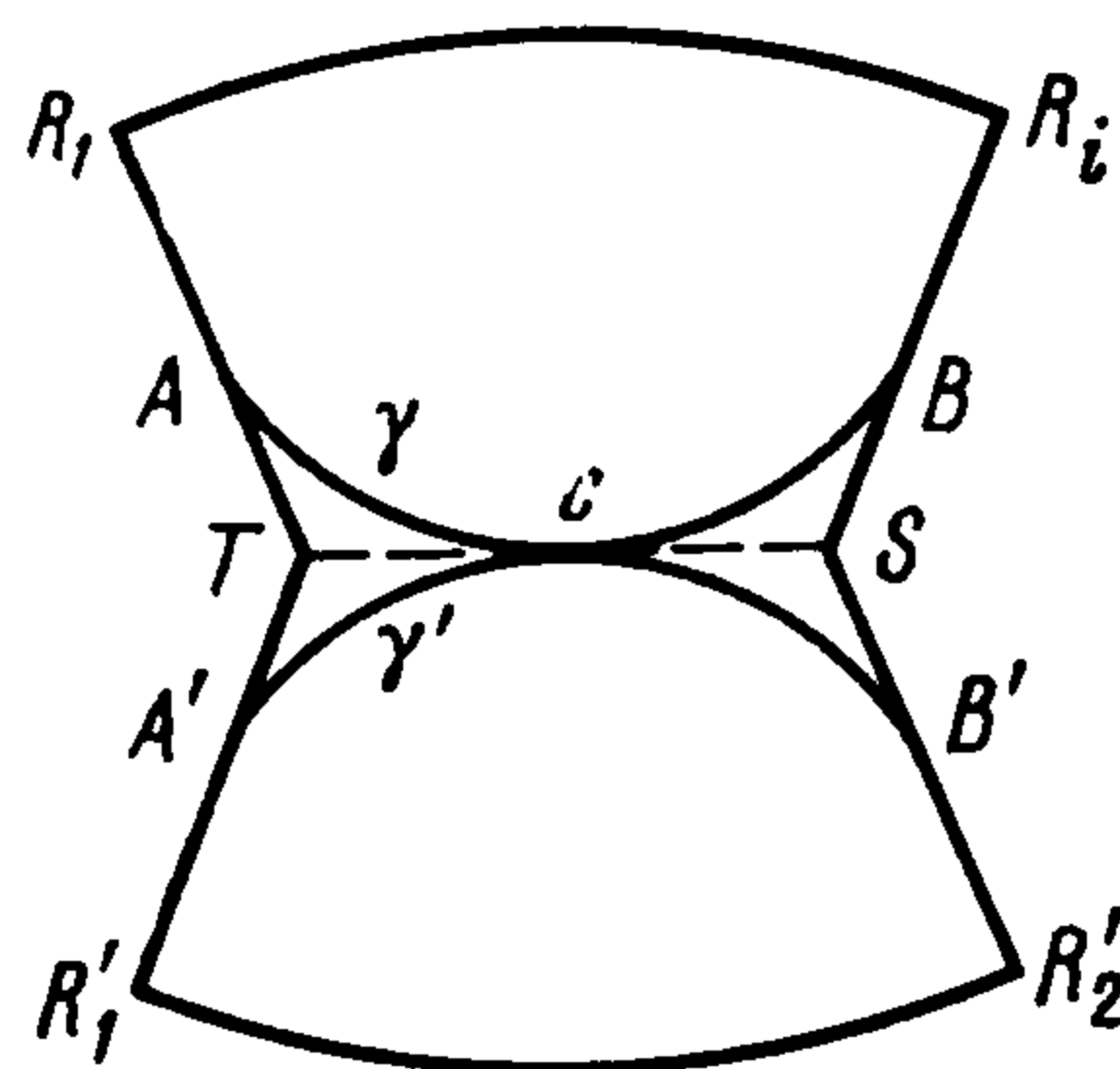
Фиг. 8

щуюся границы. При таком выборе L условие 2° критерия с использованием леммы 1.2 проверяется очевидным образом. Это означает, что область между γ и L (фиг. 8, б) — застойная зона течения.

Найденное в угловой области решение позволяет найти точное решение u_0 в области, изображенной на фиг. 9. Решение u_0 обращается в нуль на отрезках R_1T , $R_1'T$, R_2S , $R_2'S$ и в функцию $\varphi(x, y)$ на дугах окружности R_1R_2 , $R_1'R_2'$. Изображенная на фиг. 9 область получена надвиганием секторов (фиг. 7) одного на другой. Следует отметить, что это наложение секторов не должно быть очень большим, если требуется



Фиг. 9



Фиг. 10

сохранить неизменной область течения. Например, если сектора наложить так, что кривые γ в верхнем и в нижнем секторах касаются (фиг. 10), то в этом случае изменится распределение в области течения, так как область K , ограниченная ломаной ATA' и двумя кусками (AC, AC') кривой γ , не удовлетворяет условию 2° критерия

$$\tau_0 \operatorname{mes}(ATA') - \tau_0 \operatorname{mes}(ACA') - c \operatorname{mes} K < 0$$

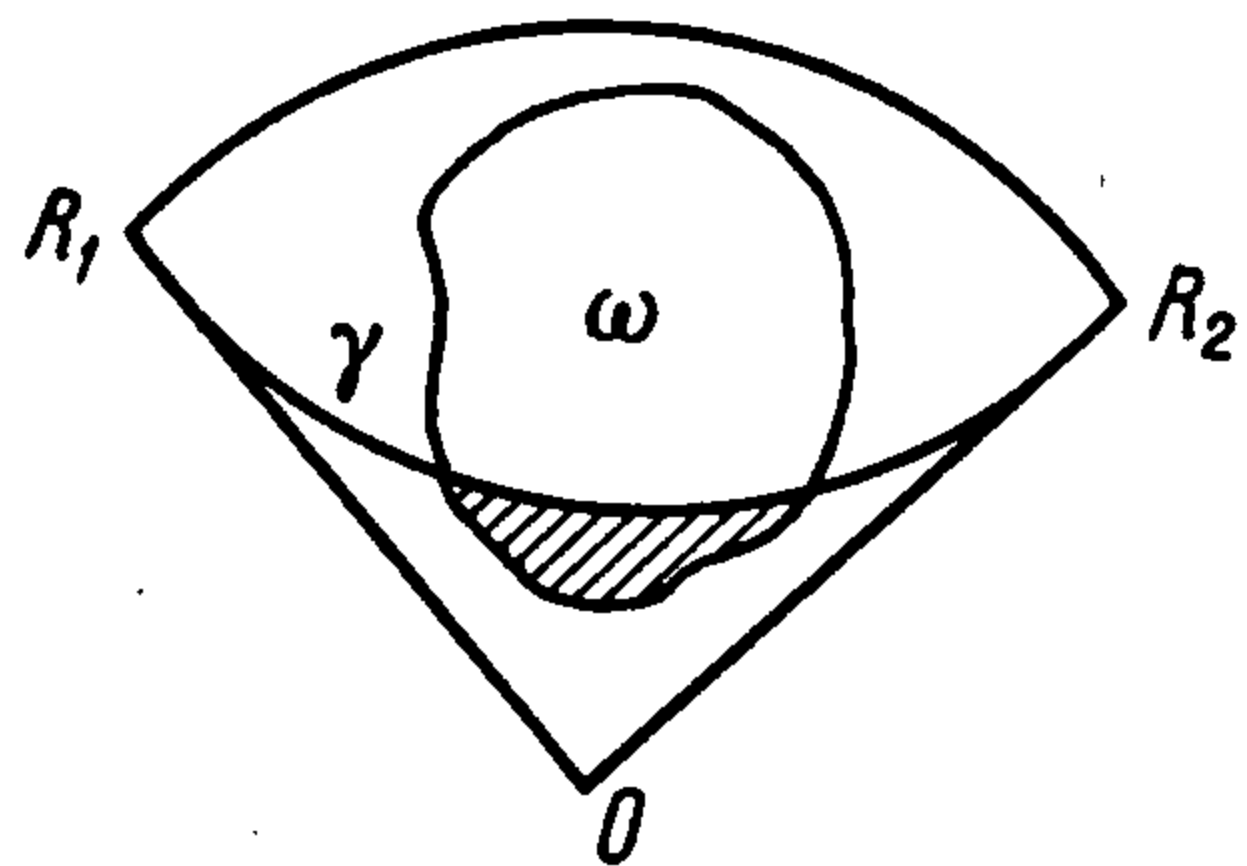
Обозначим величину OT на фиг. 10 через λ . Тогда из леммы 1.2 и соотношения (2.3) следует, что область течения будет оставаться неизменной, если

$$2\rho\tau_0 \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} - c\rho^2 \operatorname{tg} \alpha - 2\lambda\tau_0 + \lambda^2 c \sin \alpha > 0, \quad 0 < \lambda < \lambda_1$$

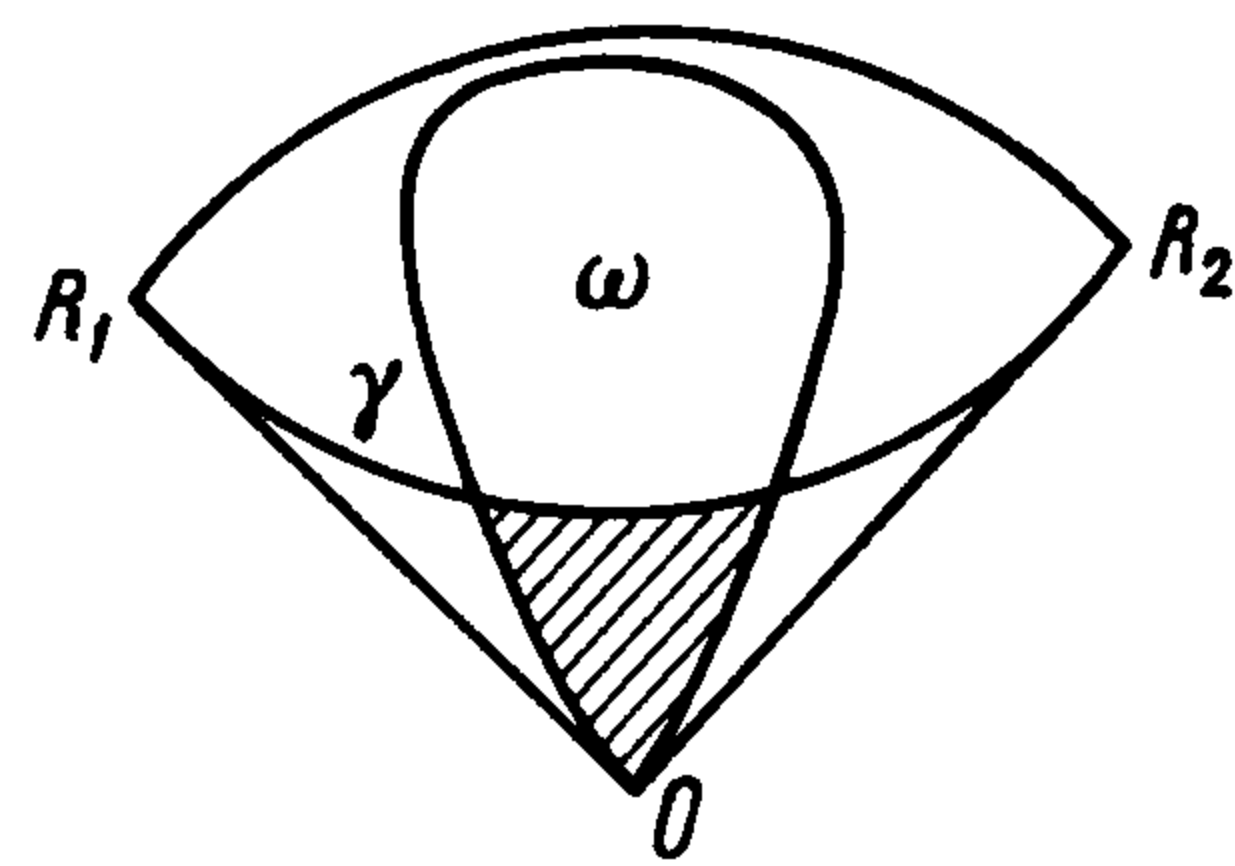
В дальнейшем рассматриваются лишь такие наложения секторов, при которых застойная зона заполняет область между кривыми γ в верхнем и нижнем секторах (фиг. 10). Покажем теперь, что при стационарном течении вязко-пластической среды в цилиндрических трубах с произвольным поперечным сечением могут существовать застойные зоны, т. е. области, примыкающие к стенкам трубы, скорость в которых равна нулю. Этот факт будет вытекать из принципа мажорации, изложенного

в [1]. Пусть ω_1 и ω_2 — две плоские области и область ω_1 — часть области ω_2 . Пусть u_1 и u_2 — функции, минимизирующие функционал (1.1) в области ω_1 и ω_2 соответственно. Тогда $0 \leq u_1 \leq u_2$ в ω_1 . Предположим, что ограниченная область ω расположена внутри тупого угла. Рассмотрим сектор OR_1R_2 достаточно большого радиуса так, что ω находится внутри сектора (фиг. 11).

Рассмотрим функцию u_0 для угла, построенную в [4]. Из принципа мажорации следует, что $u \leq u_0$, где u — функция, минимизирующая функционал (1.1) в ω и обращающаяся в нуль на границе Γ области ω . Но так как u_0 равно нулю ниже кривой γ (фиг. 11), если кривая γ пересекает область ω , то и u обращается в нуль в ω всюду

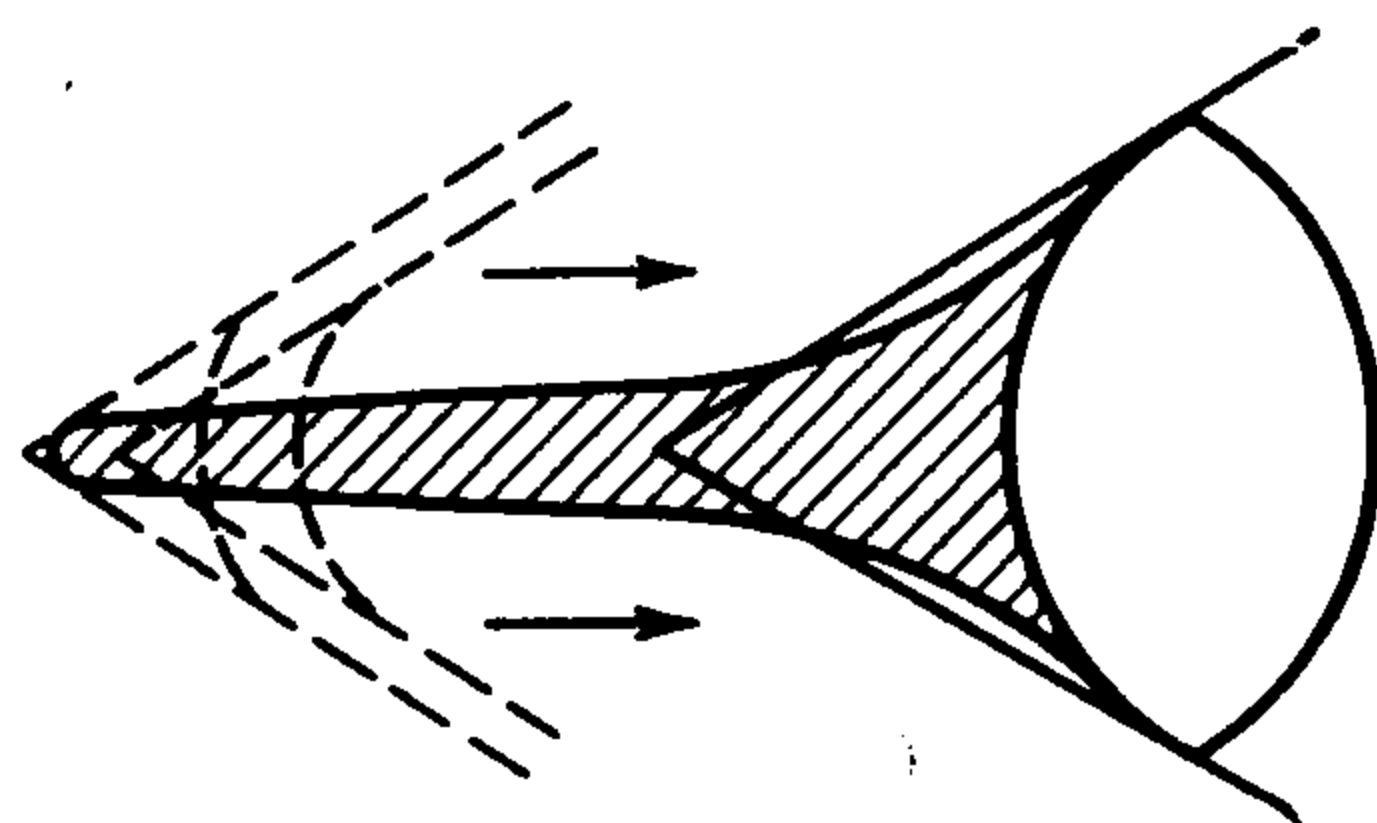


Фиг. 11

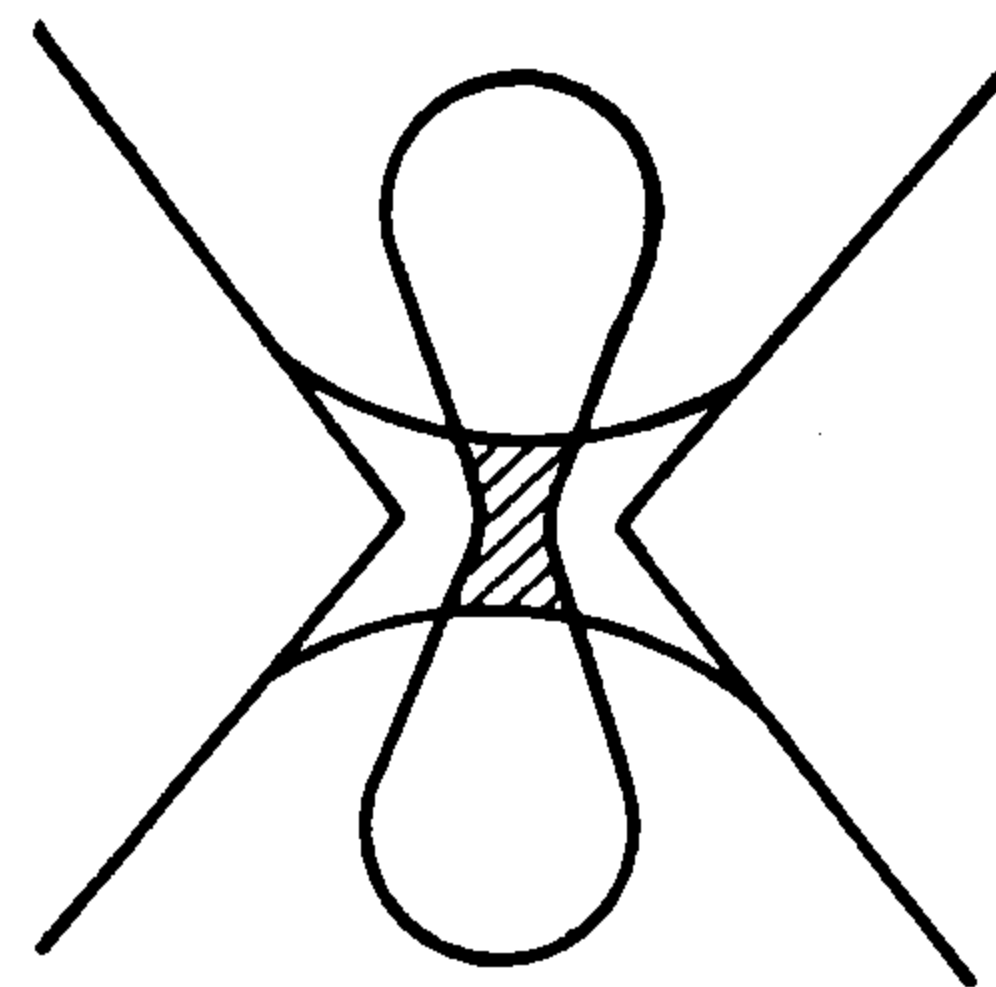


Фиг. 12

ниже кривой γ . Итак, в этом случае в области ω существует застойная зона, заполняющая, по крайней мере, область, заштрихованную на фиг. 11. Из приведенных рассуждений вытекает, что если ω имеет угловую точку и может быть расположена в тупом угле с вершиной в угловой точке ω (например ω — выпукла), то в области ω существует застойная зона (фиг. 12). После того как установлено существование застойной зоны в области ω , естественно попытаться найти по возможности наибольшую подобласть области ω , входящую в застойную зону. В ряде случаев это может быть достигнуто перемещениями сектора, так что его вершина перемещается по за-



Фиг. 13



Фиг. 14

стойной зоне области ω . Это движение сектора по застойной зоне изображено на фиг. 13.

Рассмотрим еще один интересный случай застойных зон, имеющий характер перемычек, разделяющих две или несколько областей течения (фиг. 14). Существование таких застойных зон следует из построенного точного решения в области $R_1TR_1'R_2'SR_2$, изображенной на фиг. 9, и принципа мажорации. Дополнительное исследование размеров застойной зоны может быть проведено изложенным выше способом. Отметим в заключение простое достаточное условие отсутствия застойной зоны в окрестности граничной точки. Если точки границы можно коснуться кругом радиуса $2\tau_0/c$, лежащим целиком в области ω , то в окрестности этой точки отсутствует застойная зона. Это достаточное условие является тривиальным следствием принципа мажорации и точного решения рассмотренного в 1° § 2.

Приложение. Предварительно установим некоторые вспомогательные утверждения.

Определение. Функция v_0 , удовлетворяющая (1.2), дает слабый минимум функционалу (1.1), если для любой гладкой функции h , $h|_{\Gamma} = 0$, существует число λ_0 такое, что при всех λ , $|\lambda| \leq \lambda_0$

$$J(v_0 + \lambda h) \geq J(v_0) \tag{A.1}$$

Лемма А.1. Если v_0 дает слабый минимум функционалу (1.1), то $v_0 = u_0$, где u_0 — функция, дающая абсолютный минимум функционалу (1.1).

Доказательство. В силу выпуклости функционала (1.1) имеем неравенство

$$J(v_0 + \lambda(v_0 - u_0)) \leq J(v_0) + \lambda[J(u_0) - J(v_0)], \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (\text{A.2})$$

Возьмем функцию h гладкую, $h|_{\Gamma} = 0$ и такую, что

$$\int_{\omega} \{|\nabla(h - (v_0 - u_0))|^2 + |h - (v_0 - u_0)|^2\} d\omega < \delta \quad (\text{A.3})$$

Тогда

$$\begin{aligned} |J(v_0) - J(v_0 + \lambda(h - (v_0 - u_0)))| = & \left| \int_{\omega} \{\lambda\mu \nabla(h - (v_0 - u_0)) \nabla v_0 + \right. \\ & \left. + \lambda^2 \frac{\mu}{2} |\nabla(h - (v_0 - u_0))|^2 + \tau_0 |\nabla v_0| - \tau_0 |\nabla(v_0 + \lambda(h - (v_0 - u_0)))| - \right. \\ & \left. - c\lambda(h - (v_0 - u_0))\} d\omega \right| \end{aligned}$$

Так как

$$\left| \int_{\omega} \{|\nabla v_0| - |\nabla(v_0 + \lambda(h - (v_0 - u_0)))|\} d\omega \right| \leq |\lambda| \int_{\omega} |\nabla(h - (v_0 - u_0))| d\omega$$

то из (A.3) следует, что

$$|J(v_0) - J(v_0 + \lambda(h - (v_0 - u_0)))| \leq |\lambda| \delta K \quad (\text{A.4})$$

где K не зависит ни от λ , ни от δ . Далее, из (A.2) имеем

$$\begin{aligned} J(v_0) \geq \lambda[J(v_0) - J(u_0)] + J(v_0 + \lambda(v_0 - u_0)) & \geq \lambda[J(v_0) - J(u_0)] + \\ + 2J(v_0 + \frac{1}{2}\lambda h) - J(v_0 + \lambda(h - (v_0 - u_0))) & \geq \lambda[J(v_0) - J(u_0)] + \\ + 2J(v_0 + \frac{1}{2}\lambda h) - J(v_0) - |J(v_0) - J(v_0 + \lambda(h - (v_0 - u_0)))| & \geq \\ \geq \lambda[J(v_0) + J(u_0)] + 2J(v_0 + \frac{1}{2}\lambda h) - J(v_0) - \lambda K \delta \end{aligned}$$

Следовательно,

$$J(v_0) \geq (\frac{1}{2}\lambda)[J(v_0) - J(u_0)] + J(v_0 + \frac{1}{2}\lambda h) - \frac{1}{2}\lambda K \delta$$

Если $J(v_0) > J(u_0)$, то δ можно выбрать настолько малым, что будем иметь $J(v_0) - J(u_0) > 2K\delta$, тогда при всех λ ($0 \leq \lambda \leq 1$)

$$J(v_0) \geq J(v_0 + \frac{1}{2}\lambda h) \quad (\text{A.5})$$

Неравенство (A.5) противоречит (A.1), следовательно, $J(v_0) = J(u_0)$. Из теоремы единственности [1] следует, что $v_0 = u_0$. Лемма доказана.

Лемма А2. Если функционал (1.1) имеет критическую точку v_0 , то $v_0 = u_0$, где u_0 — минимизирующая функционал (1.1) функция.

Доказательство. Пусть v_0 — критическая точка, тогда

$$\lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{J(v_0 + \lambda(v_0 - u_0)) - J(v_0)}{\lambda} = 0 \quad (\text{A.6})$$

Но $J(v_0 + \lambda(v_0 - u_0)) = J(\lambda u_0 + (1 - \lambda)v_0) \leq \lambda J(u_0) + (1 - \lambda)J(v_0)$, т. е.

$$J(v_0 + \lambda(v_0 - u_0)) - J(v_0) \leq \lambda[J(u_0) - J(v_0)] < 0$$

Следовательно,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{J(v_0 + \lambda(u_0 - v_0)) - J(v_0)}{\lambda} \leq J(u_0) - J(v_0) < 0$$

Последнее неравенство противоречит (1.6), если $u_0 \neq v_0$. Лемма А2 доказана.

*Лемма А3.*¹ Для того чтобы неравенство

$$\tau_0 \int_{\omega} |\nabla h| d\omega + \tau_0 \int_{\Gamma} h ds \geq c \int_{\omega} h d\omega \quad (\text{A.7})$$

¹ Используемые в доказательстве леммы и в дальнейших рассмотрениях обозначения $A \setminus B$, $A \cup B$, $U_p A_p$ означают [7], как обычно, соответственно, разность множеств A и B , объединение множеств A и B , объединение семейства множеств A_p .

имело место при любых гладких $h(x, y)$, необходимо и достаточно:

$$1^\circ \tau_0 \text{mes } \Gamma = c \text{mes } \omega, \quad 2^\circ \tau_0 \text{mes } \Gamma' \geq c \text{mes } \omega'$$

где ω' — произвольная подобласть области ω , Γ' — граница ω' .

Доказательство. Необходимость. Условие 1° следует из (A.7), если положить $h(x, y) = H$, где H — постоянное число. Рассмотрим произвольную подобласть ω' области ω с границей Γ' . Пусть Γ' имеет конечную кривизну во всех точках. Тогда в некоторой ее окрестности $O_j(\Gamma')$ можно ввести криволинейную систему координат, считая одной переменной — s — длину дуги вдоль другой n — длину отрезка нормали к Γ' . Границей $O_j(\Gamma')$ являются линии $n_j(s) = \pm \alpha_j$. Предположим, что $\alpha_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$ и что Γ' погружена в ω вместе с $O_j(\Gamma')$, начиная с некоторого j . Рассмотрим в ω последовательность функций v_j , равных единице в $\omega' \setminus O_j(\Gamma')$ и нулю в $\omega \setminus (\omega' \cup O_j(\Gamma'))$. В $O_j(\Gamma')$ функция v_j является монотонной функцией переменного n . Тогда

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\omega} |\nabla v_j| d\omega = \text{mes } \Gamma', \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{\omega} v_j d\omega = \text{mes } \omega' \quad (\text{A.8})$$

Из (A.7), (A.8) следует условие 2° леммы. Легко видеть, что условия конечной кривизны и погружаемости являются несущественными. Необходимость $1^\circ, 2^\circ$ доказана.

Достаточность. Неравенство (A.7) достаточно установить для произвольных многочленов. Пусть $Q(x, y)$ — полином; тогда он имеет лишь конечное число линий уровня, проходящих через особые точки, где $|\nabla Q| = 0$. Линии уровня Q , проходящие через особые точки, будем называть *особыми*, остальные линии уровня — *неособыми*.

Рассмотрим неособую линию уровня L_ρ , значение на которой равно ρ ($Q(L_\rho) = \rho$). В некоторой окрестности L_ρ можно ввести криволинейную систему координат s, n указанным выше образом. В этой окрестности возьмем линию уровня $L_{\rho+\Delta\rho}$, уравнение которой $n = n(s) > 0$, причем предположим, что при фиксированном s величина $Q(n, s)$ — неубывающая функция n при $0 \leq n \leq n(s)$.

Множество точек из рассматриваемой окрестности, принадлежащих ω , и таких, что для них $0 \leq n \leq n(s)$, обозначим $\omega_{\rho, \rho+\Delta\rho}$. Легко видеть, что область ω с точностью до множества сколь угодно малой меры расслаивается на подобласти типа $\omega_{\rho, \rho+\Delta\rho}$, т. е.

$$\omega_\varepsilon = \bigcup_{\rho} \omega_{\rho, \rho+\Delta\rho} \text{ и } \text{mes} [\omega \setminus \omega_\varepsilon] < \varepsilon$$

причем $\varepsilon \rightarrow 0$ при $n(s) \rightarrow 0$. Через K_ρ обозначим замкнутый контур, совпадающий с L_ρ , если L_ρ — овал, лежащий в ω и $K_\rho = L_\rho + \gamma_\rho$, если L_ρ концами выходит на границу Γ области ω . Здесь γ_ρ — часть границы Γ , соединяющая концы L_ρ , причем $Q(\gamma_\rho) \geq \rho$. Обозначим через ω_ρ подобласть ω , ограниченную контуром K_ρ . Так как

$$\tau_0 \text{mes } K_\rho \geq c \text{mes } \omega_\rho$$

то

$$\tau_0 [\text{mes } L_\rho + \text{mes } \gamma_\rho] [Q(L_{\rho+\Delta\rho}) - Q(L_\rho)] \geq c \text{mes } \omega_\rho [Q(L_{\rho+\Delta\rho}) - Q(L_\rho)] \quad (\text{A.9})$$

Заметим, что

$$\tau_0 \text{mes } L_\rho [Q(L_{\rho+\Delta\rho}) - Q(L_\rho)] = \tau_0 \int_{\omega_{\rho, \rho+\Delta\rho}} \frac{\partial Q}{\partial n} dn ds + O(n(s)) n(s)$$

Суммируя (A.9) по ρ , получим

$$\sum_{\rho} \text{mes } \omega_\rho [Q(L_{\rho+\Delta\rho}) - Q(L_\rho)] = \int_{\omega} \{Q(x, y) - \inf_{\omega} Q(x, y)\} d\omega + O(n(s))$$

$$\sum_{\rho} \text{mes } \gamma_\rho [Q(L_{\rho+\Delta\rho}) - Q(L_\rho)] = \int_{\Gamma} \{Q(x, y) - \inf_{\Gamma} Q(x, y)\} ds + O(n(s))$$

$$\sum_{\rho} \text{mes } L_\rho [Q(L_{\rho+\Delta\rho}) - Q(L_\rho)] \leq \int_{\omega} |\nabla Q| d\omega + O(n(s))$$

Следовательно,

$$\tau_0 \int_{\omega} |\nabla Q| d\omega + \tau_0 \int_{\Gamma} Q ds \geq c \int_{\omega} Q d\omega + \tau_0 \inf_{\Gamma} Q \text{mes } \Gamma - c \inf_{\omega} Q \text{mes } \omega$$

Из условия 1° леммы

$$\tau_0 \inf_{\Gamma} Q \text{mes } \Gamma - c \inf_{\omega} Q \text{mes } \omega \geq \inf_{\omega} Q [\tau_0 \text{mes } \Gamma - c \text{mes } \omega] = 0$$

Таким образом, лемма А.3 доказана.

Пусть область ω ограничена контуром R и $R = \Gamma + \gamma$, где γ — некоторые гладкие кривые, состоящие, вообще говоря, из конечного числа связных компонент.

Лемма А.4. Для того чтобы было выполнено неравенство

$$\tau_0 \int_{\omega} |\nabla h| d\omega - \tau_0 \int_{\gamma} h ds \geq c \int_{\omega} h d\omega \quad (\text{A.10})$$

для всех гладких h , обращающихся в нуль на Γ , необходимо и достаточно выполнение условия: для любого замкнутого контура $R' = \Gamma' + \gamma'$, лежащего в ω , где γ' — часть γ , имеет место неравенство

$$\tau_0 \text{mes } \Gamma' - \tau_0 \text{mes } \gamma' \geq c \text{mes } \omega' \quad (\text{A.11})$$

где ω' — подобласть ω , ограниченная контуром R' .

Доказательство. Необходимость. Аналогично лемме А.3 построим ступенчатую функцию, являющуюся пределом v_j , равную 1 в области ω' и равную нулю вне контура R' . Подставив эту функцию в (А.10), получим условие (А.11). Покажем это. Пусть Γ' — гладкая кривая; введем в ее окрестности $O_j(\Gamma')$ криволинейные координаты (s, n) . Границей $O_j(\Gamma')$ являются линии $h = \pm \alpha_j$ и $\alpha_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Рассмотрим последовательность функций $v_j(x, y)$, равных единице в $\omega' \setminus O_j(\Gamma')$ и нулю в $\omega \setminus [\omega' \cup O_j(\Gamma')]$. В $O_j(\Gamma')$ функции v_j — монотонные функции переменного n . Тогда

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\omega} |\nabla v_j| d\omega = \text{mes } \Gamma', \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\gamma} v_j ds = \text{mes } \gamma', \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\omega} v_j d\omega = \text{mes } \omega' \quad (\text{A.12})$$

Сравнивая (А.12) с (А.10), получаем (А.11). Необходимость доказана.

Достаточность. Заметим [5], что неравенство (А.10) достаточно установить на функциях¹ из $W_p^1(\omega)$ ($p > 2$), положительных в ω и обращающихся в нуль на Γ . Аппроксимируем такую функцию многочленом $Q_n^1(x, y)$ в метрике $W_p^1(\omega)$. Из теорем вложения [5] следует, что Q_n^1 сходятся к h равномерно, т. е.

$$|Q_n^1 - h| < \frac{1}{n}, \quad \int_{\omega} |\nabla(Q_n^1 - h)| d\omega < \frac{1}{n} \quad (\text{A.13})$$

Рассмотрим многочлен $Q_n = Q_n^1 - 1/n$. Ясно, что $Q_n \leq 0$ на Γ .

От многочлена Q_n перейдем к функции Q_n^*

$$Q_n^* = 0 \quad \text{при } Q_n \leq 0, \quad Q_n^* = Q_n \quad \text{при } Q_n > 0$$

Покажем, что для Q_n^* имеют место оценки, аналогичные (А.13). Обозначим множество, где $Q_n^* = 0$, через S_n . Тогда $|Q_n^* - h| < 2/n$ в $\omega \setminus S_n$. Так как $|h| < 2/n$, в области S_n , то $|Q_n^* - h| < 2/n$ в S_n . Покажем², что $\text{mes } \{S_n \cap \text{supp } h\} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Рассмотрим множество $\Lambda_n = \{(x, y) | |h| < 2/n\} \cap \text{supp } h$. Тогда $\lim \Lambda_n = \Phi$, где Φ — пустое множество и $\Lambda_n \supseteq \Lambda_{n+1}$. Следовательно, $\text{mes } \Lambda_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Но $\Lambda_n \supset S_n \cap \text{supp } h$. Таким образом, $\text{mes } \{S_n \cap \text{supp } h\} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Итак, из (А.13) немедленно следует, что

$$|h - Q_n^*| \rightarrow 0, \quad \int_{\omega} |\nabla(h - Q_n^*)| d\omega \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad (\text{A.14})$$

¹ Символ $W_p^1(\omega)$ означает множество функций в области ω , имеющих первые производные интегрируемые со степенью p .

² Через $\text{supp } h$, как обычно, обозначается носитель функции h , т. е. множество точек плоскости, где $h \neq 0$.

Используя соотношение (A.11), установим неравенство (A.10) для Q_n^* . Рассмотрим неособую линию многочлена Q_n в области ω / S_n .

Как обычно, введем криволинейные координаты в окрестности этой линии уровня. Аналогично лемме А.3, расслоим область $\omega \setminus S_n$ с точностью до множества меры ε на подобласти вида $\omega_{\rho, \rho+\Delta\rho}$. Рассмотрим контур K_ρ , охватывающий область ω_ρ , расположенную в $\omega \setminus S_n$. Тогда

$$\tau_0 \text{mes } L_\rho - \tau_0 \text{mes } \gamma_\rho \geq c \text{mes } \omega_\rho$$

где γ_ρ — часть контура K_ρ , совпадающая с частью γ . Далее, повторяя действия, выполненные в лемме А.3, и замечая, что $\inf Q_n = 0$ на $\omega \setminus S_n$ и $\inf Q_n = 0$ на γ_n , приходим к неравенству

$$\tau_0 \int_{\omega \setminus S_n} |\nabla Q_n| d\omega - \tau_0 \int_{\gamma_n} Q_n ds \geq c \int_{\omega \setminus S_n} Q_n d\omega \quad (\text{A.15})$$

где γ_n — часть γ , являющаяся куском границы $\omega \setminus S_n$. Так как Q_n^* совпадает с Q_n в $\omega \setminus S_n$ и равна нулю на S_n , то из неравенства (A.15) следует, что

$$\tau_0 \int_{\omega} |\nabla Q_n^*| d\omega - \tau_0 \int_{\gamma} Q_n^* ds \geq c \int_{\omega} Q_n^* d\omega \quad (\text{A.16})$$

Из неравенства (A.16) и соотношений (A.14) следует (A.10).

Доказательство теоремы 1.1. Рассмотрим приращение функционала (1.1). Тогда

$$\begin{aligned} \Delta J &= J(u_0 + \lambda h) - J(u_0) = \\ &= \int_{\omega} \left\{ \lambda \mu \nabla u_0 \nabla h + \frac{\mu}{2} |\nabla h|^2 + \tau_0 |\nabla(u_0 + \lambda h)| - \tau_0 |\nabla u_0| - c\lambda h \right\} d\omega \end{aligned}$$

Обозначим через ω_λ область, где $|\nabla u_0| > \lambda^\alpha$, $\alpha < 1/2$. Запишем приращение ΔJ в виде

$$\begin{aligned} \Delta J &= \int_{\omega} \left\{ \lambda \mu \nabla u_0 \nabla h + \frac{\mu}{2} (\nabla h)^2 \right\} d\omega + \int_{\Omega} \tau_0 |\lambda| |\nabla h| d\omega + \\ &+ \int_{\omega_\lambda} \tau_0 \{ |\nabla(u_0 + \lambda h)| - |\nabla u_0| \} d\omega + \int_{\omega} \tau_0 \{ |\nabla(u_0 + \lambda h)| - |\nabla u_0| \} d\omega - \int_{\omega} c\lambda h d\omega \\ &\omega_0 = \omega \setminus (\omega_\lambda \cup \Omega) \end{aligned}$$

Замечая, что $\text{mes} \{ \omega \setminus (\omega_\lambda \cup \Omega) \} \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$ и что

$$\left| \int_{\omega} \{ |\nabla(u_0 + \lambda h)| - |\nabla u_0| \} d\omega \right| \leq |\lambda| \int_{\omega} |\nabla h| d\omega$$

получаем

$$\begin{aligned} \Delta J &= \int_{\omega} \{ \lambda \mu \nabla u_0 \nabla h - c\lambda h \} d\omega + \int_{\Omega} \tau_0 |\lambda| |\nabla h| d\omega + \\ &+ \int_{\omega_\lambda} \tau_0 \{ |\nabla(u_0 + \lambda h)| - |\nabla u_0| \} d\omega + o(\lambda) \quad (\text{A.17}) \end{aligned}$$

Преобразуя последний интеграл в (A.17)

$$\begin{aligned} \int_{\omega_\lambda} \{ |\nabla(u_0 + \lambda h)| - |\nabla u_0| \} d\omega &= \int_{\omega_\lambda} \frac{\nabla u_0 \nabla h}{|\nabla u_0|} d\omega + \\ &+ \int_{\omega_\lambda} \frac{\lambda^2 |\nabla h|^2}{|\nabla(u_0 + \lambda h)| + |\nabla u_0|} d\omega + \int_{\omega_\lambda} \frac{\nabla u_0 \nabla h \{ -\lambda^2 |\nabla h|^2 - 2\lambda \nabla u_0 \nabla h \}}{|\nabla u_0| \{ |\nabla(u_0 + \lambda h)| + |\nabla u_0| \}} d\omega \end{aligned}$$

Очевидно, получим

$$\int_{\omega_\lambda} \frac{\lambda^2 |\nabla h|^2}{|\nabla(u_0 + \lambda h)| + |\nabla u_0|} d\omega = o(\lambda)$$

$$\int_{\omega_\lambda} \frac{\nabla u_0 \nabla h \{-\lambda^2 |\nabla h|^2 - 2\lambda \nabla u_0 \nabla h\}}{|\nabla u_0| \{|\nabla(u_0 + \lambda h)| + |\nabla u_0|\}} d\omega = o(\lambda)$$

Далее

$$\int_{\omega_\lambda} \frac{\nabla u_0 \nabla h}{|\nabla u_0|} d\omega = - \int_{\omega_\lambda} \left[\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u_0}{|\nabla u_0|} \right) \right] h d\omega + \int_{S_\lambda} h \left(\frac{\nabla u_0}{|\nabla u_0|} \right) \Big|_n ds$$

где S_λ — контур, охватывающий ω_λ , $(\nabla u_0 / |\nabla u_0|)|_n$ — проекция вектора на направление внешней нормали к S_λ . Таким образом,

$$\Delta J = - \int_{\omega_\lambda} \left\{ \mu \Delta u_0 + \tau_0 \operatorname{div} \frac{\nabla u_0}{|\nabla u_0|} + c \right\} \lambda h d\omega - \int_{\Omega} c \lambda h d\omega +$$

$$+ \int_{\Omega} \tau_0 |\nabla \lambda h| d\omega + \int_{S_\lambda} \frac{\nabla u_0}{|\nabla u_0|} \Big|_n ds + o(\lambda)$$

Заметим, что если точка S_λ при $\lambda \rightarrow 0$ приближается к точке на границе a_i ядра течения A_i , то $(\nabla u_0 / |\nabla u_0|)|_n \rightarrow 1$; если же точка S_λ при $\lambda \rightarrow 0$ приближается к точке на границе b_i застойной зоны B_i , то $(\nabla u_0 / |\nabla u_0|)|_n \rightarrow -1$. Следовательно,

$$\int_{S_\lambda} \frac{h \nabla u_0}{|\nabla u_0|} \Big|_n ds - \left[\int_{\bigcup_1^s a_i} h ds - \int_{\bigcup_1^p b_i} h ds \right] \rightarrow 0 \quad \text{при } \lambda \rightarrow 0$$

Итак

$$\nabla J = - \int_{\omega_\lambda} \left\{ \mu \Delta u_0 + \operatorname{div} \frac{\nabla u_0}{|\nabla u_0|} + c \right\} \lambda h d\omega - \int_{\Omega} c \lambda h d\omega - \int_{\Omega} c \lambda h d\omega$$

$$\sum_{i=1}^s \left[\tau_0 \int_{A_i} |\nabla \lambda h| d\omega + \tau_0 \int_{a_i} \lambda h ds \right] + \sum_{i=1}^p \left[\tau_0 \int_{B_i} |\nabla \lambda h| d\omega + \int_{b_i} \lambda h ds \right] + o(\lambda) \quad (\text{A.18})$$

Докажем необходимость условий 1°, 2°, 3° критерия. Возьмем h , сосредоточенное в ω_λ ; тогда

$$\nabla J = - \int_{\omega_\lambda} \left\{ \mu \Delta u_0 + \operatorname{div} \frac{\nabla u_0}{|\nabla u_0|} + c \right\} \lambda h d\omega + o(\lambda) \geq 0 \quad (\text{A.19})$$

Из (A.19) следует

$$\mu \nabla u_0 + \operatorname{div} [\nabla u_0 / |\nabla u_0|] + c = 0 \quad \text{в } \omega_\lambda \quad (\text{A.20})$$

Так как λ в (A.20) произвольное, то необходимость 1° доказана. Следовательно,

$$\nabla J = \sum_1^s \left[\tau_0 \int_{A_i} |\nabla \lambda h| d\omega + \tau_0 \int_{a_i} \lambda h ds - c \int_{A_i} \lambda h d\omega \right] +$$

$$+ \sum_1^p \left[\tau_0 \int_{B_i} |\nabla \lambda h| d\omega - \tau_0 \int_{b_i} \lambda h ds - c \int_{B_i} \lambda h d\omega \right] + o(\lambda) \quad (\text{A.21})$$

Из (A.21) имеем

$$\tau_0 \int_{A_i} |\nabla \lambda h| d\omega + \tau_0 \int_{a_i} \lambda h ds - c \int_{A_i} \lambda h d\omega \geq 0 \quad (i = 1, \dots, s)$$

$$\tau_0 \int_{B_i} |\nabla \lambda h| d\omega - \tau_0 \int_{b_i} \lambda h ds - c \int_{B_i} \lambda h d\omega \geq 0 \quad (i = 1, \dots, p) \quad (\text{A.22})$$

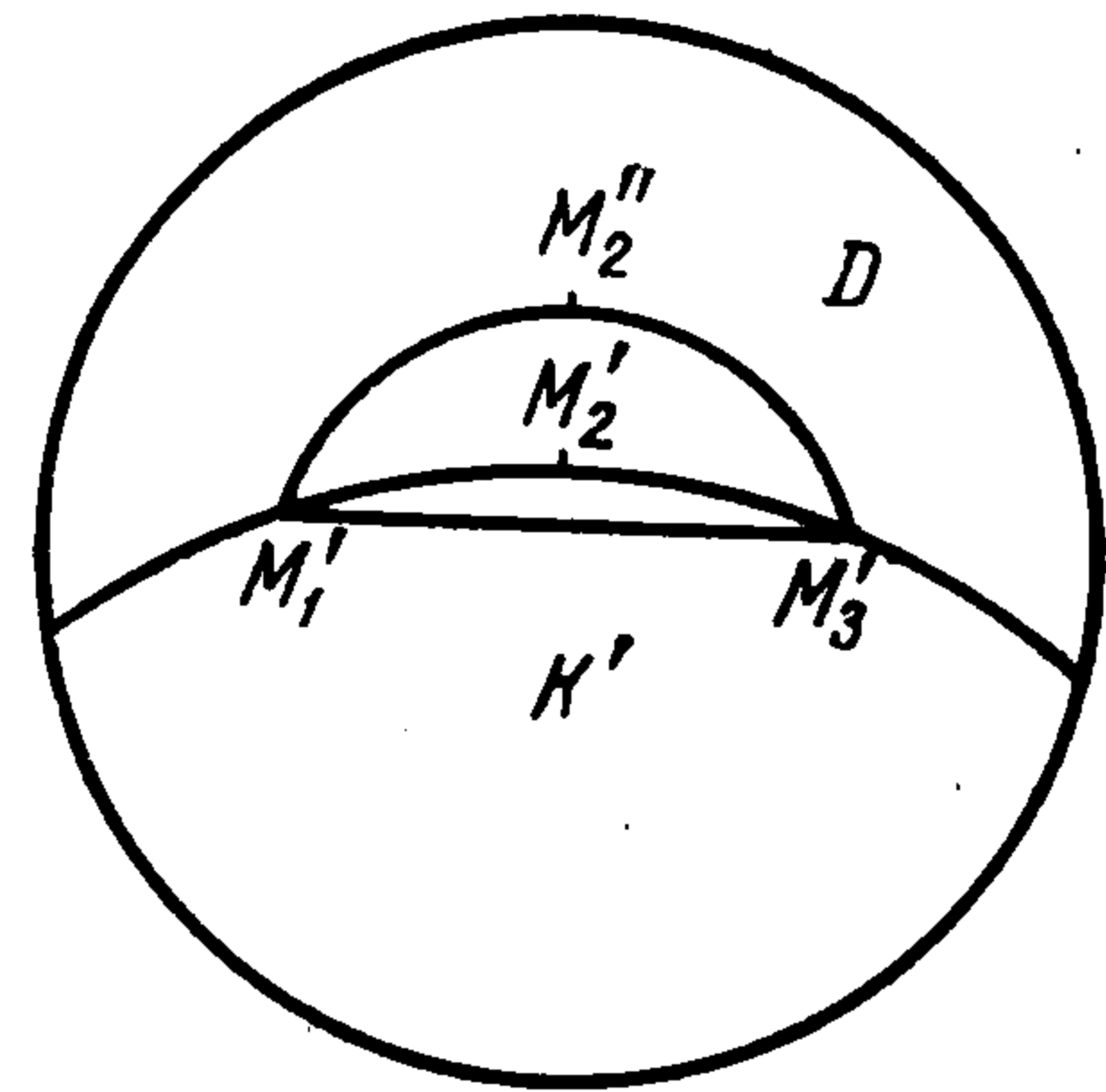
Леммы А.3, А.4 утверждают, что из неравенства (А.22) вытекают условия 2°, 3° критерия. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть условия 1°, 2°, 3° критерия выполнены. Тогда из леммы А.3, А.4 и представления приращения функционала (А.18) имеем

$$J(u_0 + \lambda h) - J(u_0) + o(\lambda) \geq 0$$

Отсюда следует, что u_0 — либо критическая точка функционала (1.1), либо сообщает ему слабый минимум. Из лемм А.1, А.2 следует, что u_0 в этих случаях дает абсолютный минимум функционалу (1.1). Критерий доказан.

Доказательство леммы 1.1. Функционал $M(K)$ ограничен снизу, так как $\inf M(K) \geq -\text{mes} D$. В силу компактности множества кривых с ограниченной длиной, существует контур K' , для которого $\inf M(K) = M(K')$. Очевидно, контур K' выпуклый во внутренних точках D . Рассмотрим достаточно близко расположенные три внутренние точки M_1', M_2', M_3' области D , лежащие на контуре K' (фиг. 15). Предположим далее, что дуга $M_1'M_2'M_3'$ контура K' состоит из внутренних точек D . Таким образом, отрезок $[M_1', M_3']$ содержится в области K'^* , ограниченной контуром K' . Обозначим через K_1' область, заключенную между отрезком $[M_1', M_3']$ и дугой $M_1'M_2'M_3'$. Рассмотрим также произвольную выпуклую дугу $M_1'M_2''M_3'$, расположенную в D . Обозначим через K_1'' подобласть D , заключенную между дугой $M_1'M_2''M_3'$ и отрезком $[M_1', M_3']$. Тогда легко видеть, что



Фиг. 15

$$\tau_0 \text{mes}(M_1'M_2''M_3') - c \text{mes} K_1'' \geq \tau_0 \text{mes}(M_1'M_2'M_3') - c \text{mes} K_1'$$

Таким образом, если ввести новую систему координат, направив ось Ox вдоль отрезка $[M_1', M_3']$, а ось Oy — перпендикулярно и поместив начало в точку M_1' , то дуга M_1', M_2', M_3' минимизирует интеграл

$$\int_0^{\chi} (\tau_0 \sqrt{1 + y'^2} - cy) dx \quad (\chi = \text{mes}[M_1'M_3'])$$

при условиях $y(0) = 0$; $y(\text{mes}[M_1', M_3']) = 0$. Легко проверить, что экстремалами функционала (А.23) является окружности радиуса τ_0/c . Утверждение о касании K' и d можно получить непосредственно, используя известную теорему об односторонних вариациях [6]. Лемма 1.1 доказана.

Поступила 27 XII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Мосолов П. П., Мясников В. П. Вариационные методы в теории течений вязко-пластической среды. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3, стр. 468—492.
2. В у с к и н г х а м Е. On plastic flow through capillary tubes. Proc. Amer. Soc. Test. Math., 1921, vol. 21, p. 1154.
3. В о л а р о в и ч М. П., Г у т к и н А. М. Течение пластично-вязкого тела между двумя параллельными плоскими стенками и в кольцевом пространстве между двумя коаксиальными трубками. Ж. техн. физ., 1946, т. 16, вып. 3.
4. Б ы к о в ц е в Г. И. Ч е р н ы ш е в А. Д. О вязко-пластическом течении в некруговых цилиндрах при наличии перепада давления. ПМТФ, 1964, № 4.
5. С о б о л е в С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск, Изд-во Сиб. Отд. АН СССР, 1962, 255 с.
6. Э л ь с г о л ь ц Л. Э. Вариационное исчисление, Изд. 2-е. М., Гостехиздат, 1958, 163 стр.
7. К о л м о г о р о в А. Н., Ф о м и н С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. Изд-во МГУ, 1954.