

О КОНВЕКТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЖИДКОСТИ В СВЯЗАННЫХ ВЕРТИКАЛЬНЫХ КАНАЛАХ

Г. З. Гершун, Е. М. Жуховицкий, Г. Ф. Шайдуров

(Пермь)

Конвективное движение жидкости, подогреваемой снизу, возникает, как известно, в результате кризиса равновесия при достижении градиентом температуры определенного критического значения. Наиболее полно была исследована устойчивость равновесия плоского горизонтального слоя жидкости (задача Релея; обвор см. в книге [1]). Г. А. Остроумов [2, 3] исследовал условия возникновения конвекции в вертикальном цилиндре кругового сечения. Позже были рассмотрены случаи вертикальных каналов других сечений [4-7] и полостей других форм [8-10]. В указанных работах имелись в виду одиночные вертикальные каналы и полости, окруженные теплопроводным массивом, либо с заданными тепловыми условиями на границах.

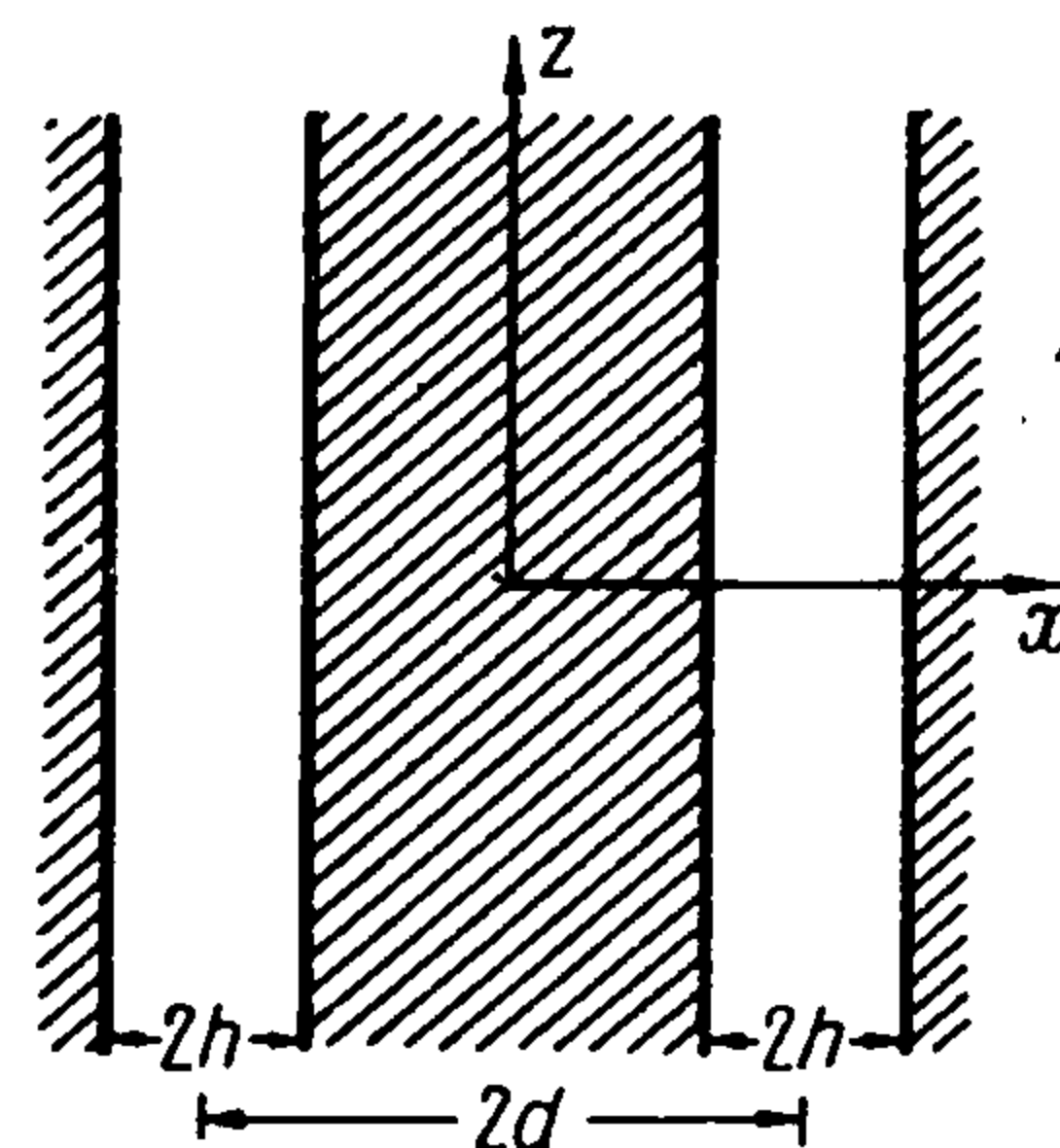
Значительный интерес представляет проблема конвективной неустойчивости жидкости в системе полостей, связанных тепловым взаимодействием через теплопроводный массив, в частности — в системе вертикальных каналов. Подобные задачи, по-видимому, до сих пор не рассматривались. В данной работе получено точное решение задачи об устойчивости равновесия в двух вертикальных параллельных плоских каналах, разделенных массивом. Приближенно решена также задача для двух вертикальных каналов кругового сечения в массиве. Найдены критические значения числа Релея, определяющие границу устойчивости — в зависимости от теплопроводностей жидкости и массива и расстояния между каналами.

§ 1. Плоские каналы. Два плоских вертикальных параллельных слоя жидкости (толщина каждого слоя $2h$, расстояние между центрами $2d$; ось z направлена вертикально вверх) находятся в однородном теплопроводном массиве (фиг. 1). В равновесии жидкость неподвижна и градиент температуры вертикален и постоянен

$$v_0 = 0, \quad \frac{dT_0}{dz} = -A \quad (1.1)$$

Рассмотрим плоские возмущения равновесия вида

$$v_x = v_y = 0, \quad v_z = v(x), \quad T = T(x), \quad \nabla p = 0 \quad (1.2)$$



Фиг. 1

Здесь v , T , p — возмущения скорости, температуры и давления. Нормальные возмущения зависят от времени по закону $\exp(-\sigma t)$, где σ — вещественный (при подогреве снизу) декремент [11]. На границе устойчивости $\sigma = 0$, т. е. нейтральные возмущения стационарны. Уравнения для нейтральных возмущений запишем в безразмерном виде (штрих

обозначает дифференцирование по x)

$$v'' + RT = 0, \quad T'' + v = 0, \quad T_m'' = 0 \quad \left(R = \frac{g\beta Ah^4}{\nu\chi} \right) \quad (1.3)$$

Здесь v , T — безразмерные возмущения скорости и температуры жидкости, T_m — возмущение температуры массива; R — число Релея; g — ускорение силы тяжести, β , ν , χ — коэффициенты теплового расширения, кинематической вязкости и температуропроводности жидкости. За единицы расстояния, скорости и температуры приняты величины h , χ/h , Ah .

На границах жидкость — массив скорость должна обращаться в нуль и должны быть выполнены условия непрерывности для температуры и теплового потока. Поскольку в массиве уравнение теплопроводности имеет вид $T_m'' = 0$, температура в массиве линейно зависит от координаты

Требование ограниченности возмущения температуры T_m'' при $x \rightarrow \pm \infty$ приводит к выводу о постоянстве температуры и, следовательно, — об отсутствии горизонтального теплового потока во внешних областях массива. В прослойке между каналами, напротив, горизонтальный тепловой поток может существовать, обуславливая тепловое взаимодействие между каналами. Итак, граничные условия к уравнениям (1.3) имеют вид:

$$\begin{aligned} v = 0, \quad T = T_m, \quad \lambda T' = T_m' & \quad \text{при } x = x_1 \\ v = 0, \quad T' = 0 & \quad \text{при } x = x_2 \\ \left(x_1 = \pm \frac{d-h}{h}, \quad x_2 = \pm \frac{d+h}{h} \right) & \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь $\lambda = \kappa / \kappa_m$; κ и κ_m теплопроводности жидкости и массива; x_1 и x_2 — внутренняя и внешняя границы правого (знак плюс) и левого (знак минус) каналов. Кроме того, при свободной конвекции в системе двух каналов должно выполняться условие замкнутости потока

$$\int_{x_2}^{x_1} v_- dx + \int_{x_1}^{x_2} v_+ dx = 0 \quad (1.5)$$

где v_+ и v_- — скорости в правом и левом каналах. При этом предполагается, что удаленные концы каналов сообщаются сверху и снизу и жидкость может перетекать из одного канала в другой, так что расход по сечению одного канала может быть отличен от нуля.

Задача (1.3)—(1.5) имеет четные и нечетные относительно x решения.

Рассмотрим сначала решения нечетного типа. В этом случае температура в прослойке между каналами $T_m = cx$. Для определения скорости в жидкости удобно из уравнений (1.3) исключить T

$$v^{IV} + Rv = 0 \quad (1.6)$$

Общее решение уравнения (1.6) имеет вид

$$v = A \sin rx + B \cos rx + C \operatorname{sh} rx + D \operatorname{ch} rx \quad (1.7)$$

где $r = R^{1/4}$. Тогда температура в жидкости равна

$$T = r^{-2} (A \sin rx + B \cos rx - C \operatorname{sh} rx - D \operatorname{ch} rx) \quad (1.8)$$

Граничные условия (1.4) приводят к однородной системе для определения постоянных A, B, C, D и c (замкнутость потока (1.5) обеспечивается автоматически нечетностью решения). Условие разрешимости этой системы дает соотношение, из которого находятся критические значения числа Релея

$$\frac{\operatorname{tg} 2r + \operatorname{th} 2r}{r (\sec 2r \operatorname{sech} 2r - 1)} = \lambda x_1 \quad (1.9)$$

Определяя постоянные интегрирования, найдем распределения скорости и температуры

$$v = \pm \left[\frac{\cos r (x_2 - x) - \operatorname{ch} r (x_2 - x)}{\cos r (x_2 - x_1) - \operatorname{ch} r (x_2 - x_1)} - \frac{\sin r (x_2 - x) + \operatorname{sh} r (x_2 - x)}{\sin r (x_2 - x_1) + \operatorname{sh} r (x_2 - x_1)} \right]$$

$$T = \pm \frac{1}{r^2} \left[\frac{\cos r (x_2 - x) + \operatorname{ch} r (x_2 - x)}{\cos r (x_2 - x_1) - \operatorname{ch} r (x_2 - x_1)} - \frac{\sin r (x_2 - x) - \operatorname{sh} r (x_2 - x)}{\sin r (x_2 - x_1) + \operatorname{sh} r (x_2 - x_1)} \right] \quad (1.10)$$

$$T_m = \frac{2\lambda (1 - \cos 2r \operatorname{ch} 2r)}{r (\cos 2r - \operatorname{ch} 2r) (\sin 2r + \operatorname{sh} 2r)} x$$

Знаки плюс и минус относятся соответственно к правому и левому каналам. Амплитуда решения (1.10) ввиду однородности задачи остается произвольной.

В случае четного решения температура в прослойке постоянна: $T_m = \text{const}$. Постоянные интегрирования определяются из граничных условий (1.4) и условия замкнутости потока (1.5), которое ввиду четности скорости ($v_+ = v_-$) должно выполняться в каждом канале отдельно. Скорость и температура в жидкости описываются формулами (1.10) со знаком плюс, общим для обоих каналов, но с другими значениями критического числа r , которые теперь определяются из характеристического соотношения

$$\operatorname{tg}^2 r - \operatorname{th}^2 r = 0 \quad (1.11)$$

Температура в прослойке равна

$$T_m = \frac{2 (\sin 2r \operatorname{ch} 2r + \cos 2r \operatorname{sh} 2r)}{r^2 (\cos 2r - \operatorname{ch} 2r) (\sin 2r + \operatorname{sh} 2r)} \quad (1.12)$$

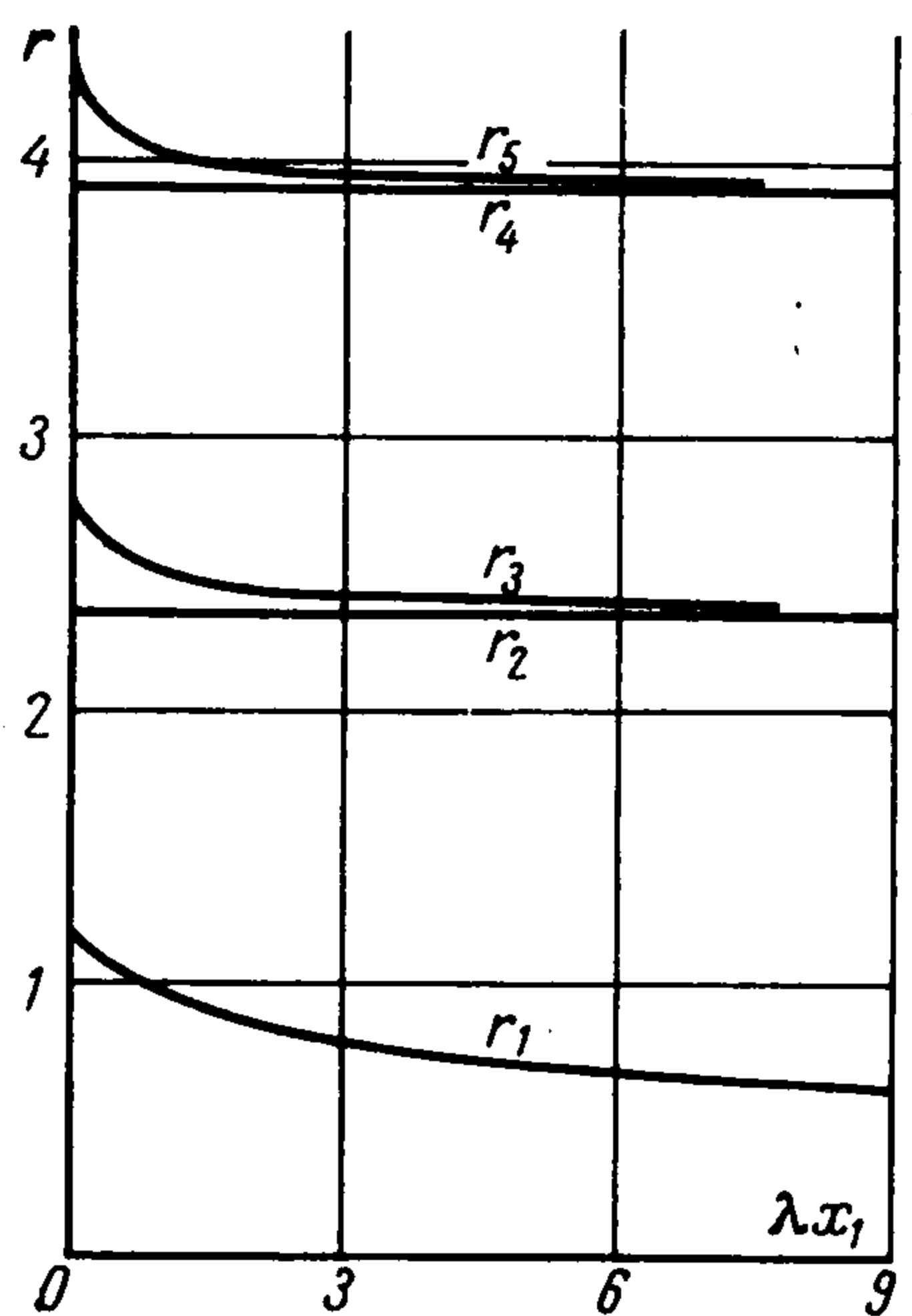
Итак, уравнения (1.9) и (1.11) определяют спектр критических чисел Релея для движений четного и нечетного относительно x типа. Как видно из (1.9), критические числа r , соответствующие нечетным уровням, зависят от одного параметра λx_1 , характеризующего тепловую связь каналов. Большие значения этого параметра, например, соответствуют слабой связи между каналами (большая толщина прослойки или малая ее теплопроводность).

Критические числа в случае четного решения, как видно из (1.11), не зависят от параметров прослойки. Это объясняется тем, что температура в прослойке в этом случае постоянна и нет горизонтального потока тепла, т. е. отсутствует тепловое взаимодействие каналов. В каждом из каналов возникает «автономная» циркуляция с нулевым расходом по сечению. Критические значения числа Релея r , естественно, совпадают со значениями, определяющими границу устойчивости равновесия в одиночном плоском канале [6]. При этом двум классам решений уравнения (1.11)

$$\operatorname{tgr} = \pm \operatorname{thr}$$

отвечают движения четного и нечетного типа относительно середины канала.

На фиг. 2 изображены нижние нечетные (r_1, r_3, \dots) и четные (r_2, r_4, \dots) уровни спектра критических чисел r в зависимости от параметра λx_1 . Как видно из графика,



Фиг. 2

при $\lambda x_1 \rightarrow \infty$ «нечетные» критические значения чисел Рейля уменьшаются (понижается устойчивость). Наибольший интерес представляет нижний уровень r_1 , который, собственно, определяет порог конвекции. При $\lambda x_1 \rightarrow \infty$, т. е. по мере ослабления связи между каналами, нижнее критическое число r_1 стремится к нулю, и равновесие становится абсолютно неустойчивым. Заметим, что при ослаблении связи ($\lambda x_1 \rightarrow \infty$) движения нечетного типа также становятся практически «автономными» и поэтому сближаются четные и нечетные уровни, соответствующие движениям с одинаковым числом узлов скорости (r_2 и r_3 , r_4 и r_5 и т. д.).

При сближении каналов ($\lambda x_1 \rightarrow 0$) в пределе получаются критические числа для одиночного канала, соответствующие движениям с узлом скорости в центре канала.

Отметим в заключение, что полученные в этом параграфе решения являются точными стационарными решениями нелинейных уравнений конвекции.

§ 2. Цилиндрические каналы. Рассмотрим теперь случай двух вертикальных цилиндрических каналов кругового сечения одинаковых радиусов ρ с расстоянием между осями $2d$, окруженных теплопроводным массивом. Рассматривая возмущения равновесия вида

$$v_x = v_y = 0, \quad v_z = v(x, y), \quad T = T(x, y), \quad \nabla p = 0 \quad (2.1)$$

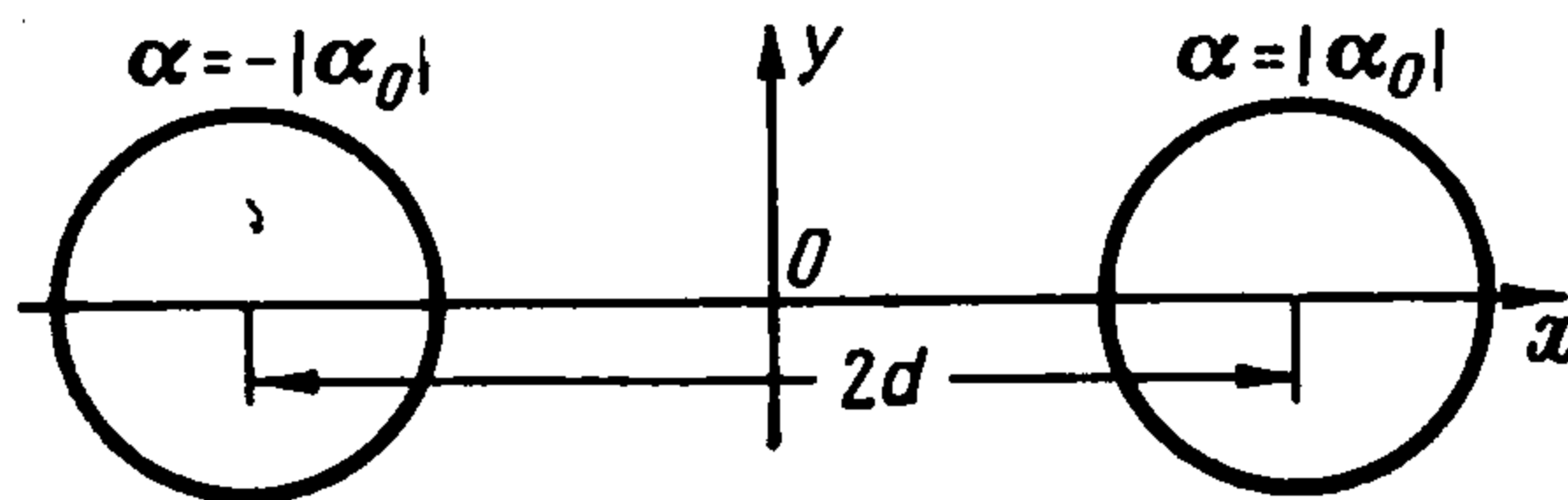
получим теперь вместо (1.3) уравнения

$$\Delta v + RT = 0, \quad \Delta T + v = 0, \quad \Delta T_m = 0 \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad R = \frac{g\beta A\rho^4}{\nu\chi} \right) \quad (2.2)$$

Все величины, входящие в (2.2), безразмерные; за единицу расстояния принят радиус цилиндра ρ ; расположение осей в горизонтальной плоскости указано на фиг. 3.

Введем биполярные координаты (α, β) следующими соотношениями:

$$x = \frac{a \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}, \quad y = \frac{a \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \quad (2.3)$$



Фиг. 3

($2a$ — расстояние между полюсами). На границе жидкости с массивом выполняются обычные условия для скорости и температуры

$$v = 0, \quad T = T_m, \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial \alpha} = \frac{\partial T_m}{\partial \alpha} \quad \text{при } \alpha = \pm |\alpha_0| \quad (2.4)$$

(знаки плюс и минус соответствуют правому и левому каналам).

Ограничимся нахождением приближенного решения, определяющего возникновение конвекции (нижний нечетный уровень). С этой целью аппроксимируем скорость в виде полинома, удовлетворяющего граничным условиям

$$v^* = v_0 [1 - (x - d)^2 - y^2] \quad (2.5)$$

Здесь v_0 — произвольная (ввиду однородности задачи) амплитуда движения, имеющая разные знаки для правого и левого каналов.

Температура в массиве T_m является гармонической функцией, нечетной относительно x (т. е. и α), исчезающей на бесконечности (при $\alpha \rightarrow 0$) и периодической по β

$$T_m = c_0 \alpha + c_1 \operatorname{sh} \alpha \cos \beta + c_2 \operatorname{sh} 2\alpha \cos 2\beta + \dots \quad (2.6)$$

Температуру в жидкости также аппроксимируем полиномом вида

$$T^* = A + B(x - d) + C(x - d)^2 + Cy^2 \quad (2.7)$$

Входящие в T^* постоянные будут определены из граничных условий и требования, чтобы T^* приближенно (по методу Галёркина) удовлетворяло уравнению теплопроводности

$$\int (\Delta T^* + v^*) T^* dS = 0 \quad (2.8)$$

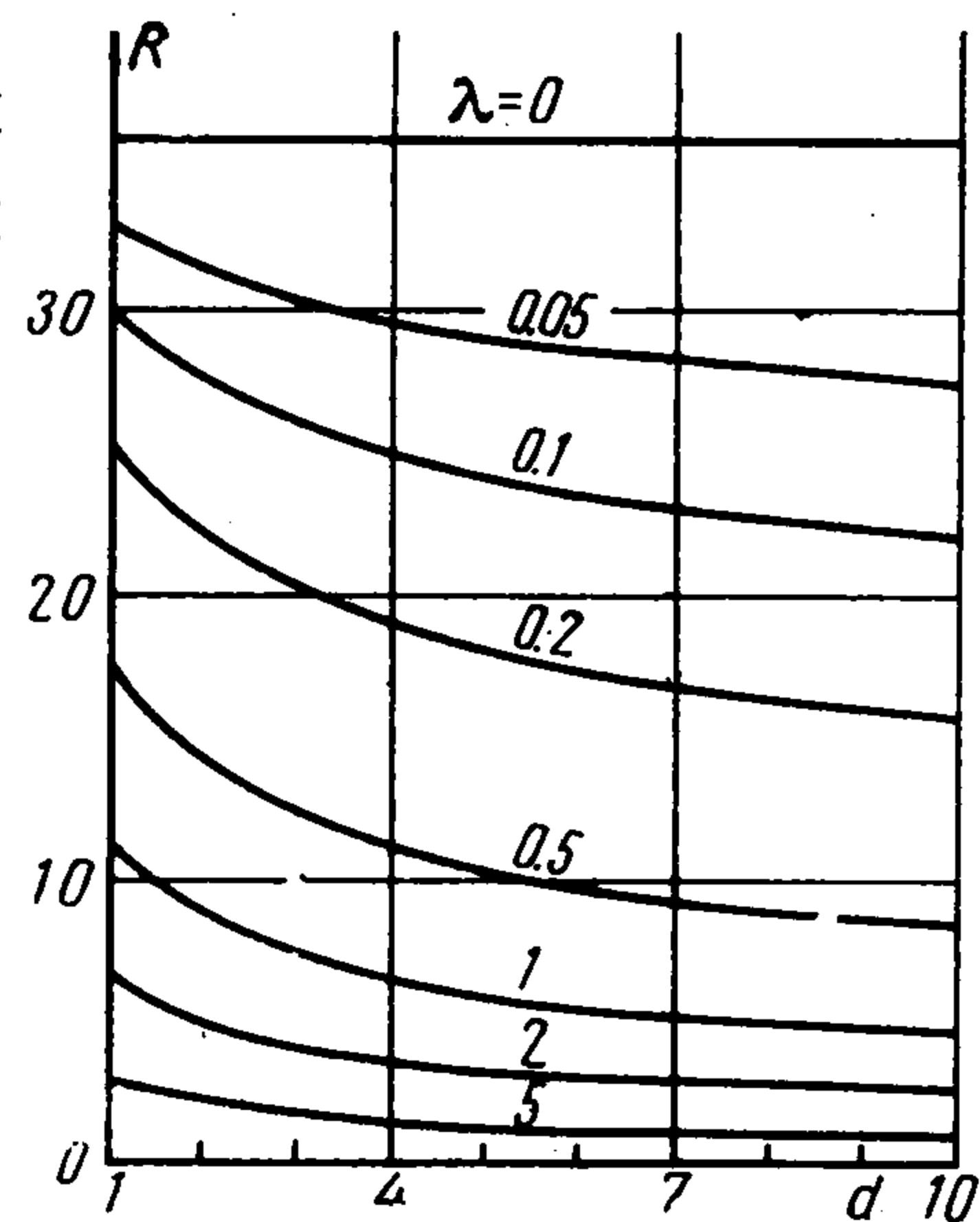
(интегрирование производится по сечению каналов). Разлагая T^* в ряд Фурье по переменной β и ограничиваясь в этом разложении, а также в (2.6), двумя первыми гармониками, получим из граничных условий (2.4) для температуры и интегрального условия (2.8) пять соотношений для определения постоянных A, B, C, c_0 и c_1 . В результате находим

$$A = -(1 + f) C, \quad B = (2\lambda\alpha_0 - f) e^{\alpha_0} C$$

$$c_0 = -2\lambda C$$

$$c_1 = 2(f - 2\lambda\alpha_0) C, \quad C = -v_0 \frac{2 + 3f}{12(1 + 2f)}$$

$$f(\alpha_0, \lambda) = 2\lambda \left(\alpha_0 + \frac{e^{-\alpha_0}}{\operatorname{ch} \alpha_0 + \lambda \operatorname{sh} \alpha_0} \right) \quad (2.9)$$



Фиг. 4

Таким образом, получено приближенное выражение для температур T^* и T_m^* , соответствующее аппроксимации скорости (2.5).

Подставляя в первое из уравнений (2.2) аппроксимации v^* , T^* , умножая на v^* и интегрируя по сечению каналов, получим условие разрешимости системы (2.2), из которого определяется критическое значение числа Релея R

$$R = - \int \Delta v^* v^* dS / \int T^* v^* dS \quad (2.10)$$

После вычислений находим

$$R = \frac{144(1 + 2f)}{(2 + 3f)^2} \quad (2.11)$$

где f — известная функция λ и α_0 (см. (2.9)). Формула (2.11) позволяет найти критическое число Релея R как функцию отношения теплопроводностей жидкости и массива $\lambda = \kappa / \kappa_m$ и расстояния между осями каналов (в единицах радиуса) $2d = 2 \operatorname{ch} \alpha_0$.

На фиг. 4 представлены кривые зависимости R от безразмерного расстояния d для нескольких значений λ . Наиболее устойчивым оказывается равновесие при $\lambda = 0$ (бесконечная теплопроводность массива); в этом случае критическое число Релея максимально и не зависит от расстояния между каналами. С увеличением d и λ (т. е. с ослаблением тепловой связи между каналами) критическое число убывает.

Возвращаясь к формуле (2.11), заметим, что в рассмотренном приближении критическое число Релея определяется в сущности одним параметром f . Этому параметру можно придать наглядный смысл, связав его с эффективным значением безразмерного числа Био b , которое определим через усредненные по границе канала тепловой поток и температуру

$$b = - \left\langle \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{\alpha_0} \right\rangle / \langle (T)_{\alpha_0} \rangle \quad (2.12)$$

Здесь знак $\langle \rangle$ означает усреднение по границе. Подставляя T^* , получим $b = 2 / f$. Таким образом, параметр f убывает с увеличением теплопередачи между жидкостью и массивом, т. е. с увеличением связи между каналами. Эта величина является аналогом параметра связи λx_1 в случае плоских каналов (см. § 1). Для больших расстояний ($d \gg 1$, $\alpha_0 \gg 1$)

$$f = 2\lambda\alpha_0 = 2\lambda \ln 2d \quad (2.13)$$

Поступила 8 I 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Oxford Clarendon Press, 1961.
2. Остроумов Г. А. Математическая теория конвективного теплообмена в замкнутых вертикальных скважинах. Изв. естественно-науч. ин-та при Пермск. ун-те, 1949, т. 12, № 9.
3. Остроумов Г. А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. М.—Л., Гостехиздат, 1952.
4. Жуховицкий Е. М. Об устойчивости неравномерно нагретой жидкости в вертикальном эллиптическом цилиндре. ПММ, 1955, т. 19, вып. 6.
5. Сорокина А. И., Чудинов А. А. Свободная стационарная конвекция между двумя вертикальными коаксиальными цилиндрами. Уч. зап. Пермск. ун-та, 1955, т. 9, № 4.
6. Chia-Shun Yih. Thermal instability of viscous fluids. Quart. Appl. Math., 1959, vol. 17, No. 1.
7. Болотина К. С. Об условиях возникновения конвекции в канале прямоугольного сечения. Изв. АН СССР. ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 1.
8. Жуховицкий Е. М. Об устойчивости неравномерно нагретой жидкости в шаровой полости. ПММ, 1957, т. 21, вып. 5.
9. Гершун Г. З., Жуховицкий Е. М. Устойчивость равновесия жидкости в горизонтальном цилиндре, подогреваемом снизу. ПММ, 1961, т. 25, вып. 6.
10. Ostrach S., Pnueli D. The thermal instability of completely confined fluids inside some particular configurations. Paper. Amer. Soc. Mech. Engrs., 1962, No. WA—140.
11. Сорокин В. С. Вариационный метод в теории конвекции. ПММ, 1953, т. 17, вып. 1.