Прикладная математика и механика. Том 30, 1966

ВТОРИЧНЫЕ ТЕЧЕНИЯ И НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ЦИЛИНДРАМИ

В. И. Юдович

(Ростов-на-Дону)

Эксперименты показывают, что при потере устойчивости течения Куэтта между вращающимися цилиндрами возникает новое стационарное течение. Математически это означает, что соответствующая стационарная краевая задача для уравнений Навье — Стокса имеет более одного решения. Настоящая работа посвящена доказательству этого факта в том случае, когда цилиндры вращаются в одну сторону. Указанный факт имеет место не только для течения Куэтта, но и для некоторого класса течений жидкости.

В основе применяемого здесь метода лежит теорема М. А. Красносельского [1] о точках бифуркации операторных уравнений. Применение этой теоремы к уравнениям Навье — Стокса было рассмотрено в [2], где доказана неединственность решения одной стационарной пространственно-периодической задачи.

В приложениях теоремы М. А. Красносельского наиболее трудный вопрос — исследование спектра линеаризованных задач. В изучаемом здесь случае исследовать пектр помогают результаты М. Г. Крейна и Ф. Р. Гантмахера по осцилляционным интегральным операторам [3-5].

Основные выводы о бифуркации сформулированы в теореме 4.1 и замечаниях к ней.

Попутно доказывается, что рассматриваемые течения при больших числах Рейнольдса неустойчивы (см. теорему 5.1).

1. **К постановке задачи.** Пусть вязкая несжимаемая однородная жидкость заполняет полость между двумя концентрическими цилиндрами $r = r_1$ и $r = r_2$; r, θ, z — цилиндрические координаты. Будем разыскивать осесимметрические стационарные течения, т. е. такие, что компоненты скорости v_r', v_θ', v_z' зависят только от r и z, а от θ не зависят. Будем также предполагать, что v_r', v_θ', v_z' периодичны по z с периодом $2\pi / \alpha_0$ и что поток скорости через поперечное сечение полости равен 0

$$\int_{r_1}^{r_2} v_z'(r, z)\, r\, dr = 0 \tag{1.1}$$

Предполагая, что цилиндры твердые и вращаются с угловыми скоростями ω_1, ω_2 соответственно, а вектор вихревых массовых сил $\mathbf{F}$ имеет вид $(0, \nu F(r), 0)$, легко убедиться, что всем поставленным требованиям удовлетворяет течение с вектором скорости $\mathbf{v}_0$ и давлением P_0

$$\begin{pmatrix} v_{0r} = v_{0z} = 0 \\ v_{0\theta} = v_0(r) \end{pmatrix}, \qquad P_0 = \int_{r_1}^{r} \frac{v_0^2(\rho)}{\rho}\, d\rho + \mathrm{const} \tag{1.2}$$

где функция $v_0(r)$ однозначно определяется как решение краевой задачи

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}\right) v_0 = -F(r) \qquad \begin{pmatrix} v_0(r_1) = \omega_1 r_1 \\ v_0(r_2) = \omega_2 r_2 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Далее предполагаем, что F, а значит и v_0, не зависят от коэффициента вязкости ν. В частности, если $F_\theta = 0$, то (1.2) представляет собой течение Куэтта

$$v_0(r) = ar + \frac{b}{r}, \qquad a = \frac{\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}, \qquad b = \frac{(\omega_1 - \omega_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \tag{1.4}$$

Разыскивая решения v', P' поставленной задачи, отличные от (1.3), в виде

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{v}_0, \qquad P' = \nu p + P_0 \tag{1.5}$$

получим следующую систему уравнений для определения $\mathbf{v}$, p:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{1.6}$$

$$\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{\partial p}{\partial r} = \lambda\left[v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z} - 1\frac{v_\theta^2}{r} - 2\frac{v_0}{r}v_\theta\right]$$

$$\Delta v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} = \lambda\left[v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} + \left(\frac{dv_0}{dr} + \frac{v_0}{r}\right)v_r\right]$$

$$\Delta v_z - \frac{\partial p}{\partial z} = \lambda\left[v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right] \qquad \left(\lambda = \frac{1}{\nu}, \ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

При этом функции v_r, v_θ, v_z должны быть $2\pi/\alpha_0$-периодичны по z и обращаться в 0 при $r = r_1, r_2$. Должно выполняться также следующее условие, вытекающее из (1.1):

$$\int_{r_1}^{r_2} v_z(r, z) r\, dr = 0 \tag{1.7}$$

Линеаризованная задача, отвечающая задаче (1.6)—(1.7), имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \qquad \Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{\partial q}{\partial r} = -\lambda\frac{2v_0}{r}u_\theta \tag{1.8}$$

$$\Delta u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} = \lambda\left(\frac{dv_0}{\partial r} + \frac{v_0}{r}\right)u_r, \qquad \Delta u_z - \frac{\partial q}{\partial z} = 0, \qquad \int_{r_1}^{r_2} u_z r\, dr = 0$$

а сопряженная задача

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rw_r) + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0, \qquad \Delta w_r - \frac{w_r}{r^2} - \frac{\partial Q}{\partial r} = \lambda\left(\frac{dv_0}{dr} + \frac{v_0}{r}\right)w_\theta \tag{1.9}$$

$$\Delta w_\theta - \frac{w_\theta}{r^2} = -\lambda 2\frac{v_0}{r}w_r, \qquad \Delta w_z - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \qquad \int_{r_1}^{r_2} w_z r\, dr = 0$$

Краевые условия для векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$ те же, что и для вектора $\mathbf{v}'$.

Рассмотрим множество M дважды непрерывно дифференцируемых соленоидальных векторов $\{\mathbf{v}\}$, определенных в замкнутой области $\{r_1 \leqslant r \leqslant r_2; -\infty < z < +\infty\}$, осесимметрических ($v_r$, v_θ, v_z не зависят от θ), исчезающих при $r = r_1, r_2$, имеющих равный нулю поток через поперечное сечение полости и таких, что v_r, v_θ — четные функции z, а v_z — нечетная. Через H_1° обозначим гильбертово пространство, полученное пополнением множества M по норме, порожденной скалярным произведением

$$(\mathbf{v}, \mathbf{u})_{H_1^\circ} = -\int_{-\pi/\alpha_0}^{\pi/\alpha_0} dz \int_{r_1}^{r} \Delta \mathbf{v}\mathbf{u} r\, dr =$$

$$= -\int_{-\pi/\alpha_0}^{\pi/\alpha_0} dz \int_{r_1}^{r_2} \left[\left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2}\right) u_r + \left(\Delta v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2}\right) u_\theta + \Delta v_z u_z\right] r dr$$

Обращая оператор, определяемый соотношениями (1.6), (1.7) при $\lambda = 0$, сведем задачу (1.6), (1.7) к операторному уравнению

$$\mathbf{v} = \lambda K_0 \mathbf{v} \tag{1.10}$$

Аналогичным образом задачи (1.8—1.9) сводятся к операторным уравнениям

$$\mathbf{u} = \lambda A_0 \mathbf{u}, \qquad \mathbf{w} = \lambda A_0^* \mathbf{w} \tag{1.11}$$

Операторы K_0, A_0, A_0^* вполне непрерывны в пространстве H_1°; оператор A_0 является дифференциалом Фреше оператора K_0 в точке $\mathbf{v} = 0$; A_0^* — сопряженный оператор к A_0 в H_1°. Все это следует из результатов работы [2]; заметим, что H_1° — подпространство рассмотренного в [2] пространства H_1, а операторы K_0, A_0, A_0^* суть сужения операторов K, A, A^* из работы [2] на (инвариантное) подпространство H_1°.

2. Сведение к интегральному уравнению. При помощи разложения в ряд Фурье убеждаемся, что решение спектральной задачи (1.8) представляет линейную комбинацию решений вида

$$\begin{aligned} u_r &= u(r)\cos\alpha z, \qquad u_\theta = v(r)\cos\alpha z \\ u_z &= w(r)\sin\alpha z, \qquad q = \varkappa(r)\cos\alpha z \end{aligned} \tag{2.1}$$

причем $\alpha = k\alpha_0$ (k — натуральное число), функции w, $\varkappa$ выражаются через u, v формулами

$$w(r) = -\frac{1}{\alpha r}\frac{d}{dr}(ru), \qquad \varkappa(r) = -\frac{1}{\alpha}\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \alpha^2\right) w$$

Функции u, v и соответствующее им характеристическое значение λ определяются путем решения спектральной задачи

$$(L - \alpha^2)^2 u = 2\alpha^2\lambda\omega v, \; (L - \alpha^2) v = -\lambda g u, \quad u = v = u' = 0 \quad (\text{при } r = r_1, r_2)$$

$$\omega(r) = \frac{v_0}{r}, \quad g(r) = -\left(\frac{dv_0}{dr} + \frac{v_0}{r}\right), \quad L = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \tag{2.2}$$

Разумеется, упомянутая выше линейная комбинация содержит лишь те решения (2.1), которым отвечает одно и то же значение λ. Функции ω и g дальше будем считать непрерывными.

Сведем теперь задачу (2.2) к интегральному уравнению. Пусть $G_1(r, \rho)$, $G_2(r, \rho)$ — функции Грина дифференциальных операторов — $r(L - \alpha^2)$, $r(L - \alpha^2)^2$ при краевых условиях $u = 0$ и $u = u' = 0$ ($r = r_1, r_2$) соответственно. Пусть G_1, G_2 — интегральные операторы, определяемые формулами

$$G_k f = \int_{r_1}^{r_2} G_k(r, \rho) f(\rho) \rho\, d\rho \tag{2.3}$$

Обе функции Грина $G_1(r,\rho)$ и $G_2(r,\rho)$ непрерывны по r, ρ и симметричны. Это, как известно, следует из симметричности соответствующих им дифференциальных операторов.

Обозначим через H_0 гильбертово пространство L_2 с весом r на отрезке $[r_1, r_2]$. Скалярное произведение в H_0 определяется формулой

$$(\varphi, \psi)_{H_0} = \int_{r_1}^{r_2} \varphi(r)\,\psi(r)\,r\,dr \tag{2.4}$$

Операторы G_1, G_2, определенные формулой (2.3), симметричны и вполне непрерывны в H_0.

Задача (2.2) эквивалентна отысканию спектра системы интегральных уравнений

$$u = 2\alpha^2\lambda G_2\omega\, v, \qquad v = \lambda G_1 g u \tag{2.5}$$

или любого из интегральных уравнений

$$u = \mu G_2\omega\, G_1 g u, \qquad v = \mu G_1 g G_2 \omega\, v \qquad (\mu = 2\alpha^2\lambda^2) \tag{2.6}$$

Здесь через ω, g обозначены операторы умножения на функции $\omega(r)$, $g(r)$ соответственно.

Аналогично, разыскивая решение сопряженной задачи (1.9) в виде

$$w_r = u_1(r)\cos\alpha z, \quad w_\theta = v_1(r)\cos\alpha z, \quad w_z = w_1(r)\sin\alpha z, \quad Q = \varkappa_1(r)\cos\alpha z$$

$$\left(w_1(r) = -\frac{1}{\alpha r}\frac{d}{dr}(ru_1), \qquad \varkappa_1(r) = -\frac{1}{\alpha}\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \alpha^2\right)w_1\right) \tag{2.7}$$

придем к задаче на собственнные значения для определения u_1, v_1:

$$(L - \alpha^2)^2 u_1 = \lambda\alpha^2 g v_1, \qquad (L - \alpha^2)\, v_1 = -2\lambda\omega u_1$$
$$u_1 = u_1' = v_1 = 0 \quad (\text{при } r = r_1, r_2) \tag{2.8}$$

Задача (2.8) эквивалентна системе интегральных уравнений

$$u_1 = \lambda\alpha^2 G_2 g v_1, \qquad v_1 = 2\lambda G_1 \omega u_1 \tag{2.9}$$

или любому из интегральных уравнений

$$u_1 = \mu G_2 g G_1 \omega u_1, \qquad v_1 = \mu G_1 \omega\, G_2 g v_1 \tag{2.10}$$

Будем далее ради определенности рассматривать первое уравнение (2.6), которое запишем в виде

$$u = \mu B u \qquad (B = G_2\omega G_1 g) \tag{2.11}$$

Пусть $\mu > 0$ — какое-нибудь его характеристическое значение. Тогда $\lambda = \pm\sqrt{\mu/2\alpha^2}$ — характеристическое значение задачи (2.2); v находится по второй формуле (2.5). Сопряженное уравнение к (2.11) имеет вид

$$u_0 = \mu B^* u_0 \qquad (B^* = g G_1 \omega G_2) \tag{2.12}$$

Сравнивая второе уравнение (2.10) и (2.12), замечаем, что $u_0 = g v_1$ будет решением уравнения (2.12).

Предположим, что $\mu > 0$ — простое характеристическое число оператора B. Отсюда следует (см. [2], лемма 1.5), что $(u, u_0)_{H_0} = (u, g v_1)_{H_0} \neq 0$.

Лемма 1.1. Пусть $\mu > 0$ — характеристическое число оператора $B = G_2\omega G_1 g$, и ранг его равен 1. Тогда $\lambda = \mp \sqrt{\mu / 2\alpha^2}$ — характеристическое число оператора A_0(см. (1.22)), и ранг его тоже равен *1*.

Доказательство. Подсчитаем скалярное произведение $(\mathbf{u}, \mathbf{w})H_1{}^0$, где $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$ — собственные векторы операторов A_0, $A_0{}^*$, определенные равенствами (2.1) и (2.7), отвечающие характеристическому числу λ. Умножая второе, третье и четвертое уравнения (1.8) соответственно на w_r, w_θ, w_z, найдем

$$(\mathbf{u}, \mathbf{w})_{H_1{}^\circ} = \lambda \int_{-\pi/\alpha_0}^{\pi/\alpha_0} \int_{r_1}^{r_2} (2\omega u_\theta w_r + g u_r w_\theta)\, r dr dz \qquad (2.13)$$

При помощи (2.1), (2.7) второго уравнения и первого уравнения (2.9) из (2.13) получим

$$(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{w}})_{H_1{}^\circ} = \frac{\pi\lambda}{\alpha_0} \int_{r_1}^{r_2} (2\omega v u_1 + g u v_1)\, r dr = \frac{\pi\lambda}{\alpha_0} [(\mu\omega G_1 g u,\ G_2 g v_1)_{H_0} + (u,\ u_0)_{H_0}] =$$
$$= \frac{\pi\lambda}{\alpha_0} [(\mu G_2 \omega G_1 g u,\ g v_1)_{H_0} + (u, u_0)_{H_0}] = \frac{2\pi\lambda}{\alpha_0} (u, u_0)_{H_0} \neq 0$$

Отсюда следует, что ранг характристического числа λ равен единице. Лемма доказана.

3. О функциях Грина G_1 и G_2. Рассмотрим дифференциальные операторы $-r(L - \alpha^2)$, $r(L - \alpha^2)^2$, которые можно представить в виде

$$\begin{aligned} -r(L - \alpha^2)u &= \rho_0 \frac{d}{dr} \rho_1 \frac{d}{dr} \rho_2 u \\ r(L - \alpha^2)^2 u &= \rho_0 \frac{d}{dr} \rho_1 \frac{d}{dr} \rho_2 \rho_0 \frac{d}{dr} \rho_1 \frac{d}{dr} \rho_2 u \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} \rho_0(r) = \rho_2(r) = I_1(\alpha r) \\ \rho_1(r) = r / \rho_2{}^2 \end{pmatrix} \qquad (3.1)$$

Здесь $\rho_0(r)$, $\rho_1(r)$, $\rho_2(r)$ — положительные функции, I_1 — модифицированная функция Бесселя.

Согласно результатам М. Г. Крейна [3], отсюда следует, что $G_1(r, \rho)$, $G_2(r, \rho)$ — осцилляционные ядра. Это означает, что выполняются следующие условия:

1. $G_k(r, \rho) > 0 \qquad (r_1 < r,\ \rho < r_2)$
2. $\det \| G_k(\eta_i, \rho_s) \|_{i,s=1}^{n} \geqslant 0 \quad$ при $r_1 < \begin{matrix} \eta_1 < \eta_2 < \ldots < \eta_n \\ \rho_1 < \rho_2 < \ldots < \rho_n \end{matrix} < r_2$
3. $\det \| G_k(\rho_i, \rho_s) \|_{i,s=1}^{n} > 0 \quad$ при $r_1 < \rho_1 < \ldots < \rho_n < r_2$

Интегральный оператор с осцилляционным ядром будем называть осцилляционным; G_1 и G_2 — осцилляционные операторы.

Дальше нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2.1. Операторы G_1 и G_2 в полосе $|\operatorname{Im} \alpha| < \delta_0$ — аналитические функции параметра α, т. е. в окрестности любого α из этой полосы разлагаются в ряды Тэйлора, сходящиеся по норме операторов. Положительное число δ_0 зависит только от r_1 и r_2.

Доказательство. Воспользуемся тем известным фактом (см., например, [8]), что если линейный оператор аналитически зависит от параметра в некоторой области его изменения и имеет обратный оператор, то и обратный оператор является аналитической функцией параметра в той же области.

Краевые задачи

$$(L-\alpha^2)v=-f, \quad v=0 \quad \text{при } r=r_1, r_2$$

$$(L-\alpha^2)^2u=f, \quad u=u'=0 \quad \text{при } r=r_1', r_2 \tag{3.2}$$

эквивалентны соответственно интегральным уравнениям

$$v+\alpha^2G_{10}v=G_{10}f, \qquad u-2\alpha^2G_{20}Lu+\alpha^4G_{20}u=G_{20}f \tag{3.3}$$

где G_{k0} ($k=1, 2$) означает оператор G_k при $\alpha=0$.

Из (3.3) вытекают следующие представления операторов G_1, G_2:

$$G_1=(I+\alpha^2G_{10})^{-1}G_{10}, \qquad G_2=(I-2\alpha^2G_{20}L+\alpha^4G_{20})^{-1}G_{20} \tag{3.4}$$

Заметим, что операторы G_{10}, G_{20} вполне непрерывны, симметричны и положительны, оператор $G_{20}L$ допускает продолжение до вполне непрерывного (интегрированием по частям он приводится к интегральному оператору с непрерывным ядром).

Теперь достаточно установить, что обратные операторы из равенств (3.4) существуют для любого α из некоторой полосы $|\operatorname{Im}\alpha|<\delta_0$. Пусть характеристические числа оператора G_{10}, суть $0<\delta_1^2<\delta_2^2<\ldots<\delta_n^2<\ldots$; $\delta_n^2\to\infty$ при $n\to\infty$. Тогда оператор $(I+\alpha^2G_{10})^{-1}$, существует при любом α, кроме $\alpha=\mp i\delta_1, \mp i\delta_2, \ldots$ и, во всяком случае, любом α из полосы $|\operatorname{Im}\alpha|<\delta_1$. Тем самым нужное утверждение об операторе G_1 доказано.

Покажем теперь, что если величина $|\operatorname{Im}\alpha|$ достаточно мала, то второе уравнение (3.3) при $f=0$ или, что все равно вторая краевая задача (3.2) при $f=0$ имеет лишь нулевое решение. Умножая второе уравнение (3.2) при $f=0$ на u^* и интегрируя по r от r_1 до r_2, получим

$$\|u\|_2^2+2\alpha^2\|u\|_1^2+\alpha^4\|u\|_0^2=0 \tag{3.5}$$

$$\left(\|u\|_0=\|u\|_{H_0}, \ \|u\|_2=\|Lu\|_{H_0}, \ \|u\|_1^2=\int_{r_1}^{r_2}\left|\frac{du}{dr}+\frac{u}{r}\right|^2 rdr\right)$$

Полагая $\alpha=\gamma+i\delta$ и отделяя в (3.5) вещественную и мнимую части, получим

$$\|u\|_2^2+2(\gamma^2-\delta^2)\|u\|_1^2+[(\gamma^2-\delta^2)^2-4\gamma^2\delta^2]\|u\|_0^2=0 \tag{3.6}$$

$$\gamma\delta\,[\|u\|_1^2+(\gamma^2-\delta^2)\|u\|_0^2]=0 \tag{3.7}$$

Как известно (см. [7]), справедливы неравенства

$$\|u\|_0\leqslant c_0\|u\|_1, \qquad \|u\|_1\leqslant c_1\|u\|_2 \tag{3.8}$$

где c_0, c_1 — положительные постоянные, зависящие только от r_1 и r_2. Положим

$$\delta_0=\min\left\{\delta_1, \frac{1}{c_0}, \frac{1}{c_1\sqrt{2}}\right\}$$

и пусть $|\operatorname{Im}\alpha|=|\delta|<\delta_0$. Тогда тот факт, что $u=0$, следует: 1) при $\delta=0$ из (3.6) 2) при $\delta\neq0$, $\gamma\neq0$ из (3.7). В самом деле, из (3.7), (3.8) выводим

$$0=\|u\|_1^2+(\gamma^2-\delta^2)\|u\|_0^2\geqslant(1-\delta_0^2c_0^2)\|u\|_1^2+\gamma^2\|u\|_0^2\geqslant\gamma^2\|u\|_0^2$$

3) при $\delta\neq0$, $\gamma=0$ из (3.6). Действительно, из (3.6), (3.8) при $\gamma=0$ следует

$$0=\|u\|_2^2-2\delta^2\|u\|_1^2+\delta^4\|u\|_0^2\geqslant(1-2\delta_0^2c_1^2)\|u\|_2^2+\delta^4\|u\|_0^2\geqslant\delta^4\|u\|_0^2$$

Из доказанного, согласно теореме Фредгольма, вытекает, что при $|\operatorname{Im}\alpha|<\delta_0$ оператор $I-2\alpha^2G_{20}L+\alpha^4G_{20}$ обратим. Из второго представления (3.4) вытекает, что оператор G_2 в полосе $|\operatorname{Im}\alpha|<\delta_0$ аналитически зависит от α. Лемма доказана.

4. Спектр и бифуркация. В этом пункте устанавливаются условия при которых оператор A_0, определенный в (1.11), имеет вещественный и простой спектр. Отсюда, при помощи теоремы М. А. Красносельского, выводим, что каждое характеристическое число оператора A_0 является точкой бифуркации оператора K_0: при близких к нему значениях параметра λ уравнение (1.10), а тем самым и краевая задача (1.6), (1.7) имеют ненулевые решения.

Теорема 4.1. Пусть выполняются условия

$$\omega(r) = v_0(r) / r > 0 \qquad (r_1 < r < r_2) \tag{4.1}$$

$$g(r) = -(dv_0 / dr + v_0 / r) > 0 \qquad (r_1 < r < r_2) \tag{4.2}$$

Тогда для любого α_0, исключая некоторое счетное множество, оператор A_0 имеет последовательность положительных и простых характеристических значений $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ Каждое из них является точкой бифуркации уравнения (1.10). Все интервалы (λ_1, λ_2), $(\lambda_3, \lambda_4), \ldots$ принадлежат спектру уравнения (1.10).

Если выполнено условие (4.1), а вместо (4.2) имеет место противоположное неравенство

$$g(r) = -(dv_0 / dr + v_0 / r) < 0 \tag{4.3}$$

то оператор A_0 не имеет вещественных собственных значений, и бифуркации нет.

Доказательство. Пусть выполнены условия (4.1), (4.2). Так как произведение осцилляционных операторов есть снова осцилляционный оператор ([3-5]), оператор B, определенный в (2.11), является осцилляционным. Согласно результатам работ [4,5], отсюда следует, что его спектр состоит из последовательности простых положительных характеристических чисел $0 < \mu_1(\alpha) < \mu_2(\alpha) < \ldots < \mu_n(\alpha) < \ldots$ Спектр оператора A_0 состоит поэтому из вещественных характеристических чисел

$$\lambda_{ik} = \left(\frac{\mu_i(k\alpha_0)}{2k^2\alpha_0^2}\right)^{1/2}, \qquad \lambda_{ik}' = -\left(\frac{\mu_i(k\alpha_0)}{2k^2\alpha_0^2}\right)^{1/2} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots)$$

Согласно лемме 1.1, все они имеют ранг, равный 1. Поэтому кратность каждого из них равна размерности пространства собственных векторов. Таким образом, кратность характеристического числа, скажем $\lambda_{i_0k_0}$, равна количеству элементов матрицы (λ_{ik}), стоящих в одной с ним строке и равных $\lambda_{i_0k_0}$ (ввиду простоты характеристических чисел μ_i, в колоннах матрицы (λ_{ik}) нет одинаковых элементов).

Дальнейшее основано на следующей лемме, представляющей собой простое следствие теории возмущений спектра линейного оператора.

Лемма 4.1. Пусть линейный и вполне непрерывный в H_0 оператор $B(\alpha)$ аналитичен по α на вещественной оси. Пусть спектр его состоит из последовательности положительных и простых характеристических чисел $0 < \mu_1(\alpha) < \mu_2(\alpha) < \ldots < \mu_n(\alpha) < \ldots$ Тогда все $\mu_k(\alpha)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — аналитические функции на вещественной оси.

Доказательство. Согласно теории возмущений (см., например, [6, 8]), из простоты характеристического числа $\mu_k(\alpha)$ вытекает возможность его аналитического продолжения по α. При этом для любого α будет справедливо $\mu_{k-1}(\alpha) < \mu_k(\alpha) < \mu_{k+1}(\alpha)$ $(k = 2, 3, \ldots)$, так как оно не может нарушиться без появления при некотором значении α кратного характеристического числа. Лемма доказана.

Достаточно рассмотреть собственные числа λ_{ik}.

Положим $\Lambda_i(\alpha) = \sqrt{\mu_i(\alpha)/\alpha^2}$. (Функция $\Lambda_i(\alpha)$ — аналитична по α на положительной полуоси $\alpha > 0$. Имеем $\lambda_{ik} = \Lambda_i(k\alpha_0)$. Множество Γ

тех α_0, при которых среди чисел λ_{ik} есть хотя бы два одинаковых, есть, очевидно, объединение по всем натуральным i, k, r, s множеств Γ_{ikrs} тех α_0, для которых выполняется равенство

$$\Lambda_i (k\alpha_0) - \Lambda_r (s\alpha_0) = 0 \tag{4.4}$$

Покажем, что аналитическая функция $\Lambda_{ikrs}(\alpha) = \Lambda_i (k\alpha) - \Lambda_r (s\alpha)$ не может быть тождественным нулем.

В самом деле, полагая например, $i > r$ и учитывая неравенство $\Lambda_i (\alpha) > \Lambda_r (\alpha)$, из предположения $\Lambda_{ikrs} \equiv 0$ выводим:

$$\Lambda_r (s\alpha) = \Lambda_i (k\alpha) > \Lambda_r (k\alpha)$$

что невозможно при $s = k$. Если же $s \neq k$, то для любого $0 < \alpha < \infty$ и любого натурального p будем иметь

$$\Lambda_r (\alpha) > \Lambda_r \left(\left(\frac{k}{s}\right)^p \alpha\right) \to +\infty \qquad \text{при} \quad p \to \infty$$

так как $\Lambda_r (\alpha) \to \infty$ при $\alpha \to 0$ или ∞ (см. ниже замечание 2). Точно так же рассматривается и случай $i = r$.

Теперь можно утверждать, что Γ_{ikrs} как множество нулей аналитической функции Λ_{ikrs} не более чем счетно. Поэтому и множество Γ не более чем счетно.

На самом деле, Γ_{ikrs} счетно; его предельные точки суть 0 и ∞ (см. ниже замечание 3).

Пусть $\alpha_0 \in \Gamma$. Пронумеруем характеристические числа λ_{ik} в порядке возрастания. Получим последовательность простых характеристических чисел оператора $A_0 : 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ Каждое из них, согласно теореме М. А. Красносельского [1], является точкой бифуркации уравнения (1.10).

Из результатов работы [9] следует, что вращение векторного поля $(I - \lambda K_0)v$ на сферах большого радиуса в пространстве $H_1{}^\circ$ равно $+1$. Поэтому так же, как в [2] получаем, что при любом λ из интервалов (λ_1, λ_2), (λ_3, λ_4), ... уравнение (1.10) имеет нетривиальные решения — эти интервалы принадлежат спектру оператора K_0.

Если выполняются условия (4.1) и (4.3), то осцилляционным является оператор $-B$. Следовательно, при этих условиях оператор A_0 не имеет вещественных характеристических чисел (все они чисто мнимые), и бифуркации нет. Теорема доказана.

Замечание 1. Теорема и доказательство остаются в силе, если в (4.1) и (4.2) допустить равенство в отдельных точках отрезка (r_1, r_2). Можно также рассматривать весьма нерегулярные ω и g, например, заменить во втором интегральном операторе (2.10), $grdr$ на $d\sigma$, где σ — произвольная возрастающая функция.

Замечание 2. Назовем бифуркационным критическим числом Рейнольдса величину

$$\Lambda_0 = \min \Lambda_1 (\alpha) \qquad \text{при } 0 < \alpha < \infty$$

Докажем, что $\Lambda_0 > 0$ и достигается при некотором значении α.

Так как функция $\Lambda_1 (\alpha)$ непрерывна при $\alpha \in (0, \infty)$, достаточно установить, что $\Lambda_1 (\alpha) \to +\infty$ при $\alpha \to 0$, ∞. Так как $\Lambda_1 (\alpha) = \alpha^{-1} \sqrt{\mu_1 (\alpha)}$, а $\mu_1 (\alpha)$ — аналитическая функция на всей вещественной оси, причем $\mu_1 (0) > 0$, то

$$\Lambda_1 (\alpha) \sim \alpha^{-1} \sqrt{\mu_1 (0)} \to +\infty \quad \text{при} \quad \alpha \to 0$$

Далее, умножая первые два уравнения (2.2) при $\lambda = \Lambda_1(\alpha)$ на ru, $-rv$ соответственно и интегрируя по $[r_1, r_2]$, получим соотношения (обозначения см. в (3.5))

$$\| u \|_2^2 + 2\alpha^2 \| u \|_1^2 + \alpha^4 \| u \|_0^2 = 2\alpha^2 \Lambda_1 \int_{r_1}^{r_2} \omega vurdr, \quad \| v \|_1^2 + \alpha^2 \| v \|_0^2 = \Lambda_1 \int_{r_1}^{r_2} guvrdr \tag{4.5}$$

Положим

$$C = \max \{\max_{r_1 \leqslant r \leqslant r_2} |\omega(r)|, \ \max_{r_1 \leqslant r \leqslant r_2} |g(r)|\}$$

Из (4.5), применяя неравенство Буняковского, получим

$$\alpha^2 \| u \|_0^2 \leqslant 2\Lambda_1 C \| u \|_0 \| v \|_0, \qquad \alpha^2 \| v \|_0^2 \leqslant \Lambda_1 C \| u \|_0 \| v \|_0 \tag{4.6}$$

Из (4.6), в силу того, что (u, v) — ненулевое решение, следует оценка

$$\Lambda_1 \geqslant \sqrt{2}\alpha^2 / C \to +\infty \qquad \text{при} \quad \alpha \to +\infty$$

Тем самым наше утверждение доказано.

Остается неизвестным, верно ли, что при $\lambda < \Lambda_0$ течение (1.2) устойчиво («принцип изменения устойчивости»).

Замечание 3. Исключительное счетное множество Γ, о котором шла речь в доказательстве теоремы, действительно существует.

В самом деле, так как функция $\lambda = \Lambda_1(\alpha) \to \infty$ при $\alpha \to 0, \infty$, можно указать две непрерывные ветви обратной функции $\alpha_1(\lambda), \alpha_2(\lambda)$ такие, что $\alpha_1(\lambda) \to 0$; $\alpha_2(\lambda) \to \infty$ при $\lambda \to +\infty$. Тогда $\alpha_2(\lambda)/\alpha_1(\lambda) \to +\infty$ при $\lambda \to \infty$, и, значит, для каждого натурального k, начиная с некоторого, существует η_k такое, что $\alpha_2(\eta_k) = k\alpha_1(\eta_k)$. Положим $\alpha_1(\eta_k) = \alpha_{0k}$. Тогда $\Lambda_1(k\alpha_{0k}) = \Lambda_1(\alpha_{0k})$. Множество Γ содержит все точки α_{0k} $(k = 1, 2, \ldots)$ и потому счетно.

Приближенные расчеты показывают (интересно было бы иметь строгое доказательство), что $\Lambda_1(\alpha)$ — выпуклая вниз функция. Если это так, то значение Λ_0 достигается при единственном значении α_0, и в некоторой его окрестности $\lambda_1(\alpha_0)$ — точка бифуркации.

Замечание 4. Из теории осцилляционных операторов ([3,5]) вытекает ряд выводов о свойствах собственных решений задач (2.2).

Например, для решений (u, v), (u_1, v_1) этих задач, отвечающих наименьшему собственному значению, все функции u, v, u_1, v_1 не меняют знака на отрезке (r_1, r_2), а для k-го по величине собственного значения каждая из этих функций меняет знак $k - 1$ раз. Собственные решения каждого из уравнений (2.6), (2.9) образуют полную систему в H_0.

Замечание 5. Рассмотрим в качестве примера течение Куэтта (1.4). В этом случае имеем

$$\omega(r) = a + b / r^2, \quad g(r) = -2a \tag{4.7}$$

Согласно теореме 4.1 получаем, что если цилиндры вращаются в одну и ту же сторону: $\omega_1 > 0$; $\omega_2 \geqslant 0$ (внешний цилиндр может покоиться), то вторичные стационарные течения возникают при некотором числе Рейнольдса, если выполнено условие

$$\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2 < 0 \tag{4.8}$$

Если же выполняется противоположное неравенство

$$\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2 > 0 \tag{4.9}$$

то бифуркации нет. Как известно (см. [10,11]), в этом случае течение Куэтта устойчиво относительно осесимметричных возмущений при любом числе Рейнольдса.

Приведем простое доказательство этого факта [1].

Рассмотрим нестационарные уравнения, соответствующие системе (1.8). Они получаются добавлением в левых частях второго, третьего и четвертого равенств (1.8) соответственно членов $-\lambda\,(\partial u_r / \partial t)$, $-\lambda\,(\partial u_0 / \partial t)$, $-\lambda\,(\partial u_z / \partial t)$. Умножая эти уравнения на u_r, $-2\omega / g\,(u_\theta)$, u_z, суммируя полученные равенства и интегрируя по области D $(r_1 < r < r_2;\ |z| < \pi / a_0)$, получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_D (u_r^2 + hu_\theta^2 + u_z^2)\,rdrdz = -\nu\int\limits_D \left[\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)^2 + \frac{u_r^2}{r^2} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2\right] rdrdz - \nu\int\limits_D \left[h\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{dh}{dr} + \frac{2h}{r}\right) v_\theta\,\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + h\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)^2\right] rdrdz \qquad \left(h = -\frac{2\omega}{g}\right) \tag{4.10}$$

Для того чтобы правая часть в (4.10) была отрицательна, а течение (1.4) устойчиво при любом числе Рейнольдса, достаточно, чтобы функционал

$$l(v) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \left[h\left(v' - \frac{v}{r}\right)^2 + \left(\frac{dh}{dr} + \frac{2h}{r}\right) vv'\right] rdr \tag{4.11}$$

был неотрицателен на множестве гладких функций $v\,(r)$, исчезающих при $r = r_1, r_2$. В частности, для этого нужно, чтобы функция h была неотрицательной. Но для течения Куэтта с учетом (4.7), (4.9) получим при $a > 0$

$$h = -\frac{2\omega}{g} = 1 + \frac{b}{ar^2} \geqslant 0, \qquad l(v) = \int\limits_{r_1}^{r_2} h\left(v' - \frac{v}{r}\right)^2 rdr > 0 \qquad (v' \neq 0)$$

Здесь доказана устойчивость течения (1.3) в линейном приближении. Однако, согласно результатам работы [12], отсюда вытекает и нелинейная устойчивость.

5. Неустойчивость. В этом пункте устанавливается, что при условиях (4.1), (4.2), обеспечивающих возникновение вторичных течений, основное течение (1.2) неустойчиво при достаточно больших числах Рейнольдса.

В [13] этот факт был получен в случае течения Куэтта при помощи ассимптотического интегрирования системы (5.1), (5.2) при $\lambda \to \infty$.

Как известно, дело сводится к исследованию спектра краевой задачи

$$(L - \alpha^2)^2\, u - \sigma\,(L - \alpha^2)\, u = 2\alpha^2\lambda\omega v, \qquad (L - \alpha^2)\, v - \sigma v = -\ \lambda g u \tag{5.1}$$

$$u = u' = 0 \ \ (r = r_1, r_2), \qquad v = 0\ (r = r_1, r_2) \tag{5.2}$$

Если при данном λ все собственные значения σ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ имеют отрицательные действительные части, то течение (1.2) устойчиво, присутствие хотя бы одного собственного значения с положительной действительной частью влечет за собой неустойчивость. Применимость метода в нелинейной задаче устойчивости обоснована в [12].

Теорема 5.1. Пусть выполняются условия (4.1) и (4.2). Тогда при любом $\sigma > -(\alpha^2 + \sigma_0)$ ($\sigma_0 > 0$ и зависит только от r_1 и r_2) существует последовательность значений $\lambda : \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots;\ \lambda_n \to \infty$ таких, что задача (5.1), (5.2) имеет нетривиальное решение.

[1] Небольшое изменение доказательства позволяет установить, что и в случае $\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2 = 0$ имеет место устойчивость.

Доказательство. Дифференциальные операторы в левых частях уравнений (5.1) допускают представления

$$(L-\alpha^2)^2 u - \sigma(L-\alpha^2) u = \frac{1}{r} \rho_0 \frac{d}{dr} \rho_1 \frac{d}{dr} \rho_2\rho_{0\sigma} \frac{d}{dr} \rho_{1\sigma} \frac{d}{dr} \rho_{2\sigma} u$$

$$(L-\alpha^2) v - \sigma v = \rho_{0\sigma} \frac{d}{dr} \rho_{1\sigma} \frac{d}{dr} \rho_{2\sigma} v \qquad (5.3)$$

где ρ_0, ρ_1, ρ_2 — функции, определенные в (3.1), а $\rho_{0\sigma}$, $\rho_{1\sigma}$, $\rho_{2\sigma}$ даются равенствами

$$r\rho_{0\sigma} = \rho_{2\sigma} = Y_1(r), \qquad \rho_{1\sigma} = \frac{r}{\rho_{2\sigma}{}^2} \qquad (5.4)$$

где $Y_1(r)$ — какое-нибудь решение уравнения

$$(L-\alpha^2-\sigma) Y_1 = 0 \qquad (5.5)$$

Если $\alpha^2+\sigma > -\sigma_0$, где σ_0 — первое собственное число дифференциального оператора $-L$ при втором условии (52), то уравнение (5.5) имеет положительное на отрезке $[r_1, r_2]$ решение Y_1 (если $\alpha^2+\sigma=\beta^2 \geqslant 0$, в качестве Y_1 берем просто $I_1(\beta_r)$).

Из (5.3) в силу результатов М. Г. Крейна [3, 4], следует, что соответствующие операторы Грина $G_{1\sigma}$, $G_{2\sigma}$ — осцилляционные. Теперь остается заметить, что краевая задача (5.1), (5.2) эквивалентна интегральному уравнению

$$u = \mu B_\sigma u, \quad B_\sigma = G_{2\sigma}\omega G_{1\sigma} g \qquad (5.6)$$

с осцилляционным оператором B_σ и снова сослаться на результаты из [5]. Теорема доказана.

Поступила 25 I 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М., Гостехиздат, 1956.
2. Юдович В. И. Пример рождения вторичного стационарного или периодического течения при потере устойчивости ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3, стр. 453—467.
3. Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. М.— Л., ГИТТЛ, 1950.
4. Крейн М. Г. О несимметрических осцилляционных функциях Грина обыкновенных дифференциальных операторов. Докл. АН СССР, 1939, т. 25, № 8, стр. 643—646.
5. Гантмахер Ф. Р. О несимметричных ядрах Келлога. Докл. АН СССР, 1936, т. 1 (X), № 1, стр. 3—5.
6. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Методы Ляпунова и Шмидта в теории нелинейных уравнений и их дальнейшее развитие. Успехи матем. наук, 1962, т. 17, вып. 2 (104), стр. 13—75.
7. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М., ГИТТЛ, 1957.
8. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. М., Изд. иностр. лит., 1962.
9. Ворович И. И., Юдович В. И. Стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости. Матем. сб., 1961, т. 53 (95), № 4, стр. 393—428.
10. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М. Изд. иностр. лит., 1958.
11. Synge J. L. On the stability of a viscous liquid between two rotating coaxial cylinders. Proc. Roy. Soc. A., 1938, vol. 167, p. 250—256.
12. Юдович В. И. Об устойчивости стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости. Докл. АН СССР, 1965, т. 161, № 5.
13. Крылов А. Л. Доказательство неустойчивости одного течения вязкой несжимаемой жидкости. Докл. АН СССР, 1963, т. 153, № 4, стр. 787—790.