

ИССЛЕДОВАНИЕ СЛАБО ВОЗМУЩЕННЫХ СВЕРХЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ЧИСЛЕ НЕРАВНОВЕСНЫХ ПРОЦЕССОВ

А. Н. Крайко

(Москва)

Плоским и осесимметричным сверхзвуковым неравновесным течениям, близким к равновесному однородному потоку, посвящено много работ. Винценти [1], Мур и Гибсон [2], И. П. Стаханов и Е. В. Ступоченко [3], Кларк [4], Дер [5] и Рихминг [6] исследовали обтекание плоской стенки и профиля. Мориока и Мурасаки [7, 8] рассмотрели плоские и осесимметричные сверхзвуковые струи. Интересные результаты по обтеканию тонких остроконечных тел произвольного поперечного сечения (в том числе и осесимметричных) получены Кларком [9]. Тонкие остроконечные тела вращения рассматривались также Р. А. Ткаленко [10] и Ю. В. Ходыко [11]. Наполитано [12], не решая конкретных задач обтекания, установил важные соотношения между некоторыми термодинамическими и кинетическими характеристиками среды (например, между разными скоростями звука) и вывел уравнение для потенциала скоростей.

В перечисленных работах определены параметры течения на поверхности профиля и тонкого тела вращения, на оси плоской струи и на характеристике, выходящей из передней точки тела, даны интегральные представления параметров течения и исследовано затухание возмущений на большом расстоянии от профиля в области между начальными замороженной и равновесной характеристиками. Однако все авторы, за исключением Р. А. Ткаленко и Наполитано, ограничивались случаем одного неравновесного процесса. Ниже исследование проведено для произвольного числа неравновесных процессов.

1. Рассмотрим сверхзвуковое стационарное течение невязкого и не-теплопроводного газа, в котором протекают неравновесные физико-химические процессы. Энтальпия h единицы массы газа определяется давлением p , плотностью ρ (или температурой T поступательных степеней свободы некоторого компонента газа) и n параметрами q (q_1, \dots, q_n), например, массовыми долями компонентов и энергиями различных степеней свободы. Будем изучать плоские и осесимметричные течения, близкие к однородному равновесному потоку, текущему слева направо. Пусть направление оси x прямоугольной системы координат x, y совпадает с направлением невозмущенного течения, в осесимметричном случае ось x — ось симметрии и начало искривления стенки, передняя кромка профиля или носик тела вращения расположены при $x = 0$. При $x = -\infty$ возмущения отсутствуют. Уравнения, описывающие течение, имеют вид

$$\begin{aligned} \rho u u_x + \rho v u_y &= -p_x, & \rho u v_x + \rho v v_y &= -p_y \\ (\rho u y^v)_x + (\rho v y^v)_y &= 0, & u(2h + w^2)_x + v(2h + w^2)_y &= 0 \\ u q_{ix} + v q_{iy} &= \tau_i^{-1} \omega_i(p, \rho, q) & (i=1, \dots, n) \\ h &= h(p, \rho, q), & w^2 &= u^2 + v^2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь u, v — проекции скорости на оси x и y ; индексы x и y приписаны соответствующим частным производным; $\nu = 0$ и 1 в плоском и осесимметричном случаях, выражения для h и ω_i известны, причем при равновесии все $\omega_i = 0$; $\tau_i \geq 0$ — времена релаксации — константы, обратно пропорциональные константам скоростей физико-химических процессов; если $\tau_i = \infty$, то q_i заморожено, если же $\tau_i = 0$, то q_i равновесно и определяется уравнением $\omega_i = 0$.

Все величины — безразмерные. Пусть u_∞° и ρ_∞° — размерные скорость и плотность невозмущенного потока, а l° — константа с размерностью длины. Приведение к безразмерному виду достигается делением x и y на l° ; скоростей — на u_∞° ; плотности — на ρ_∞° ; давления — на $\rho_\infty^\circ u_\infty^{\circ 2}$; энтальпии — на $u_\infty^{\circ 2}$; удельной энтропии s — на R и температуры — на $R^{-1} u_\infty^{\circ 2}$, где R — газовая постоянная одного из компонентов. Приведение к безразмерному виду параметров q_i проводится с учетом их размерностей, при этом константы τ_i становятся безразмерными. В задачах, не имеющих характерного линейного размера, $l^\circ = u_\infty^\circ \tau_k^\circ$, где τ_k° — размерное значение времени релаксации k -го процесса. В этом случае $\tau_k = 1$.

Систему (1.1) следует дополнить соотношениями на поверхностях разрыва. Пусть $\operatorname{tg} \theta = v/u$, и σ — угол наклона поверхности разрыва к оси x . Тогда их можно записать в виде

$$[\rho w \sin(\sigma - \theta)] = 0, \quad [w \cos(\sigma - \theta)] = 0$$

$$[p + \rho w^2 \sin^2(\sigma - \theta)] = 0, \quad [2h + w^2] = 0, \quad [q_i] = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

где $[\zeta]$ — разность ζ на разрыве.

2. Линеаризация (1.1) и (1.2) проводится обычным образом. Представляя каждый параметр как сумму его невозмущенного значения и малой добавки и сохраняя для добавок u, v, p, ρ, h и q те же обозначения, что и для самих параметров, получим вместо (1.1)

$$u_x = -p_x, \quad v_x = -p_y, \quad \rho_x + u_x + v_y + \nu v y^{-1} = 0, \quad h_x = -u_x$$

$$\tau_i q_{ix} = \omega_{ip} p + \omega_{i\rho} \rho + \sum_{j=1}^n \omega_{ij} q_j \quad (i = 1, \dots, n), \quad h = h_p p + h_\rho \rho + \sum_{j=1}^n h_j q_j$$

Здесь для $\zeta = \zeta(p, \rho, q)$ введены обозначения

$$\zeta_p = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial p} \right)_{\rho, q}, \quad \zeta_\rho = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \right)_{p, q}, \quad \zeta_i = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial q_i} \right)_{p, \rho, q_j \neq q_i}$$

При этом производные вычисляются для невозмущенного течения.

Линеаризуя (1.2), получим

$$[u] \operatorname{tg} \sigma - [v] + [\rho] \operatorname{tg} \sigma = 0, \quad [u] + [v] \operatorname{tg} \sigma = 0$$

$$2 [u] \sin^2 \sigma - [v] \sin 2\sigma + [\rho] \sin^2 \sigma + [p] = 0 \quad (2.2)$$

$$[h + u] = 0, \quad [q_i] = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

Три первых уравнения этой системы вместе с четвертым, переписанным в виде

$$[u] + h_p [p] + h_\rho [\rho] = 0$$

образуют систему линейных однородных уравнений для $[u]$, $[v]$, $[p]$ и $[\rho]$. Наклон поверхностей разрыва определяется условием ее нетривиального решения и равен

$$\operatorname{ctg} \sigma = \pm \beta_{\infty} \equiv \pm \sqrt{M_{\infty}^2 - 1} \quad \left(M_{\infty}^2 = c_{\infty}^{-2} \equiv \frac{1 - h_p}{h_p} \right) \quad (2.3)$$

Здесь c_{∞} — замороженная скорость звука, отнесенная к u_{∞}° , и, следовательно, M_{∞} — замороженное число Маха. Таким образом, как и в обычной газовой динамике, линии слабого разрыва совпадают с линиями Маха невозмущенного течения.

Далее из первого, четвертого и последнего уравнений (2.1) с учетом (2.2) и того, что при $x = -\infty$ течение не возмущено, находим, что всюду

$$p = h = -u, \quad \rho = -M_{\infty}^2 u - \sum_{j=1}^n a_j q_j \quad (a_j = h_j h_p^{-1}) \quad (2.4)$$

Отсюда и из второго уравнения (2.1) следует потенциальность течения. Если φ — потенциал, то

$$u = \varphi_x, \quad v = \varphi_y \quad (2.5)$$

Уравнения для φ и q получаются из оставшихся уравнений (2.1) и имеют вид

$$\beta_{\infty}^2 \varphi_{xx} - y^{-\nu} (y^{\nu} \varphi_y)_y = - \sum_{j=1}^n a_j q_{jx} \quad (2.6)$$

$$\tau_i q_{ix} = -\kappa_i \varphi_x + \sum_{j=1}^n \kappa_{ij} q_j \quad (i = 1, \dots, n)$$

Здесь константы κ_i и κ_{ij} определяются соотношениями

$$\kappa_i = M_{\infty}^2 \omega_{ip} + \omega_{ip}, \quad \kappa_{ij} = \omega_{ij} - a_j$$

Безвихревой характер течения согласуется с отсутствием приращения s удельной энтропии. Действительно, так как $s = s(p, h, q)$, то

$$s = \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_{h, q} p + \left(\frac{\partial s}{\partial h} \right)_{p, q} h + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial s}{\partial q_j} \right)_{p, h, q_i \neq q_j} q_j$$

Но с учетом приведения к безразмерному виду $(\partial s / \partial p)_{h, q} = -(\partial s / \partial h)_{p, q} = -T_{\infty}^{-1}$, а из условия термодинамического равновесия невозмущенного течения $(\partial s / \partial q_j)_{p, h, q_i \neq q_j} = 0$. Поэтому из (2.4), имеем $s = 0$. Отсюда следует также, что в данном приближении, как и в обычной газовой динамике, допустимы разрывы и с повышением и понижением давления.

Первое уравнение (2.6) можно преобразовать к форме, не содержащей q_j и их производных. Это достигается его n -кратным дифференцированием по x и исключением q_j из полученных уравнений, причем q_{jx} перед каждым дифференцированием заменяются их выражениями из (2.6). Найденное уравнение для φ будет второго порядка по y и $(n + 2)$ -го — по x .

Для получения условий подобия существенно число констант в (2.4) и (2.6). Кроме β_{∞} (или M_{∞}), таких констант имеется $3n + n^2$. Замена q_i на $a_i q_i$ и τ_i на $\tau_i a_i^{-1}$ и деление уравнений кинетики на коэффициенты при q_{ix} сокращает их число до $n + n^2$. Дальнейшее сокращение до $n(n + 3) / 2$ достигается применением соотношений Онсагера [13]. При записи полученных таким путем уравнений в форме (2.6) за τ_i каждого уравнения кинетики удобно брать величину, обратную модулю максимального по абсолютной величине коэффициента при φ_x и q_j в его правой части.

3. При $\beta_\infty^2 > 0$, т. е. при $M_\infty > 1$ система (2.6), кроме линий тока $y = \text{const}$, на которых выполняются последние n уравнений, имеет два семейства действительных характеристик. Если полные производные по y вдоль них обозначить штрихом, то уравнениями характеристик будут

$$x' \mp \beta_\infty = 0, \quad \mp \beta_\infty u' + v' + \sum_{j=1}^n a_j \tau_j^{-1} \left(\kappa_j u - \sum_{i=1}^n \kappa_{ji} q_i \right) + v v y^{-1} = 0 \quad (3.1)$$

Здесь и ниже верхний (нижний) знак соответствует характеристикам первого (второго) семейства. Совпадение поверхностей разрыва с характеристиками — следствие линейного приближения.

Так как при $x < 0$ тела, возмущающие течение, отсутствуют, то, в силу гиперболичности системы (2.6), оно остается невозмущенным всюду левее характеристик, выходящих из a — передней точки тела. Эти характеристики могут быть линиями разрыва, поэтому возмущения параметров течения при приближении к ним справа в общем случае отличны от нуля. Граничные условия получаются из (1.2), (2.3) и (2.5) и имеют вид

$$\beta_\infty \varphi_x \pm \varphi_y = 0, \quad \varphi = 0, \quad q = 0 \quad \text{при } x = \pm \beta_\infty (y - y_a) \quad (3.2)$$

Здесь индекс a приписан параметрам в точке a , условие $\varphi = 0$ следует из непрерывности потенциала.

Условия (3.2) надо дополнить условиями: непротекания — на границе твердого тела; постоянства давления — на границе струи, вытекающей в покоящуюся среду; симметрии — на оси течения (при истечении струи и при течении в канале) и ограниченности возмущений — на бесконечности. Если $y = y^\circ(x)$ — уравнение контура тела вращения, профиля или стенки канала, а p_a — разность давления среды, в которую происходит истечение, и давления невозмущенного потока, то эти условия записываются в виде

$$\varphi_y(x, y_a) \equiv v(x, y_a) = f(x) \equiv dy^\circ(x) / dx, \quad \varphi_x(x, y_a) \equiv u(x, y_a) = -p_a = \text{const} \quad (3.3)$$

$$\varphi_y(x, 0) \equiv v(x, 0) = 0 \quad \text{при } x \geq \beta_\infty y_a, \quad |\varphi_x|, |\varphi_y| < \infty \quad \text{при } x \geq \beta_\infty (y - y_a), \quad y \rightarrow \infty$$

В соответствии с (3.3) и (1.2), нарушение непрерывности граничных условий (например, излом контура) в точке b вызывает, вообще говоря, разрыв в ней всех параметров, кроме φ и q . Разрыв распространяется вдоль характеристики, выходящей из b . Изменение скачков параметров вдоль нее находится при помощи второго уравнения (3.1), справедливого с обеих сторон разрыва. Учитывая, что $[q_i] = 0$, получим

$$\mp \beta_\infty [u] + [v]' + [u] \sum_{j=1}^n a_j \kappa_j \tau_j^{-1} + v y^{-1} [v] = 0 \quad (3.4)$$

Записав второе уравнение (1.2) в виде

$$\pm \beta_\infty [u] + [v] = 0 \quad (3.5)$$

и решив линейное уравнение, являющееся результатом исключения $[v]$ из (3.4) и (3.5), найдем

$$[u] = [u]_b \left(\frac{y_b}{y} \right)^{1/2 v} \exp \left\{ \pm \frac{y - y_b}{2 \beta_\infty} \sum_{j=1}^n \frac{a_j \kappa_j}{\tau_j} \right\} \quad (3.6)$$

Здесь $[u]_b$ — разрыв u при $y = y_b$. Разрывы v , p , ρ и h пропорциональны $[u]$ и определяются по (2.5) и (3.5). Так как возмущение равновес-

ного течения не может безгранично расти с удалением от источника возмущений, то должно выполняться неравенство

$$\sum_{j=1}^n a_j \kappa_j \tau_j^{-1} \leq 0 \quad (3.7)$$

причем ввиду независимости неравновесных процессов знаки всех слагаемых должны совпадать. Вблизи равновесия ω_i пропорциональны частным производным энтропии по q_i , поэтому можно предположить, что (3.7) есть следствие условий устойчивости равновесного состояния.

Как видно из (3.6) и (3.7), скорость затухания возмущений растет с уменьшением τ_j и может быть весьма большой. Интересно, что для почти полного затухания достаточно выполнения неравенства $|y - y_b| \geq 2\beta_\infty \tau_j / |a_j \kappa_j|$ хотя бы для одного процесса. Отсюда, конечно, не следует, что при этом также быстро будут затухать и непрерывные возмущения правее замороженной характеристики.

Формула (3.6) показывает, что в осесимметричном случае возмущения при приближении к оси симметрии растут до бесконечности даже тогда, когда из-за затухания, вызванного неравновесностью, при конечных y они как угодно малы. Ввиду ограничений линейной теории этот результат не соответствует действительному течению и здесь требуется нелинейный анализ. То же положение наблюдается и в обычной газовой динамике с той разницей, что там возмущения растут монотонно.

4. Исследуем течение в окрестности начальной точки a и характеристики ac — границы возмущенной области (фиг. 1). В осесимметричном случае при $y_a = 0$ имеем остроконечное тело вращения, а при $y_a > 0$ — тело, близкое к цилиндру. В переменных

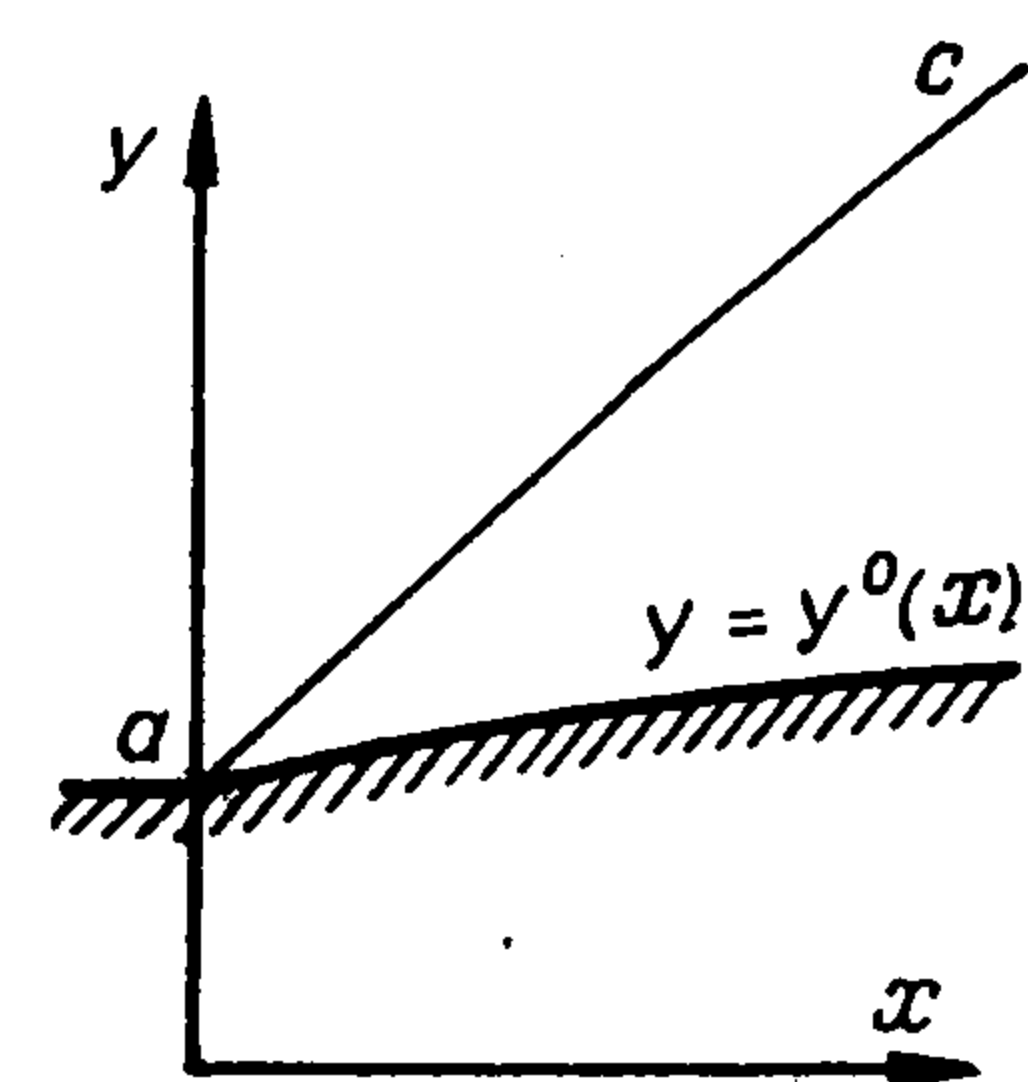
$$r = \sqrt{x^2 + (\eta - \eta_a)^2}, \quad \vartheta = \arccos(x/r), \quad \eta = \beta_\infty y \quad (4.1)$$

точке a соответствует $r = 0$, характеристика ac есть луч $\vartheta = \pi/4$, а компоненты скорости выражаются формулами

$$\begin{aligned} u &= \varphi_r \cos \vartheta - \varphi_\vartheta r^{-1} \sin \vartheta \\ v &= \beta_\infty (\varphi_r \sin \vartheta + \varphi_\vartheta r^{-1} \cos \vartheta) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Будем искать $\varphi(r, \vartheta)$ и $q_i(r, \vartheta)$ в виде рядов

$$\varphi(r, \vartheta) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\vartheta) r^k, \quad q_i(r, \vartheta) = \sum_{k=1}^{\infty} q_{ik}(\vartheta) r^k \quad (i=1, \dots, n) \quad (4.3)$$



Фиг. 1

Тогда граничные условия (3.2) на ac станут

$$\varphi_k(\pi/4) = q_{ik}(\pi/4) = 0 \quad (i=1, \dots, n, k=1, \dots) \quad (4.4)$$

Условие непротекания на контуре тела — первое равенство (3.3), будучи снесены на луч, касающийся тела в точке a , дает

$$k\varphi_k(\vartheta_a) \operatorname{tg} \vartheta_a + \varphi_k'(\vartheta_a) = \frac{\cos^{k-2} \vartheta_a}{\beta_\infty (k-1)!} y_a^{(k)} \quad (k=1, \dots) \quad (4.5)$$

где $\vartheta_a = \arccos(\beta_\infty f_a)$, штрихом обозначены производные по ϑ , и $y^{(k)} = d^k y^0(x) / dx^k$.

Уравнения для определения φ_k и q_{ik} получаются подстановкой разложений (4.3) в систему (2.6), записанную в переменных r и ϑ , и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях r . Из первого уравнения получим рекуррентную систему

$$\begin{aligned} & \eta_a^\nu \{k(k+2)\varphi_k \cos 2\vartheta - (2k\varphi_k \sin 2\vartheta + \varphi_k' \cos 2\vartheta)' + \\ & \quad + \beta_\infty^{-2} \sum_{i=1}^n a_i [kq_{ik-1} \cos \vartheta - (q_{ik-1} \sin \vartheta)']\} - \\ & - \nu \sin \vartheta \{(k-1)\varphi_{k-1} [1 - (k-3) \cos 2\vartheta] + \varphi_{k-1}' [\operatorname{ctg} \vartheta + 2(k-2) \sin 2\vartheta] + \\ & + \varphi_{k-1}'' \cos 2\vartheta - \beta_\infty^{-2} \sum_{i=1}^n a_i [(k-1)q_{ik-2} \cos \vartheta - (q_{ik-2} \sin \vartheta)']\} = 0 \quad (k=1, \dots) \quad (4.6) \end{aligned}$$

Уравнения для q_{ik} интегрируются и с учетом (4.4) дают

$$q_{ik}(\vartheta) = -\frac{\kappa_i}{\tau_i} \varphi_k(\vartheta) - \frac{\sin^k \vartheta}{\tau_i} \sum_{j=1}^n \kappa_{ij} \int_{\pi/4}^{\vartheta} \frac{q_{jk-1}(z)}{\sin^{k+1} z} dz \quad (i=1, \dots, n, k=1, \dots) \quad (4.7)$$

Учитывая, что $\varphi_k \equiv q_{ik} \equiv 0$ при $k \leq 0$, можно показать, что решение первого уравнения (4.6) при условиях (4.4) и (4.5) дает обтекание замороженным потоком либо конуса ($\nu = 1, y_a = 0$), либо клина (или тупого угла) — в противном случае. Соответственно имеем [14]:

при $\nu = 1, y_a = 0$

$$\varphi(r, \vartheta) = \frac{f_a \sin \vartheta_a}{\beta_\infty \sqrt{\cos 2\vartheta_a}} [\sqrt{\cos 2\vartheta} - \cos \vartheta \operatorname{Arch}(\operatorname{ctg} \vartheta)] r + \sum_{k=2}^{\infty} \varphi_k(\vartheta) r^k \quad (4.8)$$

при $\nu = 0$ или $\nu = 1$, но $y_a > 0$

$$\varphi(r, \vartheta) = \beta_\infty^{-1} f_a (\sin \vartheta - \cos \vartheta) r + \sum_{k=2}^{\infty} \varphi_k(\vartheta) r^k \quad (4.9)$$

В малой окрестности начальной точки течения определяется первым слагаемым, дающим замороженное течение. Остальные члены разложения при достаточно малых r не играют существенной роли. Из-за конечности скоростей неравновесных процессов данный результат является естественным и для тел конечной толщины был доказан ранее [15, 16].

Система (4.6) слишком сложна для аналитического построения решения при любом k . Однако в окрестности начальной характеристики решение может быть построено, так как $\vartheta = \pi/4$ — правильная особая точка каждого уравнения системы (при $\nu = 0$ для $k \geq 2$). Методы построения линейно независимых решений соответствующих однородных уравнений известны [17]. Из них и частного решения неоднородного уравнения, которое ищется в виде обобщенного степенного ряда, для каждого k строится решение, удовлетворяющее (4.4). Последовательное рассмотрение (4.6) и (4.7) показывает, что любое $\varphi_k(\vartheta)$, а следовательно и $\varphi(r, \vartheta)$, есть обобщенный степенной ряд по $(\vartheta - \pi/4)$ с показателем $3/2$ для остроконечного тела вращения и единица — в остальных случаях. Первые коэффициенты каждого ряда пропорциональны первому коэффициенту $\varphi_1(\vartheta)$, который находится из (4.8) и (4.9). После подстановки выражений для

$\varphi_k(\vartheta)$ в (4.3) ряд по r , дающий первый коэффициент обобщенного ряда для $\varphi(r, \vartheta)$, удается просуммировать. Предполагая, что остающиеся ряды по положительным степеням r и $(\vartheta - \pi/4)$ дают некоторую аналитическую функцию $\varphi^\circ(r, \vartheta)$, получим представления, справедливые вблизи начальной характеристики,

$$\varphi(r, \vartheta) = \frac{f_a \sin \vartheta_a}{\beta_\infty \sqrt{\cos 2\vartheta_a}} \left(\frac{\pi}{2} - 2\vartheta\right)^{1/2} r \left[2 + r \left(\vartheta - \frac{\pi}{4}\right) \varphi^\circ(r, \vartheta)\right] \times \exp\left(\frac{r}{2\sqrt{2}\beta_\infty^2} \sum_{j=1}^n \frac{a_j \kappa_j}{\tau_j}\right) \quad (4.10)$$

при $\nu = 1$, $y_a = 0$ и

$$\varphi(r, \vartheta) = \frac{\sqrt{2}f_a}{\beta_\infty} \left(\frac{\eta_a \sqrt{2}}{r + \eta_a \sqrt{2}}\right)^{1/2\nu} \left(\vartheta - \frac{\pi}{4}\right) r \times \left[1 + r \left(\vartheta - \frac{\pi}{4}\right) \varphi^\circ(r, \vartheta)\right] \exp\left(\frac{r}{2\sqrt{2}\beta_\infty^2} \sum_{j=1}^n \frac{a_j \kappa_j}{\tau_j}\right) \quad (4.11)$$

в остальных случаях.

Найденные выражения позволяют по (4.2) найти компоненты скорости как функции r и ϑ или, если воспользоваться (4.1), $-x$ и y . Для остроконечного тела вращения разрыв скоростей при переходе через начальную характеристику отсутствует. Это имеет место и в обычной газовой динамике, а для рассматриваемого случая было доказано Р. А. Ткаленко [10]. Однако (4.10) дает бóльшую информацию, чем формула (4.3) работы [10], и в то же время доказывает справедливость последней на любом расстоянии от оси симметрии. Производные u и v по ϑ на начальной характеристике бесконечны. В случае плоских тел и тел, близких к цилиндру, u и v , как следует из (4.11), разрывны, но их производные конечны. Затухание разрыва, разумеется, совпадает с (3.6).

5. Для исследования линеаризованных уравнений неравновесных течений широко применяется преобразование Лапласа. При этом можно исходить как из системы (2.6), так и из уравнения $(n + 2)$ -го порядка для потенциала. Выберем первую возможность.

При рассмотрении задач, соответствующих фиг. 1, вместо x и y за независимые переменные возьмем

$$\xi = x - \beta_\infty (y - y_a), \quad \eta = \beta_\infty y \quad (5.1)$$

В случае профиля или плоской стенки положим, как и для остроконечного тела вращения, $y_a = 0$. В остальных задачах примем $y_a = 1$, т. е. ординату точки a выберем за характерный линейный размер.

В новых переменных система (2.6) станет

$$2\varphi_{\xi\eta} - \varphi_{\eta\eta} + \nu\eta^{-1}(\varphi_\xi - \varphi_\eta) = -\beta_\infty^{-2} \sum_{j=1}^n a_j q_j \xi \quad (5.2)$$

$$\tau_i q_{i\xi} + \kappa_i \varphi_\xi = \sum_{j=1}^n \kappa_{ij} q_j \quad (i = 1, \dots, n)$$

Пусть s — комплексное переменное. Учитывая, что область возмущенного течения дается неравенством $\xi \geq 0$, введем изображения

$$\Phi(s, \eta) = \int_0^\infty \varphi(\xi, \eta) \exp(-s\xi) d\xi, \quad Q_i(s, \eta) = \int_0^\infty q_i(\xi, \eta) \exp(-s\xi) d\xi$$

При применении преобразования Лапласа специального рассмотрения требуют характеристики, являющиеся поверхностями разрыва и дающие в выражениях для изображений производных дополнительные слагаемые. Однако оказывается, что после применения преобразования Лапласа к (5.2) и подстановки вместо изображений производных их выражений такие слагаемые, в силу (3.2), (3.5) и непрерывности φ и q_n исчезают, а Φ и Q определяются уравнениями

$$\eta\Phi'' + (v - 2s\eta)\Phi' - vs\Phi = s\eta\beta_\infty^{-2} \sum_{j=1}^n a_j Q_j \quad (5.3)$$

$$\sum_{j=1}^n (\kappa_{ij} - s\tau_i \delta_{ij}) Q_j = \kappa_i s\Phi \quad (i = 1, \dots, n)$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера, штрихом обозначены производные по η . Уравнения (5.3) позволяют выразить все Q_i через Φ

$$Q_i = sD_i D^{-1} \Phi \quad (i = 1, \dots, n) \quad (5.4)$$

$$D = D(s) = \det \|d^{rt}\|, \quad D_i = D_i(s) = \det \|d_i^{rt}\| \quad (i, r, t = 1, \dots, n)$$

$$d^{rt} = \kappa_{rt} - s\tau_r \delta_{rt}, \quad d_i^{rt} = d^{rt} \quad (t \neq i), \quad d_i^{ri} = \kappa_r$$

Вычисляя старшие члены D и D_i , которые есть многочлены n -й и $(n-1)$ -й степеней, найдем, что при больших $|s|$

$$D_i D^{-1} = -\kappa_i \tau_i^{-1} s^{-1} + o(s^{-1}) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (5.5)$$

В то же время без ограничения общности можно считать $D(0) \neq 0$, ибо равенство $D(0) = 0$ означает линейную зависимость правых частей уравнений кинетики системы (5.2) и, следовательно, позволяет сократить их число и число параметров q без повышения порядка оставшихся уравнений. Как правило, равенство $D(0) = 0$ показывает, что при выборе q их количество превышало минимально необходимое, т. е. не были использованы конечные связи типа условий сохранения химических элементов.

Подставив (5.4) в правую часть первого уравнения (5.3), получим

$$\eta\Phi'' + (v - 2s\eta)\Phi' - s(v + s\eta B)\Phi = 0 \quad \left(B = B(s) = D^{-1} \beta_\infty^{-2} \sum_{j=1}^n a_j D_j \right) \quad (5.6)$$

В соответствии с (5.5) при больших $|s|$

$$B(s) = -s^{-1} \beta_\infty^{-2} \sum_{j=1}^n a_j \kappa_j \tau_j^{-1} + o(s^{-1}) \quad (5.7)$$

Делая, как и в [10], подстановку $\Phi = Z \exp(s\eta)$ вместо (5.6), получим уравнение

$$\eta Z'' + vZ' - \eta s^2 \sigma^2(s) Z = 0 \quad (\sigma^2 = 1 + B)$$

решения которого выражаются через экспоненты (при $v = 0$) или цилиндрические функции (при $v = 1$). Коэффициенты перед линейно независимыми решениями определяются граничными условиями (3.3) на поверхности тела и при $\eta \rightarrow \infty$. При рассмотрении условия на бесконечности учитывается неравенство (3.7). Потенциал φ находится по Φ при

помощи обратного преобразования. Для обтекания верхней поверхности профиля получаем

$$\varphi(\xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{s_0-i\infty}^{s_0+i\infty} \frac{F(s)}{s\sigma} \exp\{s[(1-\sigma)\eta + \xi]\} ds \quad (5.8)$$

Здесь интегрирование ведется вдоль прямой $\operatorname{Re} s = s_0$, лежащей правее всех особенностей подынтегрального выражения; $F(s)$ такова, что, если L^{-1} символ обратного преобразования, то

$$L^{-1}[F(s)] = \beta_\infty^{-1} f(\xi) \equiv \beta_\infty^{-1} dy^\circ(\xi) / d\xi \quad (5.9)$$

Аналогично для тела, близкого к цилиндру,

$$\varphi(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s_0-i\infty}^{s_0+i\infty} \frac{iF(s) H_0^{(1)}(is\eta\sigma) \exp[s(\xi + \eta - \beta_\infty)]}{s\sigma H_1^{(1)}(is\beta_\infty\sigma)} ds \quad (5.10)$$

где $F(s)$ определяется по (5.9), а $H_0^{(1)}$ и $H_1^{(1)}$ — цилиндрические функции третьего рода (функции Ханкеля).

Для остроконечного тела вращения (5.11)

$$\varphi(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s_0-i\infty}^{s_0+i\infty} iF(s) H_0^{(1)}(is\eta\sigma) \exp[s(\xi + \eta)] ds, \quad L^{-1}[F(s)] = -\frac{\pi [y^{\circ 2}(\xi)]}{4}$$

Эту формулу можно получить и из результатов работы [10]. Интегральные представления u и v находятся дифференцированием (5.8), (5.10) и (5.11) с учетом (2.5) и (5.1).

Во внутренних задачах за характерный размер возьмем ординату точки a , а ξ и η определим равенствами

$$\xi = x + \beta_\infty(y - 1), \quad \eta = \beta_\infty y \quad (5.12)$$

Граничными условиями будут третье равенство (3.3) — на оси потока и первое или второе — при $y = 1$. Область возмущенного течения вновь лежит при $\xi \geq 0$.

В итоге для течения в канале получим

$$\varphi(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s_0-i\infty}^{s_0+i\infty} \frac{1}{s} F(s) G(s, \eta) \exp[s(\xi - \eta + \beta_\infty)] ds \quad (5.13)$$

где

$$G(s, \eta) = \begin{cases} \sigma^{-1} \operatorname{ch}(s\eta\sigma) / \operatorname{sh}(s\beta_\infty\sigma) & \text{при } \nu = 0 \\ i\sigma^{-1} J_0(is\eta\sigma) / J_1(is\beta_\infty\sigma) & \text{при } \nu = 1 \end{cases} \quad (5.14)$$

Здесь $F(s)$ определяется по (5.9), J_0 и J_1 — цилиндрические функции первого рода (функции Бесселя).

Если под $G(s, \eta)$ и $F(s)$ понимать

$$G(s, \eta) = \begin{cases} \operatorname{ch}(s\eta\sigma) / \operatorname{ch}(s\beta_\infty\sigma) & \text{при } \nu = 0 \\ J_0(is\eta\sigma) / J_0(is\beta_\infty\sigma) & \text{при } \nu = 1 \end{cases} \quad (5.15)$$

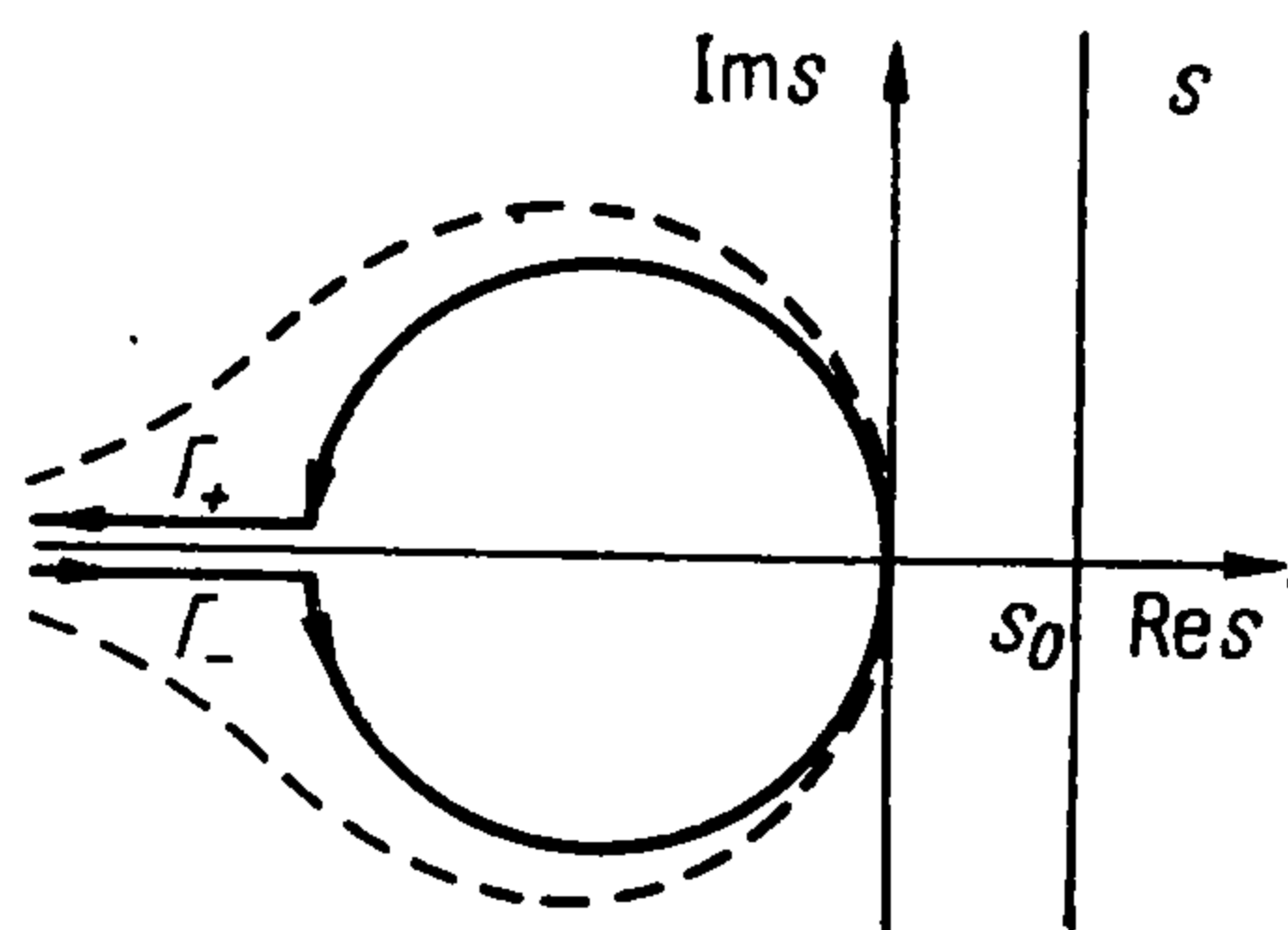
$$L^{-1}[F(s)] = -p_a \quad (5.16)$$

то (5.13) сохраняется и для струи. Интегральные представления u и v получаются из (2.5) и (5.13) с учетом (5.12) и (5.14)–(5.16). Представления q во всех случаях находятся из полученных выражений при помощи (5.4). Вместо функций Ханкеля и Бесселя в (5.10), (5.11), (5.14) и (5.15) можно использовать модифицированные функции Бесселя I и K , однако при комплексном s их аргументы будут комплексными.

6. Интегральные представления можно использовать для определения полей параметров течения. При этом весьма полезной оказывается теорема умножения, применение которой сводит решение к нахождению оригиналов от выражений, не содержащих $F(s)$. Например, для плоской стенки из (5.8) и (5.9) получим

$$v(\xi, \eta) = f_a \psi(\xi, \eta) + \sum (f_+ - f_-)_b \psi(\xi - \xi_b, \eta) + \int_0^\xi f'(t) \psi(\xi - t, \eta) dt \quad (6.1)$$

Здесь b — точка излома контура, f_- и f_+ — значения y'' до и после излома, суммирование проводится по всем точкам излома, а



Фиг. 2

$$\psi(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s_0 - i\infty}^{s_0 + i\infty} \frac{1}{s} \exp\{s[(1 - \sigma)\eta + \xi]\} ds \quad (6.2)$$

Аналогичные формулы получаются и в других задачах и не только для v , но и для u .

Вид $\psi(\xi, \eta)$ во многом зависит от вида функции $\sigma(s) = \sqrt{1 + B(s)}$. Так как $B(s)$ — отношение многочленов $(n-1)$ -й и n -й степеней, то $\sigma^2(s)$ есть отношение многочленов n -й степени. Если k° и k — число разных корней s_j° и s_j числителя и знаменателя, а k_j° и k_j — их кратности, то

$$\sigma^2(s) = \prod_{j=1}^{k^{\circ}} (s - s_j^{\circ})^{k_j^{\circ}} / \prod_{j=1}^k (s - s_j)^{k_j} \quad (6.3)$$

Коэффициенты многочленов числителя и знаменателя действительны, поэтому их корни или действительны, или комплексно сопряжены, а $\sigma(\bar{s}) = \overline{\sigma(s)}$. Последнее позволяет заменить интеграл в (6.2) некоторым интегралом по верхней части контура ($\text{Im } s \geq 0$), что справедливо для любого контура, симметричного относительно действительной оси. Функция $\sigma(s)$ неоднозначна. Однозначная ветвь выделяется введением ряда разрезов, соединяющих нули числителя и знаменателя и лежащих в конечной части плоскости s . В силу (5.7) прямую $\text{Re } s = s_0$ в (6.2) при $\xi > 0$ можно заменить контуром из окружности, содержащей все корни s_j и s_j° , и прямых Γ_- и Γ_+ (фиг. 2). Интегралы по Γ_- и Γ_+ сокращаются, и контур в (6.2) сводится к окружности. Ранее эта возможность отмечалась Кларком [4]. Переходя к верхней половине окружности и интегрируя по действительной переменной, например по дуге окружности, представим $\psi(\xi, \eta)$ действительным интегралом с конечными пределами, который можно найти численно. Если все корни (6.3) лежат в левой полуплоскости, то окружность можно провести через точку $s = 0$, добавив к интегралу вклад полюса в начале координат, равный $1/2$. Такую же замену контура можно провести и для заостренных тел вращения, однако здесь параметры на поверхности тела можно найти и другим путем, если воспользоваться разложением $H_0^{(1)}$ при малых η . Как и в [10], получим

$$u(x, y^{\circ}) = \frac{1}{2\pi} S''(x) \ln \frac{y^{\circ}(x) \beta_{\infty}}{2} + \\ + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} S''(x-t) \left[\ln \frac{\sigma(0)}{t} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k k_j \text{Ei}(s_j t) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k^{\circ}} k_j^{\circ} \text{Ei}(s_j^{\circ} t) \right] dt$$

Здесь $Ei(z)$ — интегральная показательная функция, $S(x) = \pi y^{\circ 2}(x)$ — площадь поперечного сечения; предполагается, что $S'(x)$ и $S''(x)$ непрерывны¹. Случай, рассмотренный в [10], соответствует $k_j = k_j^{\circ} = 1$. Для конуса $S(x) = \pi \theta^2 x^2$, и

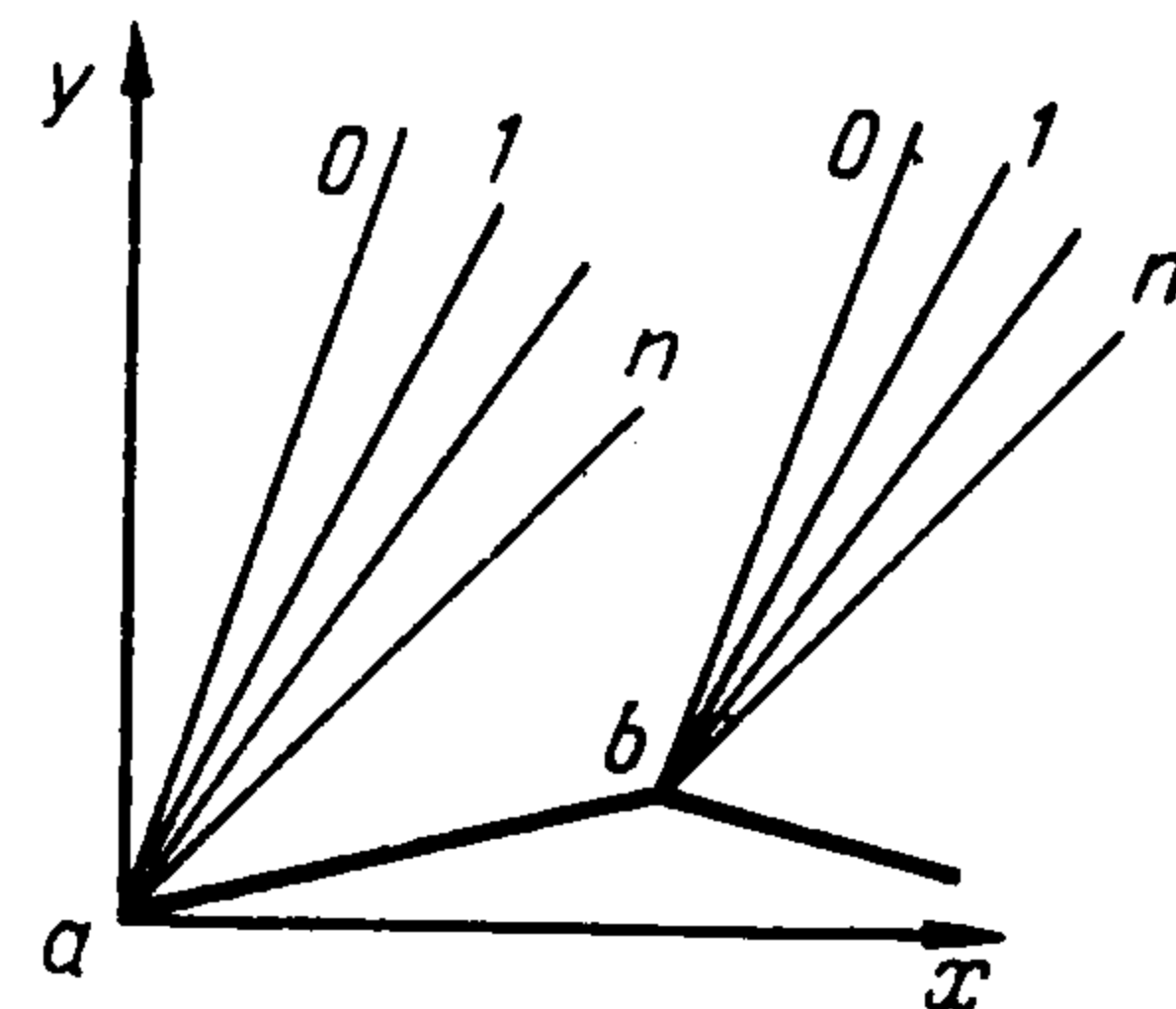
$$u(x, y^{\circ}) = \theta^2 \ln \frac{\theta \beta_{\infty} \sigma(0)}{2} + \frac{\theta^2}{2} \left[\sum_{j=1}^k k_j Ei(s_j x) - \sum_{j=1}^{k^{\circ}} k_j^{\circ} Ei(s_j^{\circ} x) \right]$$

Так как влияние неравновесности при $x \rightarrow \infty$ должно исчезать, то из двух последних формул следует, что все корни (6.3) лежат в левой полуплоскости. Данное свойство, как и неравенство (3.7), по-видимому, можно получить и из условий устойчивости термодинамического равновесия.

После определения u значения q находятся в соответствии с (5.4)

$$q_i(\xi, \eta) = \int_0^{\xi} u(t, \eta) \psi_i(\xi - t) dt \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$\psi_i(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s_0 - i\infty}^{s_0 + i\infty} \frac{D_i(s)}{D(s)} \exp(s\xi) ds$$



Фиг. 3

и легко находятся через вычеты в точках s_1, \dots, s_k .

7. Применим интегральные представления] для определения свойств течения вдали от тела (при больших η). Кроме того, при их помощи можно исследовать течение при $\xi = 0$ и $\xi \rightarrow \infty$. Однако первый случай подробно рассматривался в п. п. 3 и 4, а во втором из соответствующей предельной теоремы операционного исчисления легко показать, что если существуют постоянные предельные значения параметров течения, то они равновесны, т. е. получаются из (2.6) при $\tau_1 = \dots = \tau_n = 0$.

Система (2.6) описывает течение при любых τ . Если $\tau_n = 0$, то ее можно переписать, исключив при помощи последнего уравнения q_n . Новая система отличается от (2.6) числом уравнений и коэффициентами, которые определяются через те же частные производные, что и исходные, если считать q_n функцией $p, \rho, q_1, \dots, q_{n-1}$, в силу $\omega_n(p, \rho, q) = 0$.

Далее можно положить $\tau_{n-1} = \tau_n = 0$ и т. д. Соответствующим M_{∞} и β_{∞} припишем индексы $1, \dots, n$. При этом $\beta_{\infty n}$ соответствует равновесному течению, $\beta_{\infty n-1}$ — течению, в котором равновесны все q_i , кроме q_1 , и т. д.

Как следует из результатов работы [12],

$$M_{\infty n} > \dots > M_{\infty}, \quad \beta_{\infty n} > \dots > \beta_{\infty} \quad (7.1)$$

Поэтому соответствующие характеристики расположены так, как показано на фиг. 3, где цифры $0, \dots, n$ приписаны характеристикам с наклоном $\beta_{\infty}, \dots, \beta_{\infty n}$.

Введем также частично замороженные течения с $\tau_1 = \infty, \tau_2 = \tau_3 = \infty, \dots$ и припишем индексы $1, 2, 3, \dots, n$ функциям $B(s)$ и $\sigma(s)$, причем $B_n(s) = 0$ и $\sigma_n(s) = 1$. В соответствии с данными определениями, исходным $\beta_{\infty}, M_{\infty}, B(s)$ и $\sigma(s)$ следовало приписать индекс 0. Можно показать, что

$$\beta_{\infty k} = \beta_{\infty} \sigma_{n-k}(0) \quad (k = 0, \dots, n) \quad (7.2)$$

Из (7.1) и (7.2) имеем, что $\sigma_k(0) > 1$ при $k < n$.

¹ В [10] в выражении (5.5) ошибочно переставлены корни s_j и s_j° в аргументах Ei .

Рассмотрим обтекание профиля. При этом q и τ введем, как сказано в конце п. 2, параметры q пронумеруем в порядке убывания τ , и за l° примем $u_\infty \tau_1$. Тогда коэффициенты в $B(s)$ не будут превосходить единицы.

Естественно ожидать, что вдали от профиля течение близко к равновесному и влияние начальной точки левее первой равновесной характеристики мало. Для выяснения этого вопроса рассмотрим поведение $\psi(\xi, \eta)$ при большом y и конечном или растущем медленнее, чем y , $\delta = x - \beta_{\infty n} y$. В переменных δ и y

$$\psi(\delta, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s_0 - i\infty}^{s_0 + i\infty} \frac{1}{s} \exp(s\delta) \exp\{ys[\beta_{\infty n} - \beta_{\infty}\sigma(s)]\} ds \quad (7.3)$$

В силу соотношения (7.2) точка $s = 0$ является точкой перевала функции $s[\beta_{\infty n} - \beta_{\infty}\sigma(s)]$. Как и для одного неравновесного параметра [4], при $s = 0$ контур наискорейшего спуска (штриховая кривая фиг. 2) касается мнимой оси, а при удалении от $s = 0$ обе его ветви асимптотически приближаются к отрицательному лучу действительной оси.

Пусть $s = 0$ — единственная или наивысшая точка перевала. Заменяя контур интегрирования в (7.3) контуром наискорейшего спуска и учтя вычет в начале координат, как и в [4], получим

$$\psi(x, y) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \frac{x - \beta_{\infty n} y}{\sqrt{\alpha y}} \quad \left(\alpha = - \frac{2\beta_{\infty}^2 B_s(0)}{\beta_{\infty n}} \right) \quad (7.4)$$

Здесь $B_s(s) = dB(s)/ds$ и, следовательно,

$$B_s(0) = b_1 + b_2 \tau_2 + \dots + b_n \tau_n$$

Постоянные b_i будут порядка единицы. В соответствии с предположением о характере точки перевала, $B_s(0) < 0$ и $\alpha > 0$. Отличие (7.4) от случая одного неравновесного процесса [3, 4] заключено в виде $B_s(0)$. Как и там, из-за быстрого стремления $\operatorname{erf} z$ при $z < 0$ к -1 возмущения между начальной замороженной и равновесной характеристиками быстро затухают, а отнесенная к y ширина переходной зоны вблизи равновесной характеристики убывает как $y^{-1/2}$. Отметим, что условие $y \gg 1$, необходимое для справедливости (7.4), не исключает весьма малых размерных значений y при больших скоростях неравновесных процессов.

Если $\tau_m \gg \tau_{m+1}$, т. е. при большом отличии скоростей двух групп процессов, то первые m будут практически заморожены, а в отношении остальных следует ожидать картину, аналогичную рассмотренной.

Пусть $\delta = x - \beta_{\infty n-m} y$. Можно показать, что

$$\begin{aligned} \psi(\delta, y) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{s_0 - i\infty}^{s_0 + i\infty} \frac{1}{s} \exp(s\delta) \exp\{ys[\beta_{\infty n-m} - \beta_{\infty}\sigma(s)]\} ds = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{s_0 - i\infty}^{s_0 + i\infty} \frac{1}{s} \exp(s\delta) \exp\{ys[\beta_{\infty n-m} - \beta_{\infty}\sigma_m(s)]\} ds + O\left(\frac{y}{\tau_m}\right) \end{aligned}$$

После замены s на $s\tau_{m+1}$ последний интеграл при $y \gg \tau_{m+1}$ сводится к интегралу с большим параметром y/τ_{m+1} , который исследуется так же, как (7.3).

Взяв за характерный размер $u_{\infty}^{\circ} \tau_{m+1}^{\circ}$, получим

$$\psi(x, y) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \frac{x - \beta_{\infty n-m} y}{\sqrt{\alpha y}} \quad \left(\alpha = - \frac{2\beta_{\infty}^2 B_{ms}(0)}{\beta_{\infty n-m}} \right) \quad (7.5)$$

В отличие от (7.4), точность последней формулы с ростом y повышается лишь при $y \ll \tau_m$. В дальнейшем она нарушается, и при $y \gg 1 > \tau_m$ течение описывается формулой (7.4). Аналогично, при $\tau_1 \gg \tau_2 \gg \dots \gg \tau_n$ наблюдается ступенчатый переход от одной частично равновесной характеристики к другой. В силу (6.1), все сказанное справедливо и для внутренних точек излома, причем перенос начала координат в рассматриваемую точку сохраняет (7.4) и (7.5).

Автор признателен А. Б. Ватажину за полезные обсуждения.

Поступила 12 I 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Vincenti W. G. Non-equilibrium flow over a wavy wall. J. Fluid. Mech., 1959, vol. 6, part 4, p. 481—496.
2. Moore F. K., Gibson W. E. Propagation of weak disturbances in gas subject to relaxation effects. J. Aerospace Sci., 1960, vol. 27, No. 2, p. 117—127.
3. Стаханов И. П., Ступоченко Е. В. О структуре линий Маха в релаксирующих средах. Докл. АН СССР, 1960, т. 134, № 5, стр. 1044—1047.
4. Clark J. F. The linearized flow of a dissociating gas. J. Fluid. Mech., 1960, vol. 7, part 4, p. 577—595.
5. Der J. J. Linearized supersonic nonequilibrium flow past an arbitrary boundary. NASA, Technical report R-119, 1961.
6. Ruyhing I. L. On slender airfoil theory for nonequilibrium flow. J. Aerospace Sci., 1962, vol. 29, No. 9, p. 1076—1080.
7. Morioka S. Supersonic jet of a ideal dissociating gas with finite reaction rate. J. Phys. Soc. Japan, 1963, vol. 18, No. 2, p. 297—303.
8. Murasaki T., Morioka S. Linearized non-equilibrium flow a partially ionized gas with a radiative loss. J. Phys. Soc. Japan, 1965, vol. 20, No. 8, p. 1476—1487.
9. Clark J. F. Relaxation effects on the flow over slender bodies. J. Fluid. Mech., 1961, vol. 11, part 4, p. 577—603.
10. Ткаленко Р. А. Сверхзвуковое неравновесное течение газа около тонких тел вращения. ПМТФ, 1964, № 2, стр. 132—138.
11. Ходыко Ю. В. Обтекание тонкого конуса вращения релаксирующим газом. Докл. АН БССР, 1964, т. 8, № 8, стр. 509—513.
12. Napolitano L. G. Generalized velocity potential equation for plurireacting mixtures. Arch. Mech. Stosowanej, 1964, vol. 16, No. 2, p. 373—390.
13. Де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. Изд «Мир», 1964.
14. Зауер Р. Течения сжимаемой жидкости. Изд. иностр. лит., 1954.
15. Стулов В. П. Обтекание выпуклого угла идеально диссоциирующим газом с учетом неравновесности. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1962, № 3, стр. 4—10.
16. Архипов В. Н., Хорошко К. С. Метод учета релаксации в задаче об обтекании конуса. ПМТФ, 1962, № 6, стр. 121—124.
17. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа, ч. 1. Физматгиз, 1962.