Прикладная математика и механика. Том 30, 1966

К ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО ОСРЕДНЕНИЯ УПРАВЛЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Ю. В. Кожевников

(Казань)

Полнота оптимизации управляемых систем зависит от уровня располагаемой информации об условиях их функционирования. Результаты измерений и предсказаний состояний систем и взаимодействующей с ними среды, а также управляющие воздействия неизбежно содержат неконтролируемые составляющие — случайные инструментальные ошибки, помехи и т. п. Таким образом, информация о прошлом, настоящем и будущем систем и среды может быть полной лишь в той мере, в какой могут быть полными сведения о случайных событиях. Отсюда оптимизация управляемых систем не может не сводиться в конечном счете к оптимальному осреднению их управлений в том смысле, что речь должна идти о надлежащем формировании осредненного значения управляющего воздействия, единого для всех реализующихся состояний системы, пока последние не выходят за пределы некоторых границ, например, зоны нечувствительности измерителей, и критерий оптимизации должен предусматривать достижение экстремума одной из осредненных характеристик системы [1,2].

Следует иметь в виду и другую сторону вопроса, связанную с тем, что ряд систем предназначается для использования в различных условиях и выполнения различных целей при неизменном алгоритме управления. Здесь естественно позаботиться о том, чтобы управление минимизировало осредненное значение потерь в различных вариантах использования системы [3].

Проблема оптимального осреднения управлений имеет различные аспекты. В сущности, сюда можно отнести и детерминистскую постановку вопроса как соответствующую минимальному уровню использования информации о действительных условиях осуществления процессов, представленную лишь математическими ожиданиями определяющих функций и параметров.

Ниже развивается понятие оптимального осреднения управлений работ [1-4] и предлагается общий подход к решению задач на базе доказываемого принципа оптимального осреднения управлений (теорема 2). В результате открывается возможность для постановки и решения новых прикладных задач.

Так, в § 4 разобрана ранее не рассматривавшаяся в литературе задача об оптимизации систем программного управления «в целом», когда невозмущенное движение и закон регулирования возмущенного движения оптимизируются по единому критерию с учетом их взаимосвязей.

Механическую сущность и одну из возможных областей применения развиваемой ниже теории характеризует также следующий стохастический вариант примера работы [5], где отыскивается реактивное ускорение $u = u(t)$ точки переменной массы, движущейся в бессиловом поле с постоянной затратой мощности и минимальном значении функционала

$$J_0 = \int_{t_0}^{t_1} u^2 dt \qquad (0.1)$$

при условии, что положение $x_1 = x_1(t)$, скорость $x_2 = x_2(t)$ и цель управления точки определяются уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = u, \qquad x_1(t_0) = x_{10}, \qquad x_2(t_0) = x_{20} \qquad (0.2)$$

$$x_1(t_1) = x_{11}, \qquad x_2(t_1) = x_{21} \qquad (0.3)$$

Здесь t_0, t_1, x_{i0}, x_{i1} $(i = 1,2)$ — заданные числа. В действительности x_1, x_2 обычно будут случайными функциями времени $x_1 = X_1(t)$, $x_2 = X_2(t)$, определяемыми уравнениями, заменяющими систему (0.2): (0.4)

$$X_1^{\cdot} = X_2, \qquad X_2^{\cdot} = u + u^l + \xi_1 + \xi_2, \qquad X_1(t_0) = x_{10} + L_1, \qquad X_2(t_0) = x_{20} + L_2$$

Здесь L_1, L_2 — случайные возмущения параметров начального состояния точки; u^l — реактивное ускорение, создаваемое корректирующей двигательной установкой в зависимости от реализаций L_1, L_2 и предназначенное для компенсации последствий случайных возмущений параметров начального состояния точки; $\xi_i = \xi_i(t)$ — погрешность воспроизведения реактивного ускорения — случайная функция времени, которая может быть представлена в виде канонического разложения [4] с детерминированными координатными функциями $\xi_{ij}(t)$ и случайными коэффициентами P_{ij}.

Так так управляющие воздействия u и u^l формируются независимо от реализаций $\xi_i(t)$, то точное выполнение граничных условий вида (0.3), т. е. $X_1(t_1) = x_{11}$, $X_2(t_1) = x_{21}$ невозможно. Таким образом, от условий (0.3) следует перейти к выполнению соотношений

$$M(X_{11} \mid L_1, L_2) = x_{11}, \qquad M(X_{21} \mid L_1, L_2) = x_{21}$$

или

$$M(X_{i1} - x_{i1} \mid L_1, L_2) = 0 \qquad (i = 1, 2) \qquad (X_{i1} = X_i(t_1)) \tag{0.5}$$

Здесь $M(X_{i1} - x_{i1} \mid L_1, L_2)$ — условное математическое ожидание случайной величины $X_{i1} - x_{i1}$.

Качество управления естественно оценивать значением функционала

$$J = M\left\{\int_{t_0}^{t_1} [(u + \xi_1)^2 + \alpha(u^l + \xi_2)^2]\, dt\right\} \tag{0.6}$$

Вводя функцию $X_3(t)$, определяемую из уравнений

$$X_3^{\cdot} = (u + \xi_1)^2 + \alpha(u^l + \xi_2)^2, \qquad X_3(t_0) = 0 \tag{0.7}$$

получим

$$J = M(X_{31}) \qquad (X_{31} = X_3(t_1), \ \alpha = \text{const} > 0) \tag{0.8}$$

Теперь видно, что пример работы [5] в рассматриваемом здесь стохастическом варианте приводится к решению следующей специфической оптимальной задачи: для системы (0.4), (0.7) найти управляющие функции $u = u(t)$, $u^l = u^l(t, L_1, L_2)$, которые доставляют минимум функционалу (0.8) при соблюдении граничных условий (0.5). Легко убедиться, что эта задача — частный случай рассматриваемой ниже общей проблемы, формулировке и решению которой посвящается настоящая статья.

§ 1. Пусть имеется управляемая система, предназначенная для реализации функционалов

$$J_i = f_i(\mathbf{X}_1, a, a^l, T^l, P, L) \qquad (i = 0, \ldots, k_0) \tag{1.1}$$

определяемых уравнениями движения

$$X_i^{\cdot} = \varphi_i(t, X, v, v^l, P, L), \qquad X_i(t_0^l) = \psi_i(P, L), \qquad \mathbf{X}_1 = [X_{i1} = X_i(t_1^l)]$$
$$(t_0^l \leqslant t \leqslant t_1^l; \ i = 1, \ldots, n) \tag{1.2}$$

Здесь $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — непрерывная случайная вектор-функция;

$$T^l = (t_0^l, t_1^l), \qquad v = [a = (a_i), \ u = (u_j)] \qquad (i = 1, \ldots, m; \ j = 1, \ldots, r)$$
$$v^l = [a^l = (a_i^l), \ u^l = (u_j^l)] \qquad (i = 1, \ldots, m_0; \ j = 1, \ldots, r_0)$$

управляющие параметры, причем, $a = \text{const}$, а $u = u(t)$, $u^l = u^l(t, L)$, $a^l = a^l(L)$, $T^l = T^l(L)$ из открытого ядра области U ограниченных кусочно-непрерывных кусочно-гладких функций с конечным числом точек разрыва; f_i, φ_i, ψ_i, f — непрерывные вместе с двумя производными функции: $P = (P_i)$, $L = (L_i)$ — случайные параметры, заданные соответственно в областях Ω_p и Ω_l плотностью распределения $f = f_p(p \mid l) f_l(l)$, где $f_p(p \mid l)$ — условный закон распределения P.

Подчеркнем различие управлений v и v^l, T^l: первое формируется независимо от реализаций P, L, определяя программу движения и номинальные конструктивные параметры системы; второе не зависит от P, но учитывает реализации L и обладает тем самым регулирующими свойствами.

Как видно, функционалы (1.1) — случайные величины, характеристики которых определяются не только значениями P и L, но и видом управления v, v^l, T^l. Назначение многих управляемых систем можно выразить уравнениями

$$M[f_i(X_1, a, a^l, T^l, P, L)] = 0, \quad M[f_j(X_1, a, a^l, T^l, P, L) \mid l] = 0 \qquad (1.3)$$
$$(i = 1, \ldots, k; \; j = k+1, \ldots, k_0)$$

а качество их оценивать функционалами

$$J^l = M[f_0(X_1, a, a^l, T^l, P, L) \mid l] \qquad (1.4)$$

$$J = M[f_0(X_1, a, a^l, T^l, P, L)]] \qquad (1.5)$$

Здесь M — знак математического ожидания; $M(f_i/l)$ — условное математическое ожидание случайной величины $f_i(X_1, a, a^l, T^l, P, L)$.

Если существует семейство допустимых (удовлетворяющих (1.3)) управлений системы (1.2), то может быть поставлена задача о выборе того из них, которое доставляет максимум функционалу (1.5). Это управление можно назвать оптимальным в среднем, а процесс его отыскания — решением задачи об оптимальном осреднении управления системы (1.2).

§ 2. Возможность построения семейства допустимых управлений и принцип оптимального осреднения управления v, v^l, T^l устанавливаются двумя теоремами.

Теорема 2.1. Если v, v^l, T^l — допустимое управление, то существует семейство допустимых управлений, включающее v, v^l, T^l, если ранги матриц

$$A = \left\| \begin{matrix} B_{11} & \ldots & B_{1,\varkappa+m} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ B_{k1} & \ldots & B_{k,\varkappa+m} \end{matrix} \right\|, \qquad A^l = \left\| \begin{matrix} B_{11}^l & \ldots & B_{1y}^l \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ B_{y1}^l & \ldots & B_{yy}^l \end{matrix} \right\| \qquad (2.1)$$

равняются соответственно k и $y = k_0 - k$.

Здесь

$$B_{ij} = M\left[\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial X_{\nu 1}} \left(\frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial \alpha_j} + \sum_{\gamma=1}^{y} \frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial \alpha_\gamma^l} \frac{\partial \alpha_\gamma^l}{\partial \alpha_j}\right)\right] \qquad (i = 1, \ldots, k; \; j = 1, \ldots, \varkappa)$$

$$B_{i,\varkappa+j} = M\left[\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial X_{\nu 1}} \left(\frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial a_j} + \sum_{\gamma=1}^{y} \frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial \alpha_\gamma^l} \frac{\partial \alpha_\gamma^l}{\partial a_j}\right) + \frac{\partial f_i}{\partial a_j}\right] \quad (i=1, \ldots, k; \; j=1, \ldots, m)$$

$$B_{ij}^l = M\left[\left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_{k+i}}{\partial X_{\nu 1}} \frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial \alpha_j^l}\right) \Big| \, l\right] \qquad (i, j = 1, \ldots, y) \qquad (2.2)$$

$$\frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial \alpha_j} = \int\limits_{t_0^l}^{t_1^l} \sum_{s=1}^{r} \frac{\partial H^{(\nu)}}{\partial u_s} \delta u_{sj}\, dt, \qquad \frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial \alpha_j^l} = \int\limits_{t_0^l}^{t_1^l} \sum_{s=1}^{r_0} \frac{\partial H^{(\nu)}}{\partial u_s^l} \delta u_{sj}^l\, dt$$

$$\frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial a_j} = \int\limits_{t_0^l}^{t_1^l} \frac{\partial H^{(\nu)}}{\partial a_j} dt, \qquad H^{(\nu)} = \sum_{i=1}^{n} \Lambda_i^{(\nu)} \varphi_i (t, X, v, v^l, P, L)$$

При этом $\Lambda_i^{(\nu)}$, $\partial \alpha_\gamma^l / \partial \alpha_j$, $\partial \alpha_\gamma^l / \partial a_j$ определяются из уравнений

$$\Lambda_i^{(\nu)\cdot} = -\frac{\partial H^{(\nu)}}{\partial X_i}, \quad \Lambda_i^{(\nu)} (t_1^l) = \delta_{i\nu} \qquad (i, \nu = 1, \ldots, n)$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} M \left[\left(\sum_{\gamma=1}^{y} \frac{\partial f_i}{\partial X_{\nu 1}} \frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial \alpha_\gamma^l} \frac{\partial \alpha_\gamma^l}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial f_i}{\partial X_{\nu 1}} \frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial \alpha_j} \right) \Big| \, l \right] = 0 \tag{2.3}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} M \left[\left(\sum_{\gamma=1}^{y} \frac{\partial f_i}{\partial X_{\nu 1}} \frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial \alpha_\gamma^l} \frac{\partial \alpha_\gamma^l}{\partial a_s} + \frac{\partial f_i}{\partial X_{\nu 1}} \frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial a_s} + \frac{\partial f_i}{\partial a_s} \right) \Big| \, l \right] = 0$$

$$(i = k + 1, \ldots, k_0; \ j = 1, \ldots, \varkappa; \ s = 1, \ldots, m)$$

Здесь $\delta_{i\nu}$ — символ Кронекера; $\delta u_{sj}(t)$, $\delta u_{sj}^l (t, L)$ — произвольные функции из U.

Теорема 2.2. Если выполнены условия теоремы 2.1, то существует вектор-функция $\Lambda = (\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)$ и множители $\mu_0 = 1$, $\mu_i = \mathrm{const}$, $\mu_j = \mu_j (L)$ $(i = 1, \ldots, k;\ j = k + 1, \ldots, k_0)$, относительно которых оптимальное управление v, v^l, T^l, доставляющее максимум (минимум) функционалу (1.5), обладает необходимым свойством:

а) доставлять минимум (максимум) функции $M^\circ [H (t, X, v, v^l, P, L, \Lambda)]$ переменного u при любом из реализующихся t;

б) доставлять минимум (максимум) функции

$$M [H (t, X, v, v^l, P, L, \Lambda) \,|\, l]$$

переменного u^l при любом t, $t^l_0 \leqslant t \leqslant t^l_1$ и $L \subset \Omega_l$;

в) удовлетворять соотношениям

$$M \left[\sum_{i=0}^{k_0} \mu_i \frac{\partial f_i}{\partial a_j} - \int\limits_{t_0^l}^{t_1^l} \frac{\partial H}{\partial a_j} dt \right] = 0, \quad M \left[\left(\sum_{i=0}^{k_0} \mu_i \frac{\partial f_i}{\partial a_s^l} - \int\limits_{t_0^l}^{t_1^l} \frac{\partial H}{\partial a_s^l} dt \right) \Big| \, l \right] = 0 \tag{2.4}$$

$$M \left[\left(\sum_{i=0}^{k_0} \mu_i \frac{\partial f_i}{\partial t_0^l} + H \big|_{t_0^l} \right) \Big| \, l \right] = 0, \qquad M \left[\left(\sum_{i=0}^{k_0} \mu_i \frac{\partial f_i}{d t_1^l} - H \big|_{t_1^l} \right) \Big| \, l \right] = 0$$

$$H = \Lambda_1 \varphi_1 + \ldots + \Lambda_n \varphi_n \qquad (j = 1, \ldots, m; \ s = 1, \ldots, m_0)$$

Здесь $M^\circ (H)$ обозначает ту часть интеграла, определяющего $M (H)$, где l удовлетворяет неравенству $t^l_0 (l) \leqslant t \leqslant t^l_1 (l)$; случайная непрерывная вектор-функция $\Lambda = (\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)$ — определяется уравнениями

$$\Lambda_i^{\cdot} = -\frac{\partial H}{\partial X_i}, \qquad \Lambda_i (t_1^l) = \Lambda_{i1} = -\sum_{j=0}^{k_0} \mu_j \frac{\partial f_j}{\partial X_{i1}} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.5}$$

§ 3. Приведем схему доказательства теоремы 2.1 и 2.2. Пусть v, v^l, T^l — допустимое управление системы (1.2)—(1.5). Рассмотрим управление

$$(v^*, v^{l*}, T^{l*}) = [u^* = u(t) + \delta u(t), \quad a^* = a + \delta a, \quad u^{l*} = u^l(t, L) + \delta u^l(t, L)$$
$$a^{l*} = a^l(L) + \delta a^l(L), \quad T^{l*} = T^l(L) + \delta T^l(L)]$$

из U. Здесь $u = [u_i(t)]$, $u^l = [u^l_j\ (t, L)]$ $(i = 1, \ldots, r,\ j = 1, \ldots, r_0)$ при любом фиксированном L считаются доопределенными за пределы отрезков $[t^l_0, t^l_1]$ с соблюдением непрерывности и непрерывной дифференцируемости в точках $t = t^l_0$, $t = t^l_1$; δu_j, δu^l_j имеют вид

$$\delta u_j = \sum_{i=1}^{\varkappa} \alpha_i \delta u_{ji}(t), \qquad \delta u_j^l = \sum_{i=1}^{k_0-k} \alpha_i^l(L)\,\delta u_{ji}^l(t, L)$$

всюду, кроме сколь угодно малого отрезка $[t', t'']$, $t'' - t' = \tau \geqslant 0$, где

$$\delta u_j = \omega_j - u_j, \quad \delta u_j^l = \omega_j^l - u_j^l; \quad \delta u_{ji}(t), \quad \delta u_{ji}^l(t, L)$$
$$\omega = [\omega_i(t)], \quad \omega^l = [\omega_i^l(t, L)], \quad \delta a^l(L), \quad \delta T^l(L)$$

произвольные функции соответствующих аргументов, причем, u, ω, u^l, ω^l, считаются непрерывными на интервале (t', t'');

$$\delta a, \delta a^l, \ \delta T^l, \tau, \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\varkappa), \alpha^l = (\alpha_1^l, \ldots, \alpha^l_{k_0-k})$$

— произвольные векторы.

Подставляя v^*, v^{l*}, T^{l*} в (1.2), найдем траекторию $X^* = (X^*_1, \ldots, X_n^*)$, где X_i^* — известные функции аргументов $t, \gamma = (\gamma_i) \equiv (\alpha_i, \alpha^l_i, \delta a_i, \delta a_i^l, \delta t^l_i, \tau)$. Управление v^*, v^{l*}, T^{l*} согласно определению можно считать допустимым, если γ_i удовлетворяют уравнениям

$$M[f_i(\mathrm{X}_1^*, a^*, a^{l*}, T^{l*}, P, L)] = 0 \qquad (i = 1, \ldots, k) \qquad (X_1^* = X^*(t_1^{l*})) \tag{3.1}$$
$$M[f_i(\mathrm{X}_1^*, a^*, a^{l*}, T^{l*}, P, L) \mid l] = 0 \qquad (i = k+1, \ldots, k_0) \tag{3.2}$$

Уравнения (3.1), (3.2) имеют решение $\gamma = 0$, так как v, v^l, T^l — допустимое управление. Левые их части в силу принятых соглашений относительно свойств функций f_i, φ_i, ψ_i, u_i^*, $u^l{}_i^*$, правил доопределения u, u^l за пределы отрезков $[t^l_0, t^l_1)$ и выделения интервала (t', t'') непрерывны и непрерывно дифференцируемы по γ_i. Следовательно, по теореме существования неявных функций уравнения (3.2) определяют непрерывные и непрерывно дифференцируемые функции α^l_j $(j = 1, \ldots, y)$ переменных α_j, δa_j, δa^l_j, δt^l_j, τ, L, если ранг матрицы

$$A^{l*} = \left[M\left(\frac{\partial f_{k+i}}{\partial \alpha_j^l}\,\Big|\, l\right)\right]_{\gamma=0} \qquad (i, j = 1, \ldots, y)$$

равняется $y = k_0 - k$.

Точно так же система (3.1), где α^l_j $(j = 1, \ldots, y)$ определены уравнениями (3.2), определит неявные функции α_j, δa_j, если ранг матрицы

$$A^* = \left\| \begin{matrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots M\left[\dfrac{\partial f_i}{\partial \alpha_j}\right]_{\gamma=0} \cdots M\left[\dfrac{\partial f_i}{\partial a_s}\right]_{\gamma=0} \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{matrix} \right\| \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, k \\ j = 1, \ldots, \varkappa \\ s = 1, \ldots, m \end{pmatrix}$$

равняется k.

Расписывая выражения элементов матриц A^{l*}, A^*, убеждаемся в справедливости тождеств: $A^* \equiv A$, $A^{l*} = A^l$, где A, A^l определяются соотношениями (2.1)—(2.3). Таким образом, существуют не равные одновременно нулю γ_i, удовлетворяющие уравнениям (3.1), (3.2), если ранги матриц A и A^l равняются соответственно k и y. Но в этом случае существует допустимое управление $(v^*, v^{l*}, T^{l*}) \neq (v, v^l, T^l)$, содержащее v, v^l, T^l при $\gamma = 0$. Теорема 2.1 доказана.

Предположим теперь, что v, v^l, T^l — допустимое управление, удовлетворяющее условиям теоремы 2.1 и доставляющее максимум функционалу (1.5). Тогда существует семейство допустимых управлений, где

$$\Delta J_i = M\,[f_i(X_1^*, a^*, a^{l*}, T^{l*}, P, L) - f_i(X_1, a, a^l, T^l, P, L)] = \tag{3.3}$$

$$= \sum_{j=1}^{\varkappa} B_{ij}\alpha_j + \sum_{j=1}^{m} B_{i,\varkappa+j}\delta a_j + \sum_{j=0}^{1} B_{ij}{}^t + \sum_{j=1}^{m_0} B_{ij}{}^a + B_i\tau + \varepsilon$$

$$(i = 0, \ldots, k)$$

$$B_{ij} = M\left[\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial X_{\nu 1}}\left(\frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial \alpha_j} + \sum_{\gamma=1}^{k_0-k} \frac{\partial X_{1\nu}}{\partial \alpha_\gamma{}^l}\frac{\partial \alpha_\gamma{}^l}{\partial \alpha_j}\right)\right]$$

$$B_{i,\varkappa+j} = M\left[\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial X_{\nu 1}}\left(\frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial a_j} + \sum_{\gamma=1}^{k_0-k} \frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial \alpha_\gamma{}^l}\frac{\partial \alpha_\gamma{}^l}{\partial a_j}\right) + \frac{\partial f_i}{\partial a_j}\right]$$

$$B_{ij}{}^a = M\left\{\left[\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial X_{\nu 1}}\left(\frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial a_j{}^l} + \sum_{\gamma=1}^{k_0-k} \frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial \alpha_\gamma{}^l}\frac{\partial \alpha_\gamma{}^l}{\partial a_j{}^l}\right) + \frac{\partial f_i}{\partial a_j{}^l}\right]\delta a_j{}^l\right\} \tag{3.4}$$

$$B_{ij}{}^t = M\left\{\left[\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial X_{\nu 1}}\left(\frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial t_j{}^l} + \sum_{\gamma=1}^{k_0-k} \frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial \alpha_\gamma{}^l}\frac{\partial \alpha_\gamma{}^l}{\partial t_j{}^l}\right) + \frac{\partial f_i}{\partial t_j{}^l}\right]\delta t_j{}^l\right\}$$

$$B_i = M\left[\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial X_{\nu 1}}\left(\frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial \tau} + \sum_{\gamma=1}^{k_0-k} \frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial \alpha_\gamma{}^l}\frac{\partial \alpha_\gamma{}^l}{\partial \tau}\right)\right]$$

$$\Delta J_0 = \Delta J \leqslant 0, \qquad \Delta J_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, k)$$

Здесь ε — величина выше первого порядка малости; коэффициенты при α_i, δa_i, $\delta a_i{}^l$, $\delta t_i{}^l$, τ вычисляются при $\gamma = 0$; функции $\alpha_\gamma{}^l$ переменных α_i, δa_i, $\delta a_i{}^l$, $\delta t_i{}^l$, τ определяются уравнениями (3.2), поэтому частные производные

$$\frac{\partial \alpha_\gamma{}^l}{\partial \alpha_j}, \quad \frac{\partial \alpha_\gamma{}^l}{\partial a_j} = \frac{\partial \alpha_\gamma{}^l}{\partial \delta a_j}, \quad \frac{\partial \alpha_\gamma{}^l}{\partial t_j{}^l} = \frac{\partial \alpha_\gamma{}^l}{\partial \delta t_j{}^l}, \quad \frac{\partial \alpha_\gamma{}^l}{\partial \tau}$$

удовлетворяют уравнениям (3.5)

$$M\left\{\left[\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial X_{\nu 1}}\left(\frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial \alpha_j} + \sum_{\gamma=1}^{k_0-k} \frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial \alpha_\gamma{}^l}\frac{\partial \alpha_\gamma{}^l}{\partial \alpha_j}\right)\right] \Big| \, l\right\} = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = k+1, \ldots, k_0 \\ j = 1, \ldots, \varkappa \end{pmatrix}$$

$$M\left\{\left[\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial X_{\nu 1}}\left(\frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial a_j} + \sum_{\gamma=1}^{k_0-k} \frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial \alpha_\gamma{}^l}\frac{\partial \alpha_\gamma{}^l}{\partial a_j}\right) + \frac{\partial f_i}{\partial a_j}\right] \Big| \, l\right\} = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = k+1, \ldots, k_0 \\ j = 1, \ldots, m \end{pmatrix}$$

$$M\left\{\left[\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial X_{\nu 1}}\left(\frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial a_j{}^l} + \sum_{\gamma=1}^{k_0-k} \frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial \alpha_\gamma{}^l}\frac{\partial \alpha_\gamma{}^l}{\partial a_j{}^l}\right) + \frac{\partial f_i}{\partial a_j{}^l}\right] \Big| \, l\right\} = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = k+1, \ldots, k_0 \\ j = 1, \ldots, m_0 \end{pmatrix}$$

$$M\left\{\left[\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial X_{\nu 1}}\left(\frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial t_j{}^l} + \sum_{\gamma=1}^{k_0-k} \frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial \alpha_\gamma{}^l}\frac{\partial \alpha_\gamma{}^l}{\partial t_j{}^l}\right) + \frac{\partial f_i}{\partial t_j{}^l}\right] \Big| \, l\right\} = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = k+1, \ldots, k_0 \\ j = 0, 1 \end{pmatrix}$$

$$M\left\{\left[\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial X_{\nu 1}}\left(\frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial \tau} + \sum_{\gamma=1}^{k_0-k} \frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial \alpha_\gamma{}^l}\frac{\partial \alpha_\gamma{}^l}{\partial \tau}\right)\right] \Big| \, l\right\} = 0 \qquad (i = k+1, \ldots, k_0)$$

Нетрудно убедиться в справедливости следующих соотношений:

$$\frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial \alpha_j} = \int_{t_0{}^l}^{t_1{}^l} \sum_{s=1}^{r} \frac{\partial H^{(\nu)}}{\partial u_s}\delta u_{sj}\,dt, \qquad \frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial a_j} = \int_{t_0{}^l}^{t_1{}^l} \frac{\partial H^{(\nu)}}{\partial a_j}\,dt$$

$$\frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial \alpha_j{}^l} = \int_{t_0{}^l}^{t_1{}^l} \sum_{s=1}^{r_0} \frac{\partial H^{(\nu)}}{\partial u_s{}^l}\delta u_{sj}{}^l\,dt, \qquad \frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial a_j{}^l} = \int_{t_0{}^l}^{t_1{}^l} \frac{\partial H^{(\nu)}}{\partial a_j{}^l}\,dt \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial \tau} = [H^{(\nu)*} - H^{(\nu)}]_{t'} \quad (t_0^l \leqslant t' < t_1^l), \qquad \frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial \tau} = 0 \quad (t_0^l > t',\ t_1^l \leqslant t')$$

$$\frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial t_0^l} = -H^{(\nu)}|_{t_0^l}, \qquad \frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial t_1^l} = H^{(\nu)}|_{t_1^l}$$

Здесь

$$H^{(\nu)} = \sum_{i=1}^{n} \Lambda_i^{(\nu)} \varphi_i(t, X, v, v^l, P, L), \qquad H^{(\nu)*} = \sum_{i=1}^{n} \Lambda_i^{(\nu)} \varphi_i(t, X, \omega, a, \omega^l, a^l, P, L)$$

$$\Lambda_i^{\cdot\,(\nu)} = -\frac{\partial H^{(\nu)}}{\partial X_i}, \qquad \Lambda_j^{(\nu)}(t_1^l) = \delta_{i\nu}, \qquad (i, \nu = 1, \ldots, n) \tag{3.7}$$

Учитывая (3.3), получим необходимое условие максимума функционала (1.5):

$$\delta J = \sum_{j=1}^{\varkappa} \sum_{i=0}^{k} \mu_i B_{ij} \alpha_j + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{k} \mu_i B_{i,\,\varkappa+j} \delta a_j + \sum_{j=0}^{1} \sum_{i=0}^{k} \mu_i B_{ij}{}^t +$$
$$+ \sum_{j=1}^{m_0} \sum_{i=0}^{k} \mu_i B_{ij}{}^a + \sum_{i=0}^{k} \mu_i B_i \tau \leqslant 0 \tag{3.8}$$

Здесь $\mu_0 = 1, \mu_1, \ldots, \mu_k$ — постоянные неслучайные множители Лагранжа. Так как предполагается выполненным условие теоремы 2.1 относительно ранга матрицы A, то множители $\mu_1, \ldots, \mu_k$ можно подобрать из условия обращения в нуль k коэффициентов при α_j, δa_j в правой части (3.8). Оставшиеся после этого слагаемые в (3.8) будут независимыми и произвольными. Следовательно, вместо (3.8), учитывая неравенство $\tau \geqslant 0$, будем иметь

$$\sum_{i=0}^{k} \mu_i B_{ij} = 0, \quad \sum_{i=0}^{k} \mu_i B_{i\nu}{}^a = 0, \quad \sum_{i=0}^{k} \mu_i B_{is}{}^t = 0, \quad \sum_{i=0}^{k} \mu_i B_i \leqslant 0 \tag{3.9}$$

$$(j = 1, \ldots, \varkappa + m;\ s = 0, 1;\ \nu = 1, \ldots, m_0)$$

Умножим каждое уравнение (3.5) с номером i на неопределенный множитель Лагранжа μ_i (L) $(i = k + 1, \ldots, k_0)$, найдем математические ожидания результатов умножения и просуммируем их по i при фиксированном j по каждой группе уравнений. Прибавляя полученные выражения, равные нулю, к левым частям соотношений (3.9), найдем

$$M\left[\sum_{i=0}^{k_0} \sum_{\nu=1}^{n} \mu_i \frac{\partial f_i}{\partial X_{\nu 1}} \frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial \alpha_j} + \sum_{\gamma=1}^{k_0-k} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{i=0}^{k_0} \mu_i \frac{\partial f_i}{\partial X_{\nu 1}} \frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial \alpha_\gamma^l} \frac{\partial \alpha_\gamma^l}{\partial \alpha_j}\right] = 0$$
$$(j = 1, \ldots, \varkappa)$$

$$M\left[\sum_{i=0}^{k_0} \sum_{\nu=1}^{n} \mu_i \frac{\partial f_i}{\partial X_{\nu 1}} \frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial a_j} + \sum_{\gamma=1}^{k_0-k} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{i=0}^{k_0} \mu_i \frac{\partial f_i}{\partial X_{\nu 1}} \frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial \alpha_\gamma^l} \frac{\partial \alpha_\gamma^l}{\partial a_j} + \sum_{i=0}^{k_0} \mu_i \frac{\partial f_i}{\partial a_j}\right] = 0$$
$$(j = 1, \ldots, m)$$

$$M\left[\sum_{i=0}^{k_0} \sum_{\nu=1}^{n} \mu_i \frac{\partial f_i}{\partial X_{\nu 1}} \frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial a_j^l} + \sum_{\gamma=1}^{k_0-k} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{i=0}^{k_0} \mu_i \frac{\partial f_i}{\partial X_{\nu 1}} \frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial \alpha_\gamma^l} \frac{\partial \alpha_\gamma^l}{\partial a_j^l} + \sum_{i=0}^{k_0} \mu_i \frac{\partial f_i}{\partial a_j^l}\right] = 0$$
$$(j = 1, \ldots, m_0) \tag{3.10}$$

$$M\left[\sum_{i=0}^{k_0} \sum_{\nu=1}^{n} \mu_i \frac{\partial f_i}{\partial X_{\nu 1}} \frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial t_j^l} + \sum_{\gamma=1}^{k_0-k} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{i=0}^{k_0} \mu_i \frac{\partial f_i}{\partial X_{\nu 1}} \frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial \alpha_\gamma^l} \frac{\partial \alpha_\gamma^l}{\partial t_j^l} + \sum_{i=0}^{k_0} \mu_i \frac{\partial f_i}{\partial t_j^l}\right] = 0$$
$$(j = 0, 1)$$

$$M\left[\sum_{i=0}^{k_0} \sum_{\nu=1}^{n} \mu_i \frac{\partial f_i}{\partial X_{\nu 1}} \frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial \tau} + \sum_{\gamma=1}^{k_0-k} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{i=0}^{k_0} \mu_i \frac{\partial f_i}{\partial X_{\nu 1}} \frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial \alpha_\gamma^l} \frac{\partial \alpha_\gamma^l}{\partial \tau}\right] \leqslant 0$$

Условие теоремы 2.1 относительно ранга матрицы A^l выполнено, поэтому величины $\mu_i(L)$ $(i = k+1, \ldots, k_0)$ могут быть найдены из уравнений

$$M\left[\left(\sum_{i=0}^{k_0}\sum_{\nu=1}^{n}\mu_i\frac{\partial f_i}{\partial X_{\nu 1}}\frac{\partial X_{\nu 1}}{\partial \alpha_\gamma^l}\right)\Big| l\right]=0 \qquad (\gamma = 1,\ldots, k_0-k) \tag{3.11}$$

Положим

$$\sum_{i=0}^{k_0}\mu_i\frac{\partial f_i}{\partial X_{\nu 1}} = -\Lambda_{\nu 1}, \qquad \sum_{\nu=1}^{n}\Lambda_i^{(\nu)}\Lambda_{\nu 1}=\Lambda_i \qquad (\gamma,\ i = 1,\ldots, n)$$

Тогда, учитывая (3.7), будем иметь

$$\sum_{\nu=1}^{n}\Lambda_{\nu 1}H^{(\nu)}=\sum_{i=1}^{n}\Lambda_i\varphi_i = H, \quad \Lambda_i^{\cdot} = -\frac{\partial H}{\partial X_i}, \qquad \Lambda_\nu(t_1^l)=\Lambda_{\nu 1}=-\sum_{i=0}^{k_0}\mu_i\frac{\partial f_i}{\partial X_{\nu 1}}$$
$$(i,\ \nu = 1,\ldots, n)$$

Теперь соотношения (3.10), (3.11) можно записать в виде

$$M\left[\int_{t_0^l}^{t_1^l}\sum_{s=1}^{r}\frac{\partial H}{\partial u_s}\delta u_{sj}dt\right]=0, \qquad M\left[\left(\int_{t_0}^{t_1^l}\sum_{s=1}^{r_0}\frac{\partial H}{\partial u_s^l}\delta u_{si}^l dt\right)\Big| l\right]=0$$
$$(j = 1,\ldots, \varkappa; \quad i = 1,\ldots, k_0-k) \tag{3.12}$$

$$M\left\{\left[\sum_{i=0}^{k_0}\mu_i\frac{\partial f_i}{\partial t_0^l}+H\,|_{t_0^l}\right]\delta t_0^l\right\}=0, \qquad M\left\{\left[\sum_{i=0}^{k_0}\mu_i\frac{\partial f_i}{\partial t_1^l}-H\,|_{t_1^l}\right]\delta t_1^l\right\}=0$$
$$M\left\{\left[\sum_{i=0}^{k_0}\mu_i\frac{\partial f_i}{\partial a_j^l}-\int_{t_0^l}^{t_1^l}\frac{\partial H}{\partial a_j^l}dt\right]\delta a_j^l\right\}=0 \qquad (j = 1,\ldots, m_0) \tag{3.13}$$

$$M\left[\sum_{i=0}^{k_0}\mu_i\frac{\partial f_i}{\partial a_j}-\int_{t_0^l}^{t_1^l}\frac{\partial H}{\partial a_j}dt\right]=0 \qquad (j = 1,\ldots, m) \tag{3.14}$$

$$M^\circ\,[H^*-H]_{t'}\geqslant 0, \qquad H^*=\sum_{i=1}^{n}\Lambda_i\varphi_i(t, X, \omega, a, \omega^l, a^l, P, L) \tag{3.15}$$

Неравенство (3.15) следует из последнего соотношения системы (3.10). Действительно, тройная сумма в квадратных скобках этого соотношения равняется нулю в силу (3.11), а остающиеся слагаемые обращаются в нуль для всех l, где $t_0^l(l)\geqslant t'$, $t_1^l(l)\leqslant t'$, так как здесь $\partial X_{\nu 1}\,/\,\partial\tau = 0$ (см. (3.5)).

Очевидно, соотношения (3.13) можно записать в виде

$$\int_{\Omega_l} M\left[\left(\sum_{i=0}^{k_0}\mu_i\frac{\partial f_i}{\partial t_0^l}+H\,|_{t_0^l}\right)\Big| l\right]f_l(l)\,\delta t_0^l(l)\,dl=0$$

$$\int_{\Omega_l} M\left[\left(\sum_{i=0}^{k_0}\mu_i\frac{\partial f_i}{\partial t_1^l}-H\,|_{t_1^l}\right)\Big| l\right]f_l(l)\,\delta t_1^l(l)\,dl=0$$

$$\int_{\Omega_l} M\left[\left(\sum_{i=0}^{k_0}\mu_i\frac{\partial f_i}{\partial a_j^l}-\int_{t_0^l}^{t_1^l}\frac{\partial H}{\partial a_j^l}dt\right)\Big| l\right]f_l(l)\,\delta a_j^l(l)\,dl=0 \qquad (j = 1,\ldots, m_0)$$

Отсюда, учитывая произвольность функций $\delta t_0{}^l(l)$, $\delta t_1{}^l(l)$, $\delta a_j{}^l(l)$, получим

$$M\left[\left(\sum_{i=0}^{k_0} M_i \frac{\partial f_i}{\partial t_0{}^l} + H\big|_{t_0{}^l}\right)\Big| l\right] = 0, \qquad M\left[\left(\sum_{i=0}^{k_0} \mu_i \frac{\partial f_i}{\partial t_1{}^l} - H\big|_{t_1{}^l}\right)\Big| l\right] = 0 \tag{3.16}$$

$$M\left[\left(\sum_{i=0}^{k_0} \mu_i \frac{\partial f_i}{\partial a_j{}^l} - \int_{t_0{}^l}^{t_1{}^l} \frac{\partial H}{\partial a_j{}^l} dt\right)\Big| l\right] = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m_0)$$

Соотношения (3.14), (3.16) совпадают с условиями п. в теоремы 2.2. Справедливость п. п. а, б этой теоремы следует из неравенства (3.15). В самом деле, так как ω и ω^l независимы, то из (3.15) имеем

$$M^\circ [H(t, X, \omega, a, u^l, a^l, P, L, \Lambda) - H(t, X, u, a, u^l, a^l, P, L, \Lambda)]_{t'} \geqslant 0 \tag{3.17}$$

$$M^\circ [H(t, X, u, a, \omega^l, a^l, P, L, \Lambda) - H(t, X, u, a, u^l, a^l, P, L, \Lambda)]_{t'} \geqslant 0 \tag{3.18}$$

Из (3.17) сразу же следует утверждение п. а теоремы 2.2.

Предположим, что имеется ситуация, противоположная указываемой п. б теоремы 2.2, т. е. найдется точка $(L, t) = (l', t')$, где

$$M\{[H(t, X, u, a, \omega^l, a^l, P, L, \Lambda) - H(t, X, u, a, u^l, a^l, P, L, \Lambda)] \mid l\}_{l', t'} < 0 \tag{3.19}$$

Тогда в силу непрерывности H по ω^l и кусочной непрерывности $\omega^l(t, L)$ найдется отрезок $[l^*, l^{**}]$, включающий точку $L = l'$, где знак неравенства (3.19) останется неизменным. Функцию ω^l можно подобрать так, что она будет отличаться от u^l только на отрезке $[l^*, l^{**}]$.

Следовательно, будем иметь

$$M^\circ [H^* - H]_{t'} = \int_{l^*}^{l^{**}} M\{[H(t, X, u, a, \omega^l, a^l, P, L, \Lambda) -$$

$$- H(t, X, u, a, u^l, a^l, P, L, \Lambda)] \mid l\}_{t'} f_l(l)\, dl < 0$$

что противоречит условию (3.18). Остается признать справедливость п. б теоремы 2.2 и вместе с этим — справедливость всех ее утверждений. В заключение отметим, уравнения (3.12) удовлетворяются тождественно в силу п. а теоремы 2.2.

§ 4. Полученные выше результаты, помимо решения ряда новых задач статистической динамики, позволяют также предложить новый метод синтеза систем программного управления, который в отличие от существующих допускает решение задачи «в целом», когда программное движение и закон регулирования переходных процессов оптимизируются с учетом их взаимосвязей по единому критерию с общих методологических позиций. Рамки данной статьи позволяют разъяснить лишь основные его черты на следующем весьма частном примере.

Пусть имеется объект управления

$$X^\cdot = aX + BW, \qquad X(t_0) = X_0, \qquad X(t_1) = C_1, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \tag{4.1}$$

Здесь a, C_1, t_0, t_1 — известные числа; B, X_0 — заданные непрерывные случайные величины с математическими ожиданиями m_b, m_{x_0}; W — управляющее воздействие.

Известно, если цель управления достигается в режиме программного управления, то W представляется в виде $W = u + u^l$, где $u = u(t)$ — неизменная в реализациях программная часть W, а $u^l = u^l(t, X_2, \ldots)$ — регулирующее воздействие, предназначенное для компенсации случайных возмущений, в данном случае — отклонений $B^0 = B - m_b$, $X_0{}^0 = X_0 - m_{x0}$. Траектория объекта X при этом делится на программную X_1 и возмущенную $X_2 = X - X_1$, которые определяются из уравнений

$$X_1{}^\cdot = aX_1 + m_b u, \qquad X_1(t_0) = m_{x0}, \qquad X_1(t_1) = M(X_{11}) = C_1 \tag{4.2}$$

$$X_2{}^\cdot = aX_2 + Bu^l + B^\circ u, \qquad X_2(t_0) = X_0{}^0, \qquad X_2(t_1) = M(X_{21} \mid b, x_0) = 0 \tag{4.3}$$

Для существующих методов синтеза u, u^l характерен выбор программного движения независимо от возмущенного. Последнее делает возможным получение неприемлемых решений. Пусть, например, процесс управления оптимизируется по расходу энергии, определяемому функционалами

$$J_0 = g_0 \int_{t_0}^{t_1} u^2 dt, \qquad J_1 = g_1 \int_{t_0}^{t_1} u^{l2}\, dt, \qquad g_i = \mathrm{const} > 0 \quad (i=0,\,1)$$

соответственно в программном и возмущенном движениях. При независимой минимизации этих функционалов, вообще говоря, не достигается минимум общего расхода энергии, так как характеристики возмущенного движения, как это видно из (4.3), зависят от программного. Поэтому более целесообразна оптимизация u, u^l по условию минимума функционала вида

$$J = M\left[g_0 \int_{t_0}^{t_1} u^2\, dt + g_1 \int_{t_0}^{t_1} u^{l2} dt\right] \tag{4.4}$$

или по какому-либо другому критерию, дающему представление об общих потерях энергии.

Покажем, что оптимизация u, u^l по критериям вида (4.4) может быть достигнута методами развиваемой теории. Введем функцию $X_3\,(t)$, определяемую уравнениями

$$X_3^{\cdot} = g_0 u^2 + g_1 u^{l2}, \qquad X_3\,(t_0) = 0 \tag{4.5}$$

Тогда вместо (4.4) можно записать

$$J = M\,(X_{31}) \tag{4.6}$$

Теперь задача синтеза программного управления объектом (4.1) приводится к решению следующей оптимальной проблемы: для системы (4.2), (4.3), (4.5) требуется найти управление $u\,(t)$, $u^l\,(t,\ X_2,\ \ldots)$, которое доставляет минимум функционалу (4.6). Очевидно, эта проблема относится к виду, рассмотренному в § 1, когда

$$n = 3, \quad k = 1, \quad k_0 = 2, \quad L = (L_i) \equiv (B,\ X_0), \quad t_0{}^l = t_0, \quad t_1{}^l = t_1$$

$$\varphi_1 = aX_1 + m_b u, \quad \varphi_2 = aX_2 + Bu^l + B^\circ u, \quad \varphi_3 = g_0 u^2 + g_1 u^{l2}$$

$$f_0 = X_{31}, \quad f_1 = X_{11} - c_1, \quad f_2 = X_{21}$$

Для решения ее следует использовать условия теоремы 2.2, в соответствии с которыми имеем

$$H = \Lambda_1\,(aX_1 + m_b u) + \Lambda_2\,(aX_2 + Bu^l + B^\circ u) + \Lambda_3\,(g_0 u^2 + g_1 u^{l2})$$

$$\Lambda_1^{\cdot} = -\frac{\partial H}{\partial X_1} = -a\Lambda_1, \qquad \Lambda_1(t_1) = -\sum_{i=0}^{2} \mu_i \frac{\partial f_i}{\partial X_{11}} = -\mu_1 = \mathrm{const}$$

$$\Lambda_2^{\cdot} = -\frac{\partial H}{\partial X_2} = -a\Lambda_2, \qquad \Lambda_2(t_1) = -\sum_{i=0}^{2} \mu_i \frac{\partial f_i}{\partial X_{21}} = -\mu_2\,(B,\ X_0)$$

$$\Lambda_3^{\cdot} = -\frac{\partial H}{\partial X_3} = 0, \qquad \Lambda_3(t_1) = -\sum_{i=0}^{2} \mu_i \frac{\partial f_i}{\partial X_{31}} = -\mu_0 = -1$$

$$M[m_b\Lambda_1 + B^\circ\Lambda_2 + 2g_0\Lambda_3 u] = 0, \qquad B\Lambda_2 + 2g_1\Lambda_3 u^l = 0$$

Отсюда получим

$$u = \frac{M\,(m_b\Lambda_1 + B^0\Lambda_2)}{2g_0} = -\frac{m_b\mu_1 + M\,(B^0\mu_2)}{2g_0}\, e^{a\,(t_1 - t)} \tag{4.7}$$

$$u^l = \frac{B\Lambda_2}{2g_1} = -\frac{B\mu_2}{2g_1}\, e^{a\,(t_1 - t)} \tag{4.8}$$

Подставляя выражения (4.7), (4.8) в правую часть (4.3), после интегрирования и удовлетворения граничного условия $X_{21} = 0$, найдем

$$X_0^0 e^{a(t_1-t_0)} + \frac{1 - e^{2a(t_1-t_0)}}{4a} \left[\frac{B^0 m_b \mu_1 + B^0 M (B^0 \mu_2)}{g_0} + \frac{B^2 \mu_2}{g_1} \right] = 0 \qquad (4.9)$$

Отсюда имеем

$$M (B^0 \mu_2) = \frac{g_0 D_0 - g_1 m_b D_1 \mu_1}{g_0 + g_1 D_1} \qquad (4.10)$$

где

$$D_0 = - \frac{4 a g_1 e^{a(t_1-t_0)}}{1 - e^{2a(t_1-t_0)}} M \left(\frac{B^0 X_0^0}{B^2} \right), \qquad D_1 = M \left(\frac{B^{02}}{B^2} \right)$$

Интегрирование уравнения (4.2) с учетом выражений (4.7), (4.8) и последующим удовлетворением граничного условия $X_{11} = C_1$ позволяет записать следующее выражение множителя μ_1:

$$\mu_1 = \frac{g_0 + g_1 D_1}{m_b} \left[\frac{4a (c_1 - m_{x0} e^{a(t_1-t_0)})}{m_b (1 - e^{2a(t_1-t_0)})} - \frac{D_0}{g_0 + g_1 D_1} \right] \qquad (4.11)$$

Вычисляя μ_1, $M(B^0 \mu_2)$ по формулам (4.10), (4.11) и подставляя полученные результаты в формулу (4.7), находим оптимальную программу движения $u(t)$. Оптимальный закон регулирования $u^l = u^l (t, X_2, \ldots)$ возмущенного движения X_2 найдется из (4.9) с учетом (4.8) после замены $X_2^0 = X_0^0$, t_0 в (4.9) текущими значениями X_2, t в виде

$$u^e = \frac{e^{a(t_1-t)}}{2B} \left[\frac{4 a X_2 e^{a(t_1-t)}}{1 - e^{2a(t_1-t)}} + \frac{B^0 (m_b \mu_1 + M (B^0 \mu_2))}{g_0} \right] \qquad (4.12)$$

В заключение отметим, что из принципа оптимальности в среднем в качестве предельных при стягивании областей реализаций случайных параметров в точки вытекают условия оптимизации детерминированных систем, в том числе и принцип максимума в форме Л. С. Понтрягина.

Поступила 16 III 1965.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кожевников Ю. В. К оптимизации управляемых систем со случайными параметрами. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
2. Кожевников Ю. В. Синтез оптимального управления линейных нестационарных стохастических систем. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1965, № 2.
3. Токарев В. В. К выбору параметров динамической системы, универсальной для заданного класса маневров. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 5.
4. Кожевников Ю. В. К теории оптимальных в среднем управляемых стохастических систем. Изв. вузов, Авиационная техника, 1965, № 4.
5. Иванов Ю. Н. Ступенчатая аппроксимация оптимальных управлений. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
6. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., Физматгиз, 1960.