

ИМПУЛЬСНЫЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Л. М. Мархашов, Г. В. Плотникова, Г. К. Пожарицкий
(Москва)

Статья продолжает исследования [1-6] по оптимальным быстродействиям в линейных системах с постоянными коэффициентами. Вектор управления предполагается одномерным и ограниченным по «импульсу» [6]. Это значит, что интеграл от модуля управляющего вектора по времени не превосходит некоторой положительной постоянной M . Исследование относится к системе второго порядка. Выясняются условия существования быстродействий между точками $(x_{10}, x_{20}), (x_1, x_2)$ фазовой плоскости. Показано, что при выполнении этих условий быстродействие со временем $T(x_{10}, x_{20}, x_1, x_2)$ осуществляется при помощи импульсов $\mu_1(x_{10}, x_{20}, x_1, x_2), \mu_2(x_{10}, x_{20}, x_1, x_2)$, число которых не более чем два. Выясняются условия непрерывности и дифференцируемости функций T, μ_1, μ_2 , а также функций $t^1(x_{10}, x_{20}, x_1, x_2), t^2(x_{10}, x_{20}, x_1, x_2)$, выражающих зависимость момента осуществления импульсов μ_1, μ_2 от координат начальной и конечной точек. Дается геометрическая интерпретация.

1. Пусть задана система уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1u_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2u_1$$

где u_1 — скалярное управление. Повернем ось x_2 основной системы координат вдоль вектора $b_1i + b_2j$. Оставляя для новых переменных старые обозначения, получим систему

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2u_1$$

Если $a_{12} \neq 0$, то, дифференцируя первое уравнение по времени и исключая x_2 и dx_2/dt , приходим к уравнению

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + b \frac{dx_1}{dt} + cx_1 = du_1$$

Если $a_{12} = 0$, то исключение невозможно, но в этом случае x_1 изменяется независимо от u_1 и система не является полностью управляемой [3]. Предположим, что система является полностью управляемой; вводя обозначения,

$$x = x_1, \quad \dot{x} = dx_1/dt, \quad du_1 = u, \quad \ddot{x} = d\dot{x}/dt$$

придем к уравнению

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = u \quad (1.1)$$

Для уравнения (1.1) будем искать быстродействия вначале из точки $(0, 0)$ в точку (x_0, \dot{x}_0) на классе всевозможных скалярных управлений с интегрируемым модулем и ограничением на импульс (расход) вида

$$\int_0^\infty |u| dt \leq 1 \quad (1.2)$$

Рассмотрим однородное уравнение

$$x'' + bx' + cx = 0$$

и его нормальную систему независимых решений

$$\begin{aligned} x &= c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t), & \varphi_1(0) &= 1, & \varphi_2(0) &= 0 \\ x' &= c_1\dot{\varphi}_1(t) + c_2\dot{\varphi}_2(t), & \dot{\varphi}_1(0) &= 0, & \dot{\varphi}_2(0) &= 1 \end{aligned}$$

В работе [6] рассмотрены быстродействия из точки (x_0, x_0') в точку $(0, 0)$. Перефразируя условия существования быстродействия [6] для задачи попадания из точки $(0, 0)$ в точку (x_0, x_0') , получим теорему.

Теорема 1.1. Быстродействие между точками $(0, 0)$ и (x_0, x_0') существует тогда и только тогда, когда существуют числа $c_1^\circ, c_2^\circ, T > 0$, решающие задачу

$$\min_{c_1, c_2} [\max_{0 \leq t \leq T} |c_1\varphi_2(T-t) + c_2\dot{\varphi}_2(T-t)|] = 1 \quad (1.3)$$

$$c_1x_0 + c_2x_0' = -1$$

Если $c_1^\circ, c_2^\circ, T > 0$ решают задачу (1.3) и T — наименьшее из всех возможных, то T есть оптимальное время, а оптимальное управление u° является импульсным и дается формулой

$$u^\circ = \mu_1\delta(t - t^1) + \dots + \mu_n\delta(t - t^n)$$

где $\delta(t - t^i)$ обозначает импульсную δ -функцию, а t^1, \dots, t^n — корни уравнения

$$|c_1^\circ\varphi_2(T-t) + c_2^\circ\dot{\varphi}_2(T-t)| = 1$$

Сумма модулей управляющих импульсов μ_i достигает своего наибольшего значения

$$|\mu_1| + \dots + |\mu_n| = 1$$

для всех конечных точек, кроме точек, лежащих на открытом отрезке $x_0 = 0, -1 < x_0' < 1$. В эти точки возможно быстродействие со временем $T = 0$ и $|\mu_1| < 1, \mu_2 = 0$.

Очевидно, что любое быстродействие из нуля необходимо начинается ненулевым импульсом μ_1 . Следовательно, $t^1 = 0$ и выполняется

$$|c_1\varphi_2(T) + c_2\dot{\varphi}_2(T)| = 1$$

Оставим пока в стороне второе уравнение системы (1.3), зададим $T > 0$ и будем искать $c_1^\circ, c_2^\circ, t^2, \dots, t^n$ — решения задачи

$$\max_{0 \leq t \leq T} |c_1\varphi_2(T-t) + c_2\dot{\varphi}_2(T-t)| = 1, \quad c_1\varphi_2(T) + c_2\dot{\varphi}_2(T) = \pm 1 \quad (1.4)$$

Если $c_1^\circ, c_2^\circ, t^2, \dots, t^n$ решают эту задачу для -1 в правой части второго уравнения, то $-c_1^\circ, -c_2^\circ, t^2, \dots, t^n$ решают задачу для $+1$. Остановимся поэтому на -1 . При этом предположении всегда существует такая постоянная $c_3(c_1, c_2, T)$, что выполняется тождество по t

$$c_1\varphi_2(T-t) + c_2\dot{\varphi}_2(T-t) \equiv -\dot{\varphi}_2(-t) + c_3\varphi_2(-t)$$

Пусть c_3, t^2, \dots, t^n — решения задачи

$$\max_{0 \leq t \leq T} |-\dot{\varphi}_2(-t) + c_3\varphi_2(-t)| = 1 \quad (1.5)$$

Тогда для определения c_1°, c_2° послужат уравнения

$$c_1\varphi_2(T) + c_2\dot{\varphi}_2(T) = 1, \quad |c_1\varphi_2(T-t^i) + c_2\dot{\varphi}_2(T-t^i)| = 1$$

2. Будем решать задачу (1.5), последовательно задавая различные положения λ_1, λ_2 — корней характеристического полинома для уравнения (1.2) на комплексной плоскости.

1°. Корни комплексные с положительными вещественными частями

$$\lambda_{1,2} = \beta \pm i\omega, \quad 2\beta = -b > 0, \quad 0 < b^2 < 4c$$

В этом случае вместо величины c_3 удобнее ввести сдвиг фазы φ

$$c_1\varphi_2(T-t) + c_2\varphi_2'(T-t) = a(c_3, t) = -\exp(-\beta t) \cos(\varphi - \omega t) (\cos \varphi)^{-1} \quad (2.1)$$

Так как функция $a(c_3, t)$ не может убывать от -1 с ростом t , то $a(c_3, 0) \geq 0$. Для φ это дает ограничения $-\pi/2 \leq \varphi \leq \arctg(\beta/\omega)$. При любом допустимом φ ближайший максимум функции $a(\varphi, t)$ достигается при $t(\varphi)$, удовлетворяющем уравнению

$$\omega t(\varphi) = \pi + \varphi - \arctg(\beta/\omega)$$

Значение максимума $\mu(\varphi)$ функции $a(\varphi, t(\varphi))$ дается формулой

$$\mu(\varphi) = \exp[(\beta/\omega)(\pi + \varphi - \arctg(\beta/\omega))] (\cos \varphi)^{-1} \cos[\arctg(\beta/\omega)] \quad (2.2)$$

Нетрудно проверить непосредственно, что $\mu(\varphi)$ растет с уменьшением φ и всегда будет положительным при изменении φ в пределах $-\pi/2 < \varphi \leq \arctg(\beta/\omega)$. Из выражения (2.1) ясно, что, если $\mu(\varphi) < 1$, то $|a(\varphi, t)| < 1$ при всех $t > 0$. Поэтому решением задачи может быть только функция, максимум которой $\mu(\varphi) \geq 1$.

Рассмотрим $a(\varphi_0, t)$ такую, что $\mu(\varphi_0) = 1$, тогда, обозначая $t(\varphi_0) = t_2$, получим тождество

$$a(\varphi_0, t) \equiv \varphi_1(t_2 - t)$$

Полагая $t = 0$, получим

$$\varphi_1(t_2) = -1 \quad (2.3)$$

Из последнего уравнения видно, что t_2 — минимальный положительный корень уравнения (2.3), который, очевидно, всегда существует, поскольку $\beta > 0$, и, кроме того, при $t(\varphi) < t_2$ максимум $\mu(\varphi) > 1$. Это значит, что при любом $T < t_2$ варьированием φ можно получить $a(\varphi, T) = 1$. Если же $T > t_2$, то решением задачи (1.2) может быть только $a(\varphi_0, t)$. Возвращаясь к исходной записи $a(c_1, c_2, t)$, получим результат.

Если $T \leq t_2$, то t^2 — момент второго импульса — равен T , а

$$c_1\varphi_2(0) + c_2\varphi_2'(0) = c_2^0 = 1$$

Если $T > t_2$, то $t^2 = t_2$, а $c_1\varphi_2(T-t_2) + c_2\varphi_2'(T-t_2) = 1$.

Если корни действительные и положительные, то положение полностью сохраняется. Доказательство аналогично.

2°. Пусть комплексные корни имеют отрицательные вещественные части

$$\lambda_{1,2} = \beta \pm \omega i, \quad \beta < 0$$

Обратимся к выражениям (2.1) и (2.2). Из них следует, что при всех допустимых $\varphi \leq \arctg(\beta/\omega)$ значениях угла максимум $\mu(\varphi) > 1$. Это значит, что все допустимые функции монотонны, и поэтому t^2 может равняться только T . В данном случае момент t^2 , однако, ограничен сверху и отвечает наименьшему допустимому максимуму $\mu_1(\arctg(\beta/\omega))$. При этом значении угла $a(\varphi_0, 0) = 0$, поэтому $a(\varphi_0, t) \equiv -\varphi_1(-t)$.

Следовательно, максимальное допустимое значение $T = t_2$ найдется из уравнения

$$\varphi_1(-t_2) = -1 \quad (2.4)$$

причем t_2 будет наименьшим положительным корнем этого уравнения.

Это значит, что при $T \leq t_2$ момент второго импульса $t^2 = T$ и $c_2 = 1$. Если $T > t_2$, то решения задачи (1.5) не существует. Тот же результат получится, если $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ будут действительными числами.

3°. Пусть корни различны по знаку и ни один не равен нулю $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$. В этом случае

$$a(t, c_3) = \frac{-\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} + c_3 \frac{e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

Условие $a'(0, c_3) \geq 0$ дает $\lambda_1 + \lambda_2 - c_3 \geq 0$.

Производная $a'(t, c_3)$ может обращаться в нуль при $t > 0$ только при условии

$$e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} = \frac{\lambda_1^2 - c_3 \lambda_1}{\lambda_2^2 - c_3 \lambda_2} > 1$$

Это неравенство выполняется тогда и только тогда, когда $c_3 < \lambda_2$. Если $c_3 < \lambda_2$, то $a(t, c_3)$ имеет максимум $\mu(c_3)$ в точке $t = t(c_3)$ и выполняется тождество

$$a(t, c_3) = \mu(c_3) \Phi_1(t(c_3) - t)$$

Условие максимума $a''(t(c_3), c_3) \leq 0$ дает $-\mu(c_3)c \leq 0$. Поскольку $c = \lambda_1 \lambda_2 < 0$, то $\mu(c_3) \leq 0$. Этот максимум является единственным, и при $t > t(c_3)$ функция $a(t, c_3)$ убывает до $-\infty$.

Если $c_3 > \lambda_2$, то $a(t, c_3)$ монотонно возрастает до бесконечности. Очевидно, что при любом T момент второго импульса t^2 может равняться только T , причем по любому T можно подобрать два значения $c_3^1 > \lambda_2$ и $c_3^2 < \lambda_2$ так, чтобы $a(T, c_3^1) = +1$, а при втором значении $a(T, c_3^2) = -1$.

Возвращаясь к исходным постоянным c_1, c_2 , получаем $t^2 = T, c_2^1 = +1, c_2^2 = -1$.

4°. Пусть корни $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ являются чисто мнимыми.

Рассуждая по той же схеме, что и в 1°, получим, что при $T < \pi / \omega = t_2$ решение задачи (1.4) имеет вид $c_2 = +1, t^2 = T$. Если $T \geq \pi / \omega$, то могут появиться и другие решения. Ниже покажем, что быстрогодействия со временем $T \geq \pi / \omega$ не существует.

5°. Пусть один из корней $\lambda_1 > 0$ положителен, а второй $\lambda_2 = 0$. В этом случае

$$a(t, c_3) = e^{-\lambda_1 t} \left(\frac{c_3}{\lambda_1} - 1 \right) - \frac{c_3}{\lambda_1}$$

Условие $a'(0, c_3) \geq 0$ дает $c_3 \leq \lambda_1$. При этом условии $a(t, c_3)$ — неубывающая функция с пределом $-c_3 / \lambda_1$ при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, всегда можно выбрать $c_3 < -\lambda_1$ так, чтобы $a(T, c_3) = 1$. Это и будет первым решением задачи. Второе решение $c_3 = \lambda_1$ дает $a(t, c_3) \equiv -1$.

Итак, первое решение: $t^2 = T, c_2 = 1$, а второе решение: $c_2 = -1$ ($0 < t^2 \leq T$).

Вследствие этого при $c_2 = -1$ момент t^2 остается неопределенным.

6°. Пусть $\lambda_2 < 0, \lambda_1 = 0$. Рассуждая по той же схеме, придем к выводу, что возможны два решения задачи 1.4.

$$c_2 = 1, t^2 = T \text{ (Первое решение)}, c_2 = -1, 0 < t^2 \leq T \text{ (Второе решение)}$$

7°. Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

$$c_2 = 1, 0 < t^2 \leq T \text{ (Первое решение)}, c_2 = -1, 0 < t^2 \leq T \text{ (Второе решение)}$$

В дальнейшем будет показано, что быстрогодействия во всех случаях 5°, 6°, 7° обязательно имеют $t^2 = T$, т. е. второй импульс совершается в последний момент

3. Возвратимся теперь к задаче (1.3)

$$\min_{c_1, c_2} \max |c_1 \Phi_2(T - t) + c_2 \Phi_2'(T - t)| = \min_{c_1, c_2} f(c_1, c_2, T) = +1 \quad (0 \leq t \leq T)$$

$$c_1 x_0 + c_2 x_0' = -1$$

Пусть $c_1^\circ, c_2^\circ, T, t^1, \dots, t^n$ — решение задачи (1.3), тогда при всех x_0, x_0' , кроме $x_0 = \pm \Phi_2(T), x_0' = \pm \Phi_2'(T)$, существует корень t^2 . Действительно, если бы значение 1 достигалось только при $t = 0$ то всегда смещением по прямой $c_1 x_0 + c_2 x_0' = -1$ на плоскости c_1, c_2 , не совпадающей с прямой $c_1 \Phi_2(T) + c_2 \Phi_2'(T) = \pm 1$, можно было бы добиться, чтобы $f(c_1, c_2, T)$ сделалось меньше 1, что противоречит предположению о том, что c_1°, c_2°, T — решение задачи 1.3.

1°. Пусть $\lambda_{12} = \beta \pm \omega i$; $\beta > 0$, $T \leq t_2$, тогда прямая $c_1 x_0 + c_2 x_0' = -1$ обязательно должна проходить через точку пересечения прямых

$$c_1 \Phi_2(T) + c_2 \Phi_2(T) = -1, \quad c_2 = 1 \quad (3.1)$$

или через точку B пересечения прямых

$$c_1 \Phi_2(T) + c_2 \Phi_2'(T) = 1, \quad c_2 = -1 \quad (3.2)$$

Эти прямые (3.1), (3.2) образуют параллелограмм $AA'BB'$. Пучки прямых $c_1 x_0 + c_2 x_0' = 1$, проходящих через точки A и B , имеют уравнения

$$k(c_1 \Phi_2(T) + c_2 \Phi_2'(T) \pm 1) + (c_2 \mp 1) = 0$$

где k — параметр пучка, и верхние знаки отвечают точке A , а нижние — точке B .

Прямая $c_1 x_0 + c_2 x_0' = -1$ не может, однако, проходить внутри угла $B'AA'$, потому что малое смещение по такой прямой внутрь параллелограмма $AA'BB'$ приведет к уменьшению от единицы величины $f(c_1, c_2, T)$. Эти прямые отвечают неположительным значениям параметра k в пучке. С другой стороны, при всех неотрицательных k во всех точках прямых пучка, кроме точек A и B , величина $f(c_1, c_2, T) > 1$. Отсюда следует, что решение задачи (1.3) для любой из этих прямых лежит в точках A или B .

Условие $k \geq 0$ на плоскости $x_0 x_0'$ выделяет два полуоткрытых отрезка прямых

$$\begin{aligned} \frac{x_0' + 1}{\Phi_2'(T) + 1} = \frac{x_0}{\Phi_2(T)}, & \quad 0 < x_0 \leq \Phi_2(T) \\ & \quad -1 < x_0' \leq \Phi_2'(T) \\ \frac{x_0' + 1}{-\Phi_2'(T) - 1} = -\frac{x_0}{\Phi_2(T)}, & \quad 0 < x_0 \leq -\Phi_2(T) \\ & \quad 1 > x_0' \geq -\Phi_2'(T) \end{aligned}$$

Эти отрезки $[a_2, b_1)$ и $[b_2, a_1)$ изображены на (фиг. 1) и представляют собою совокупность конечных точек быстрогодействия со временем T .

При изменении T от нуля до t_2 эти отрезки вращаются вокруг точек b_1 и a_1 , вычерчивая своими концами a_2 и b_2 кривые $x_0 = \pm \Phi_2(T)$, $x_0' = \pm \Phi_2'(T)$, которые будем в дальнейшем называть G_+ и G_- .

Если $T > t_2$, то, как показано выше, c_1 и c_2 должны определяться из уравнений

$$c_1 \Phi_2(T) + c_2 \Phi_2'(T) = -1, \quad c_1 \Phi_2(T - t_2) + c_2 \Phi_2'(T - t_2) = +1$$

либо из уравнений

$$c_1 \Phi_2(T) + c_2 \Phi_2'(T) = +1, \quad c_1 \Phi_2(T - t_2) + c_2 \Phi_2'(T - t_2) = -1$$

Аналогичные рассуждения выделяют два отрезка $[a_4 b_5)$ и $[b_4 a_5)$, представляющие геометрические места концов быстрогодействия со временем $T > t_2$. Эти отрезки касаются кривых G_- и G_+ в точках b_5, a_5 .

Геометрически очевидно, что какова бы ни была точка x_0, x_0' , она при некотором T попадает на отрезки $[a_2 b_1)$, $[b_2, a_1)$, либо на отрезки $[a_4 b_5)$, $[b_4 a_5)$. Следовательно, быстрогодействие всегда существует. Время $T \leq t_2$ и импульсы μ_1 и $\mu_2 = \pm(1 - |\mu_1|)$ определяются из уравнений

$$(x_0 \operatorname{sign} x_0) = \mu_1 \Phi_2(T), \quad (x_0' / \operatorname{sign} x_0) = \mu_1 (\Phi_2'(T) + 1) - 1 \quad (3.3)$$

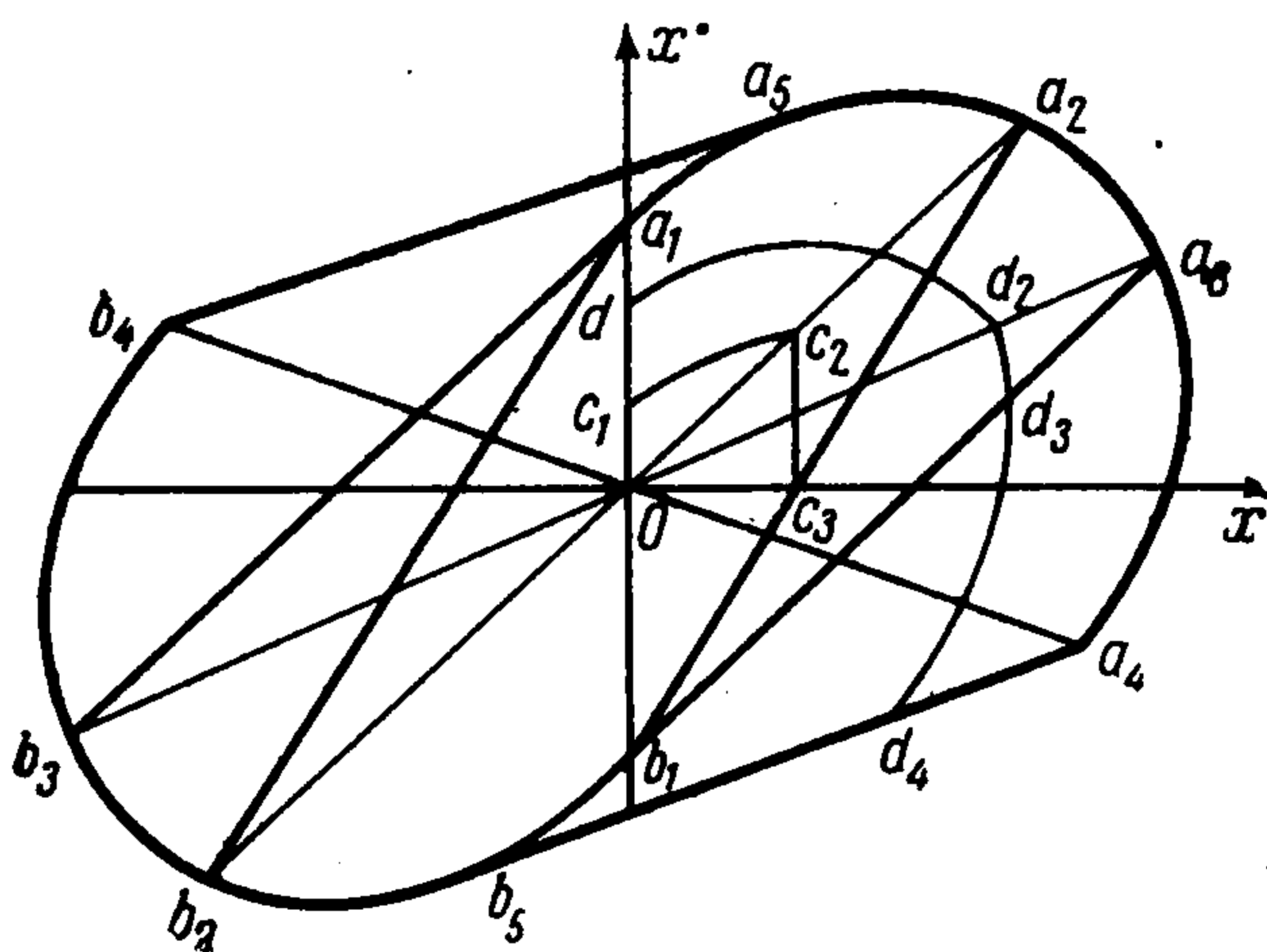
Если же $T > t_2$, то из уравнений

$$\begin{aligned} \frac{x_0 \Phi_2(t_2 - T) + x_0' \Phi_2'(t_2 - T)}{\operatorname{sign} [x_0 \Phi_2(t_2 - T) + x_0' \Phi_2'(t_2 - T)]} &= \mu_1 \Phi_2(t_2) \\ \frac{x_0 \Phi_2'(t_2 - T) + x_0' \Phi_2(t_2 - T)}{\operatorname{sign} [x_0 \Phi_2(t_2 - T) + x_0' \Phi_2'(t_2 - T)]} &= \mu_1 (\Phi_2'(t_2) + 1) - 1 \end{aligned} \quad (3.4)$$

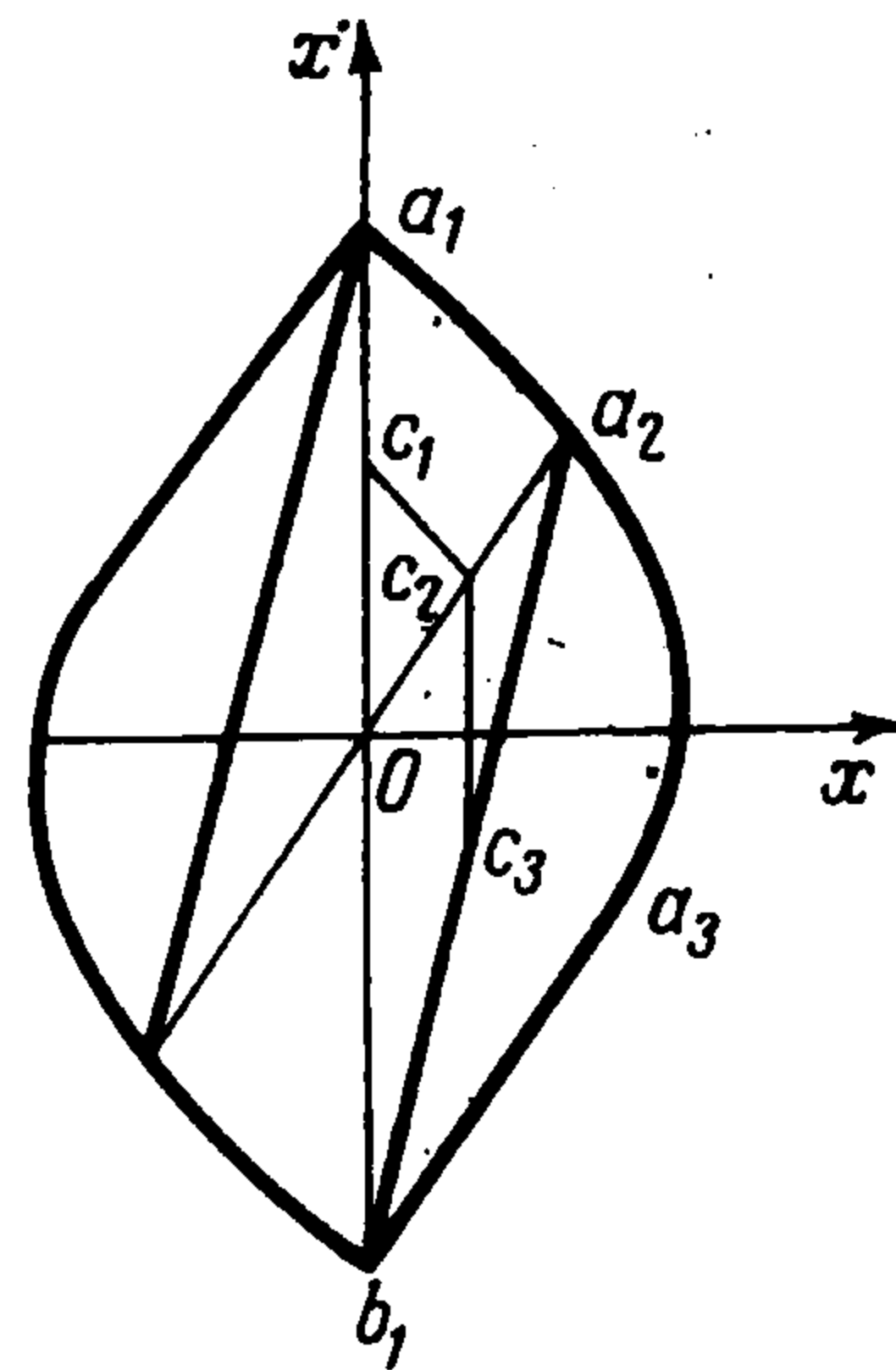
При каждом T кривые G_+ и G_- и отрезки $[a_2, b_1)$, $[b_2, a_1)$ или отрезки $[a_4, b_5)$, $[b_4, a_5)$ ограничивают выпуклую область $D(T)$. Будем называть ее областью достижимости, поскольку в дальнейшем будет показано, что за время $t \leq T$ любое допустимое управление не может вывести за границу этой области, но любая внутренняя или граничная точка области $D(T)$ может быть достигнута.

На фиг. 1 кривая $oc_1c_2c_3$ изображает быстроедействие¹ в точку c_3 со временем $T < t_2$, а кривая $od_1d_2d_3$ изображает быстроедействие в точку d_3 со временем $T > t_2$.

2°. Пусть $\lambda_{1,2} = \beta \pm i\omega$, $\beta < 0$. Аналогичные рассуждения выделяют отрезки $[a_2, b_1]$ и $[b_2, a_1]$ с неподвижными концами b_1, a_1 и концами a_2, b_2 , скользящими по кривым G_+, G_- вместе с изображающей точкой (фиг. 2). Однако в этом случае процесс изменения области $D(T)$ заканчивается в момент t_2 . Напомним, что t_2 — наименьший положительный корень уравнения $\Phi_1(-t_2) = -1$. Область $D(t_2)$ представляет совокупность конечных точек всевозможных быстроедействий. Ни в одну точку, лежащую снаружи $D(t_2)$, быстроедействие невозможно. Ниже будет показано, что она вообще недостижима. Время T и импульс μ_1 быстроедействия в точку области $D(t_2)$ определяется из уравнений (3.3).



Фиг. 1



Фиг. 2

3°. Пусть $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. В этом случае все четыре вершины параллелограмма на плоскости $c_1 c_2$, образованного прямыми

$$c_1\Phi_2(T) + c_2\Phi_2'(T) = \pm 1, \quad c_2 = \pm 1$$

допустимы для прохождения прямой $c_1x_0 + c_2x_0' = -1$.

Допустимые положения этой прямой в вершинах A, B выделяют отрезки $[a_2b_1]$, $[b_2a_1]$ плоскости xx' , а в вершинах A', B' допустимые положения прямой $c_1x_0 + c_2x_0' = -1$ выделяют отрезки $[a_1a_2]$ и $[b_1b_2]$. На плоскости xx' эти отрезки ограничивают параллелограмм $a_1a_2b_1b_2$ (фиг. 3).

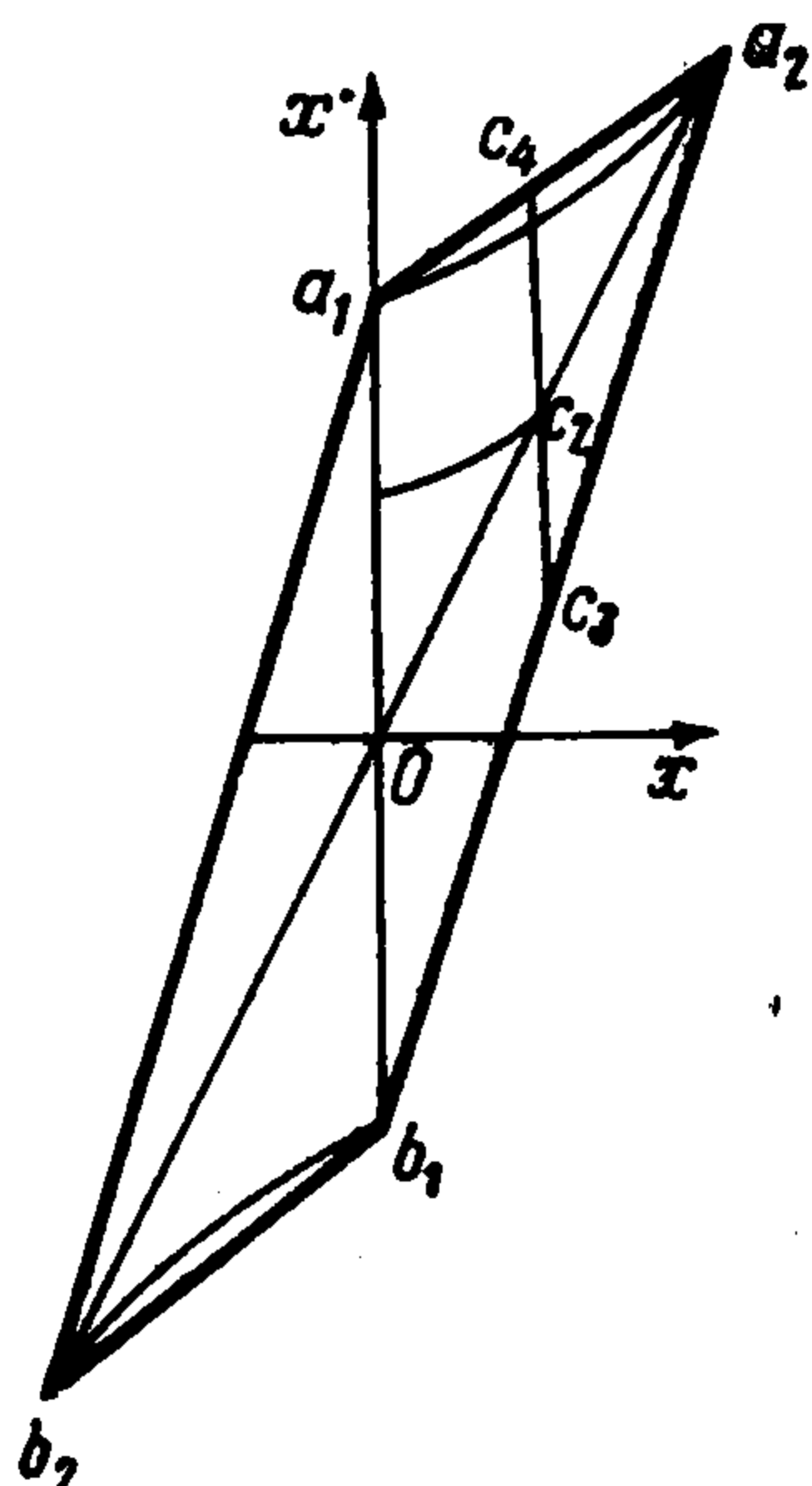
Время T и импульс μ_1 даются уравнениями (3.3), однако импульс μ_2 в точку x_0, x_{01} отрезка $[a_2b_1]$ отличается знаком от импульса μ_2' в точку x_0, x_{02} отрезка $[a_1a_2]$. При $T \rightarrow \infty$ параллелограмм преобразуется во внутренность полосы, ограниченной прямыми $x' \pm 1 = \lambda_1 x$.

4°. Если $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$, то при $T < \pi / \omega$ аналогично получаем область $D(T)$, ограниченную дугами эллипса

$$G_{+,-} [x = \pm \sin \omega\tau, \quad x' = \pm \omega \cos \omega\tau; \quad 0 \leq \tau \leq T]$$

(фиг. 4) и отрезками $[a_2b_1]$ и $[b_2a_1]$. При $T = \pi / \omega$ эллипс замыкается. Очевидно, что T всегда меньше π / ω , потому что в любую точку эллипса можно попасть за время $t < \pi / \omega$. Функции T и μ_1 даются формулами (3.3).

5°. Пусть $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$. Как и выше, получаем отрезки $[a_2b_1]$ и $[b_2a_1]$. Остается исследовать второе решение (1.5) $c_2 = -1$, в котором c_1 и t^2 неопределенны. Прямая $c_1x_0 + c_2x_0' = -1$ не может пересекать прямую $c_2 = -1$, потому что при $c_2 = -\alpha > -1$ получим $f(c_2, T) < 1$. Это значит, что $x_0 = 0$, а $x_0' = 1$. Быстроедействие в эту точку осуществляется за нулевое время. Второе решение не дает новых быстроедействий (фиг. 5).



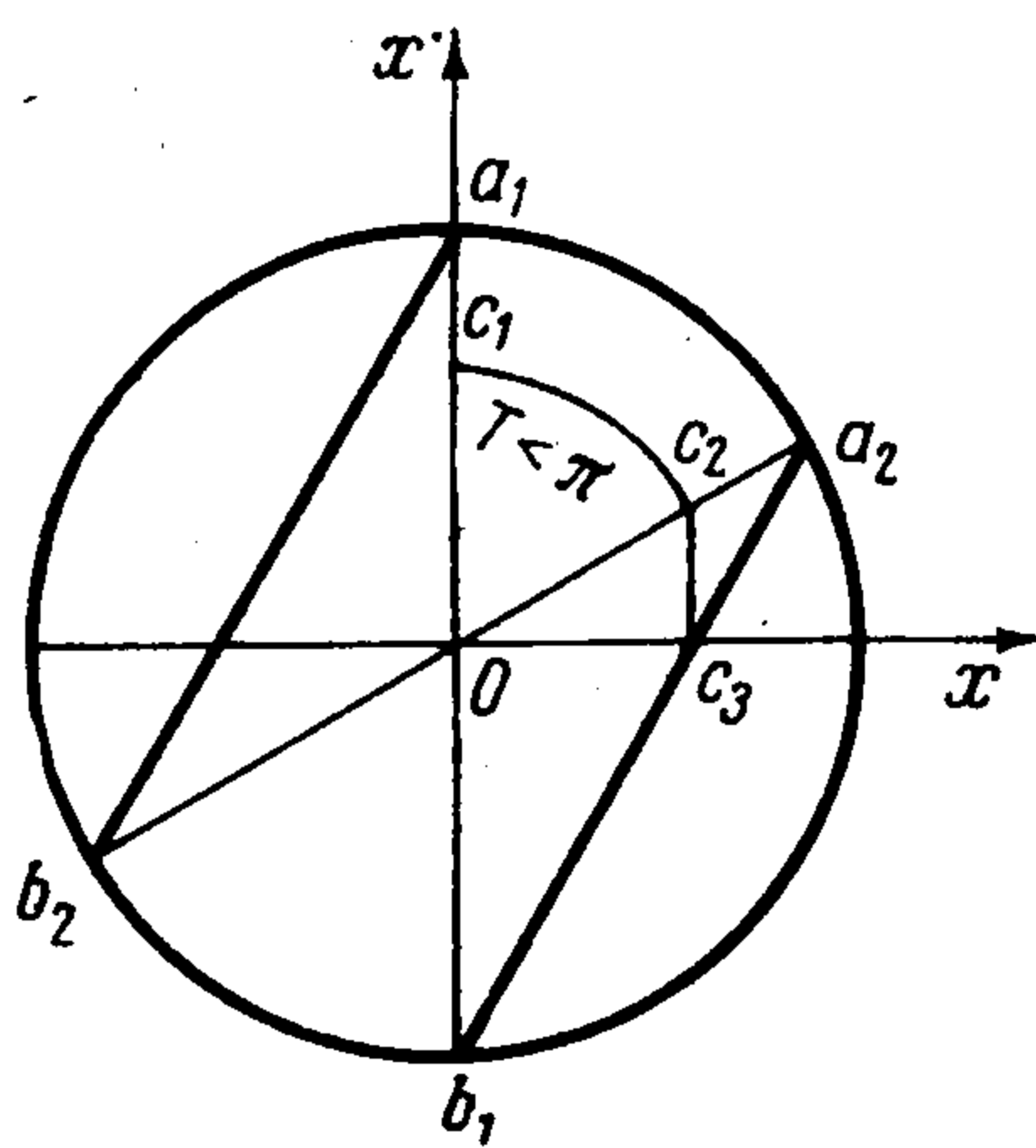
Фиг. 3

¹ Кривая с этими же обозначениями изображает быстроедействие на фигурах 2—7.

Область достижимости $D(T)$ — параллелограмм $a_1 a_2 b_1 b_2$, преобразующийся при $T \rightarrow \infty$ в полосу $x - 1 \leq \lambda_1 x \leq x + 1$.

6°. Если $\lambda_2 < 0$, $\lambda_1 = 0$, то параллелограмм $a_1 a_2 b_1 b_2$ также является областью $D(T)$. Второе решение (1.5) $c_2 = -1$ не дает новых быстродействий. При $T \rightarrow \infty$ он преобразуется в параллелограмм $a_1 a_3 b_1 b_3$ (фиг. 6) с вершинами $a_3 b_3$, лежащими на оси x .

7°. Если $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то параллелограмм $a_1 a_2 b_1 b_2$ имеет стороны $a_1 a_2$, и $b_1 b_2$, параллельные оси x . Геометрически очевидно, что быстродействия в точки отрезков $[a_2 b_1]$, $[b_2 a_1]$ необходимо требуют $t^2 = T$. При $T \rightarrow \infty$ параллелограмм переходит в полосу $-1 \leq x \leq +1$ (фиг. 7). Очевидно, что T и μ_1 в случаях 5°, 6°, 7° даются формулами (3.3).



Фиг. 4

4. Переходя к суждениям о непрерывности и дифференцируемости времени быстродействия $T(x_0, x_0)$, первого импульса $\mu_1(x_0, x_0)$, а также моментов $t^1(x_0, x_0)$, $t^2(x_0, x_0)$, рассматриваемых как функции конечной точки, отметим прежде всего, что $t^1 \equiv 0$, а $t^2 = T$, либо $t^2 = t_2$, поэтому сосредоточим внимание на функциях $T(x_0, x_0)$, $\mu_1(x_0, x_0)$. Разделим все точки x_0, x_0 на внутренние, граничные и внешние. К граничным точкам отнесем открытый отрезок $x_0 = 0, -1 < x_0 < +1$. И, кроме того, в случае 1° — кривые G_{\pm} , в случае 2° — границу $D(t_2)$, в случае 3° — прямые $x_0 \pm 1 = \lambda_1 x$, в случае 4° — границу $D(\pi/\omega)$, в случае 5° — прямые $x_0 \pm 1 = \lambda_1 x$, в случае 6° — границу $D(\infty)$, в случае 7° — прямые $x_0 = \pm 1$. К внутренним точкам отнесем все точки, которые при некотором T лежат внутри $D(T)$, а к внешним — все остальные.

Рассмотрим вначале внутреннюю точку x_0, x_0 , во всех случаях (кроме случая 1° при $T > t_2$) быстродействие определяется из уравнений (3.3). Полагая в (3.3) для определенности $x_0 > 0$ и дифференцируя обе части, получим

$$\begin{aligned} dx_0 &= \varphi_2(T) d\mu_1 + \mu_1 \varphi_2'(T) dT, \\ dx_0' &= [1 + \varphi_2'(T)] d\mu_1 + \mu_1 \varphi_2''(T) dT \end{aligned} \quad (4.1)$$

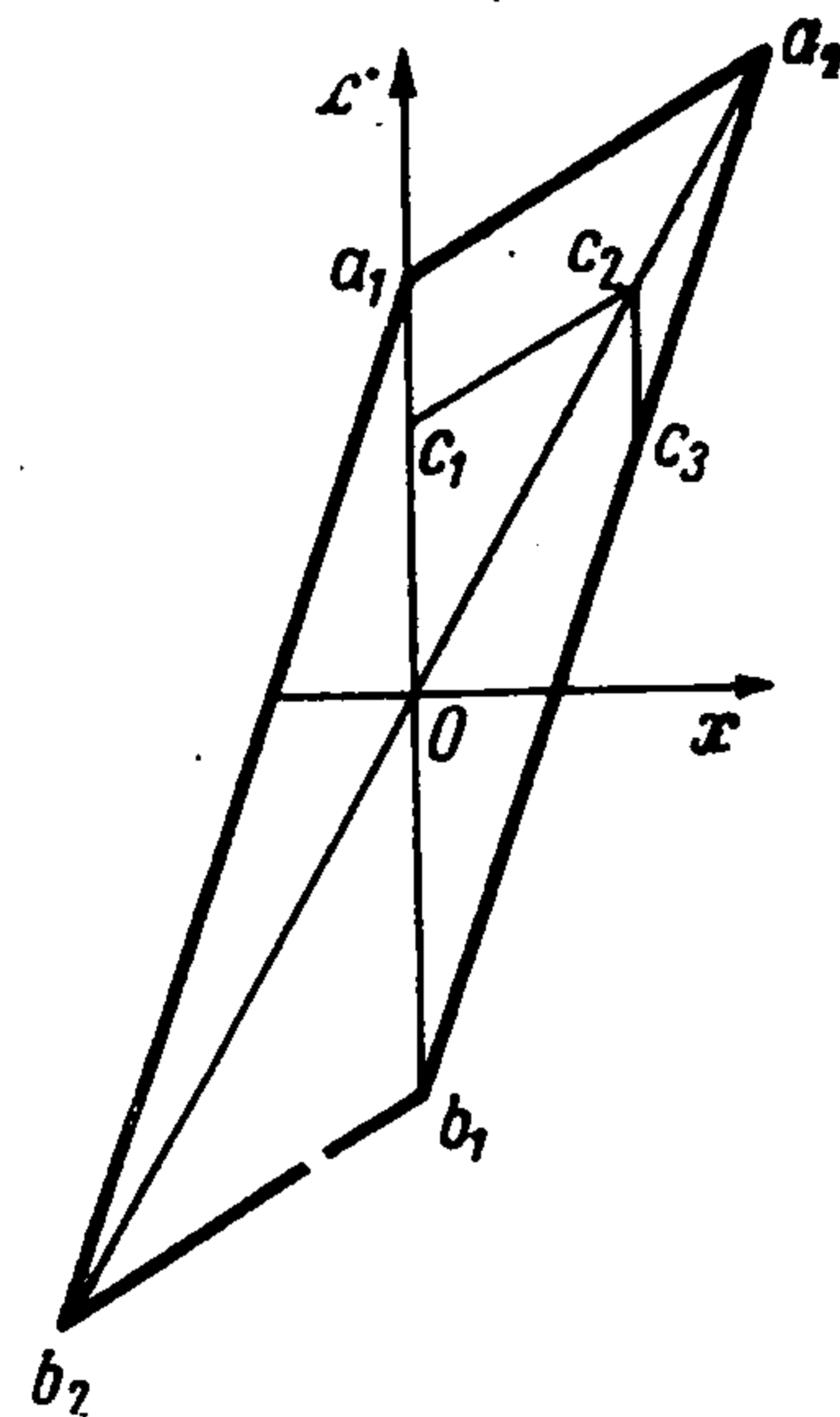
Рассматривая (4.1) как систему с неизвестными $d\mu_1, dT$, заметим, что равенство нулю ее определителя возможно тогда и только тогда, когда существует постоянная e , удовлетворяющая равенствам

$$e\varphi_2(T) + \varphi_2'(T) = -1, \quad e\varphi_2'(T) + \varphi_2''(T) = 0$$

Рассуждая как в п. 2, получим, что T удовлетворяет уравнению $\varphi_1(-T) = -1$. Это может быть только в случае 2° при $t_2 = T$. Поскольку точка внутренняя, то последнее равенство невозможно и определитель не равен нулю. По этой же причине быстродействие, определяемое формулами (3.3), существует в некоторой малой окрестности точки x_0, x_0 . Это значит, что для всякой внутренней точки частные производные от функций T, μ_1 существуют и определяются формулами (4.1).

Аналогичное рассуждение для случая 1° $T > t_2$ приводит к тому же выводу. Рассмотрим теперь граничные точки. Переход к пределу в формулах (3.3) при $x_0 \rightarrow \pm 0, x_0' \rightarrow a, (0 < a < 1)$, дает в пределе $T = 0, \mu_1 = 1/2(1 \pm a)$. Подставляя эти предельные значения в (4.1) и учитывая, что при $x_0 \rightarrow -0$ нужно заменить знаки левых частей, получим, что предельные значения частных производных при $x_0 \rightarrow \pm 0$ даются формулами

$$\frac{\partial T}{\partial x_0} = \pm \frac{2}{1 \pm a}, \quad \frac{\partial T}{\partial x_0'} = 0, \quad \frac{\partial \mu_1}{\partial x_0} = \pm \frac{b}{2}, \quad \frac{\partial \mu_1}{\partial x_0'} = \pm \frac{1}{2}$$



Фиг. 5

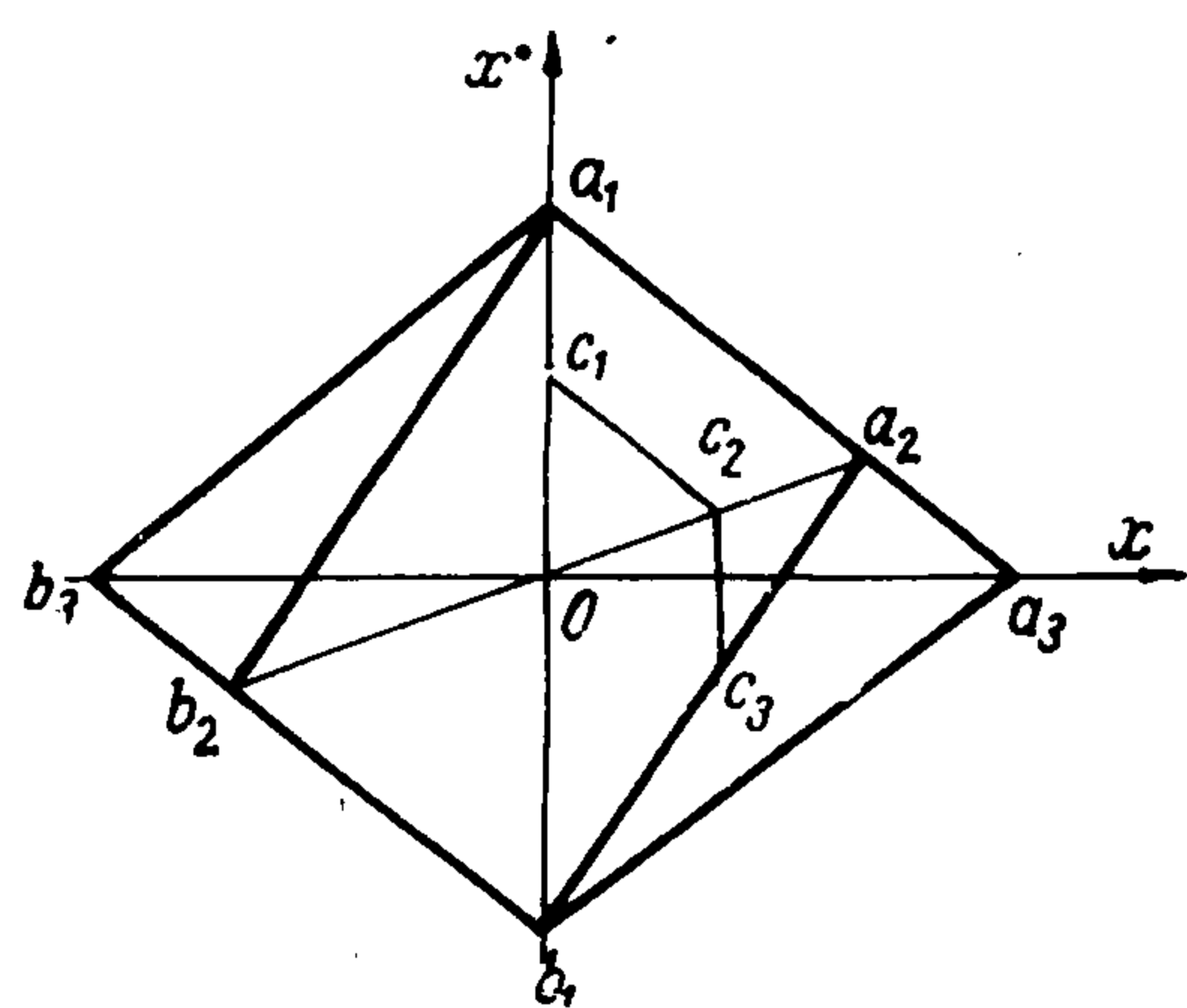
Случай $\lambda_{12} = \beta \pm i\omega$ ($\beta > 0$); кроме того, будем предполагать, что точка (x_0, x_0') совпадает с точкой b_5 (фиг. 1) граничной кривой G_- . Обозначая через $T_+ = \lim T$ при $(x_0, x_0') \rightarrow b_5^+$ со стороны начала координат и через $T_- = \lim T$ при $(x_0, x_0') \rightarrow b_5^-$ с внешней стороны, непосредственно из (фиг. 1) убеждаемся, что $T_- - T_+ = t_2$. Производная от T по направлению b_5a_1 равна нулю, а производная вдоль касательной к G_- равна 1.

Угол α между касательной и прямой b_5a_1 всегда меньше π , поэтому нормальная внутренняя производная удовлетворяет уравнению

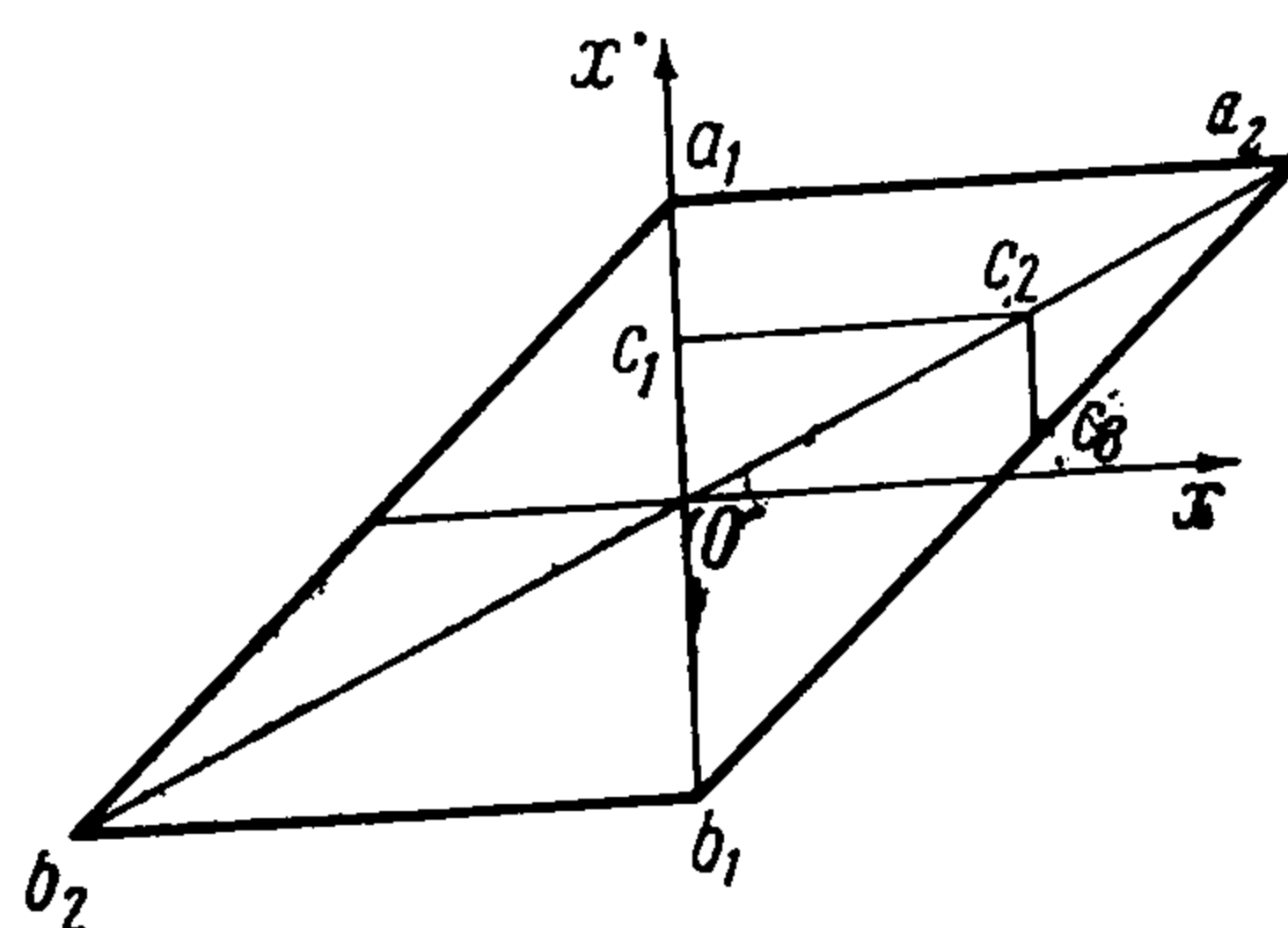
$$\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_+ \cos \alpha - \sin \alpha = 0$$

и является конечной. Производная $(\partial\mu_1/\partial n)_+$ также конечна. Иначе обстоит дело с пределом нормальной производной снаружи. Обозначая через β угол между интегральной линией и прямой b_5a_4 , получим

$$\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_- \sin \beta - \cos \beta = 0$$



Фиг. 6



Фиг. 7

Поскольку $\beta \rightarrow \pi$ при $(x_0, x_0') \rightarrow b_5^-$, то нормальная производная стремится к бесконечности. Таков же вывод по отношению к производной $(\partial\mu/\partial n)_-$.

Анализ остальных случаев не носит принципиальных отличий, поэтому ограничимся формулировкой результатов.

Случай $\lambda_{12} = \beta + i\omega$, $\beta < 0$. Во всех точках кривых G_+ и G_- , кроме $x_0 = 0$, $x_0' = \pm 1$, внутренние производные существуют и конечны; они стремятся к бесконечности только при подходе к точкам a_3, b_3 , где граница становится прямолинейной. На прямолинейных участках границы $D(t_2)$ внутренние нормальные производные бесконечны.

Случай $\lambda_{12} = \pm i\omega$. Внутренние производные существуют во всех точках граничного эллипса, кроме точек $x_0 = 0$, $x_0' = \pm 1$.

Случай $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. В точках $x_0 = 0$, $x_0' = \pm 1$ не существует производных. Пределы производных при подходе к точкам прямых $x_0' \pm 1 = \lambda_1 x_0$ вычисляются из формул (4.1).

Случай $\lambda_2 < 0$, $\lambda_1 = 0$. Свойства граничных производных повторяют 4° пункта 4.

Случай $\lambda_2 < 0$, $\lambda_1 = 0$. Свойства граничных производных повторяют 2° пункта 4.

Случай $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$. В этом случае μ_1 и T можно записать явно

$$\mu_1 = \left(\frac{1 - x_0'}{2}\right) \text{sign } x_0, \quad T = \frac{2|x_0|}{|1 + x_0' \text{sign } x_0|}$$

Все свойства отражены этими формулами.

5. Сделаем два важных замечания. Попадание из точки $(0, 0)$ в точку (x_0, x_0') за время T_1 возможно тогда и только тогда [8], когда

$$\min_{c_1, c_2} \max_{0 \leq t \leq T_1} |c_1 \varphi_1(T_1 - t) + c_2 \varphi_2(T_1 - t)| = \lambda(T_1) \geq 1 \quad (5.1)$$

Это значит, что если попадание возможно, то уменьшением T_1 до T такого значения, что $\lambda(T) = 1$, получим, что в эту точку возможно быстрое действие. Это, в свою

очередь, значит, что попадание в точку возможно только тогда, когда в нее возможно быстрое действие, и если (x_0, x_0') лежит вне области $\lim D(T)$ при $T \rightarrow \infty$, то попадание в нее вообще невозможно.

Пусть исходный «запас» отличается от 1

$$\int_0^{\infty} |u| dt \leq M > 0, \quad M \neq 1$$

Преобразуя переменные $Mu_1 = u$, $Mx_1 = x$, получим, что в переменных u_1, x_1 задача ничем не отличается от рассмотренной. Следовательно,

$$\mu_1' = M\mu_1 \left(\frac{x_0}{M}, \frac{x_0'}{M} \right), \quad T' = T \left(\frac{x_0}{M}, \frac{x_0'}{M} \right)$$

а области достижимости получатся из описанных выше M -кратным преобразованием подобия вдоль осей x, x' .

Перейдем теперь к общей задаче быстрого действия из начальной точки $A(x_1, x_1')$ в конечную $B(x_0, x_0')$.

Она допускает простую геометрическую интерпретацию. Пусть точка A движется из начальных условий x_1, x_1' по интегральной линии уравнения $x'' + bx' + cx = 0$

$$x_A = x_1\varphi_1(t) + x_1'\varphi_2(t), \quad x_A' = x_1\varphi_1'(t) + x_1'\varphi_2'(t) \quad (5.2)$$

Рассмотрим последовательные положения точки A при возрастающем t , и для каждого положения точки A построим область достижимости $D_A(t)$ с «центром» в точке A . Совокупность замкнутых областей $D_A(t)$, $0 \leq t < t_1$ также образует замкнутую область $C(t_1)$. Во всякую внутреннюю точку этой области возможно быстрое действие $T(x_0, \dots, x_1')$. Для выяснения свойств функции $T(x_0, \dots, x_1')$ детализируем структуру границы области $C(t_1)$.

При любом t_1 граница области $C(t_1)$ может содержать участки следующих типов.

1) Граница $D_A(0)$ — отрезок

$$x = x_1, \quad x_1' - 1 \leq x' \leq x_1' + 1 \quad (5.3)$$

причем границе $C(t_1)$ может принадлежать весь отрезок или некоторые его куски. В дальнейшем, фиксируя кривую, не будем оговаривать это последнее обстоятельство.

2) Траектории угловых точек a_1, b_1

$$x = x_A, \quad x' = x_A' \pm 1 \quad (5.4)$$

3) Огибающие семейства криволинейных участков границы. Очевидно, что любая такая огибающая будет интегральной линией уравнения $x'' + bx' + cx = 0$

$$x = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2, \quad x' = c_1\varphi_1' + c_2\varphi_2' \quad (5.5)$$

4) Огибающие семейства прямолинейных участков границы. Запишем уравнение прямолинейного участка в виде

$$x - x_A = \pm \lambda \varphi_2(t), \quad x' - x_A' = \pm \lambda (\varphi_2'(t) + 1) \mp 1 \quad (5.6.1)$$

либо в виде

$$\begin{aligned} x - x_A &= \pm \lambda [\varphi_2(t) - \varphi_2(t - t_2)] \pm \varphi_2(t - t_2) \\ x' - x_A' &= \pm \lambda [\varphi_2'(t) - \varphi_2'(t - t_2)] \pm \varphi_2'(t - t_2) \end{aligned} \quad (5.6.2)$$

для случая 1° при $t > t_2$. Здесь $0 < \lambda \leq 1$ — положительный параметр, и первая комбинация знаков отвечает участку (b_1a_2) (или участку (b_5a_4)), а вторая — участку (a_1b_2) (или участку (a_5b_4)).

Дифференцируя (5.6.1) по t при постоянных x, x' , получим

$$-x_A' = \pm \lambda \varphi_2 \pm \lambda \varphi_2', \quad -x_A'' = \pm \lambda (\varphi_2' + 1) \pm \lambda \varphi_2'' \quad (5.6.3)$$

¹ При $t = 0$ область достижимости $D_A(0)$ представляет собой отрезок $x = x_1, -1 + x_1' \leq x' \leq x_1' + 1$. Его можно рассматривать как замкнутый участок границы.

Определяя из этих уравнений λ и подставляя в (5.6.1), получим уравнение огибающей. Эта огибающая будет принадлежать границе только тогда, когда $\lambda(t)$ — решение (5.6.3), будет удовлетворять неравенству $0 \leq \lambda(t) \leq 1$, потому что только при этом условии точка на огибающей принадлежит границе $D_A(t)$.

5) Куски границы области $D_A(t_1)$.

В общем случае построение области $C(t_1)$ встречает трудности в том смысле, что уравнение ее границы будет зависеть от пяти параметров λ_1, λ_2 — корней характеристического уравнения, $x_1/M, x_1'/M$ — нормированных координат начальной точки и величины t_1 . Фиксируя указанные параметры, следует построить все кривые (5.3) — (5.6), а также куски границы области $D_A(t_1)$, для $0 \leq t \leq t_1$.

Некоторые из этих кривых могут целиком оказаться в области $C(t_1)$, некоторые их куски окажутся на границе.

Совокупность этих кусков образует границу области $C(t_1)$. Следует отметить, что кусок границы $C(t_1)$ может оказаться внутри области $C(t_1')$ при $t_1' > t_1$. Это наверняка произойдет с кусками границы, представляющими участки границы $D_A(t_1)$. При $t_1' = t_1 + \Delta t$ они погружаются в область $C(t_1 + \Delta t)$ целиком, за исключением, может быть, концов отрезков кривых, составляющих этот участок. Интуитивно ясно, что в любой внутренней точке этого участка время быстрогодействия будет зависеть непрерывно от начальной и конечной точек и будет непрерывно дифференцируемым во всех его внутренних точках, за исключением угловых.

Возвращаясь к кускам границы типа (5.3) — (5.6), заметим, что всякая внутренняя точка такого куска может быть поглощена областью $C_1(t_1 + \Delta t)$ только через некоторое конечное время Δt , или может в течение всего времени остаться граничной. Отсюда следует, что если точка (x_0, x_0') при $t = t_1$ лежит внутри участка границы типа (5.3) — (5.6), то время быстрогодействия в эту точку разрывно. Если точка лежит в конце одного из кусков, то время быстрогодействия может быть непрерывным только в том случае, если она является одновременно конечной точкой куска $D_A(t_1)$.

В качестве примера построения области $C(t_1)$ рассмотрим случай $\lambda_{12} = \pm i$, $x_1 < 0, x_1' > 0, x_1^2 + x_1'^2 > 1$. Область $C_1(t_1)$ ($t_1 < \pi$) ограничена $aa_1a_2b_1e$ (фиг. 8), а область $C_1(\pi)$ ограничена ломаной $ab'b''d''de$.

Ее граница содержит:

Отрезок ea — $D(0)$ типа (5.3).

Куски окружностей aa_1 и eb_1 с радиусами $R = \sqrt{x_1^2 + x_1'^2}$ и центрами на оси $x = 0; x_{12} = \pm 1$. Это — траектории точек a_1, b_1 типа (5.4).

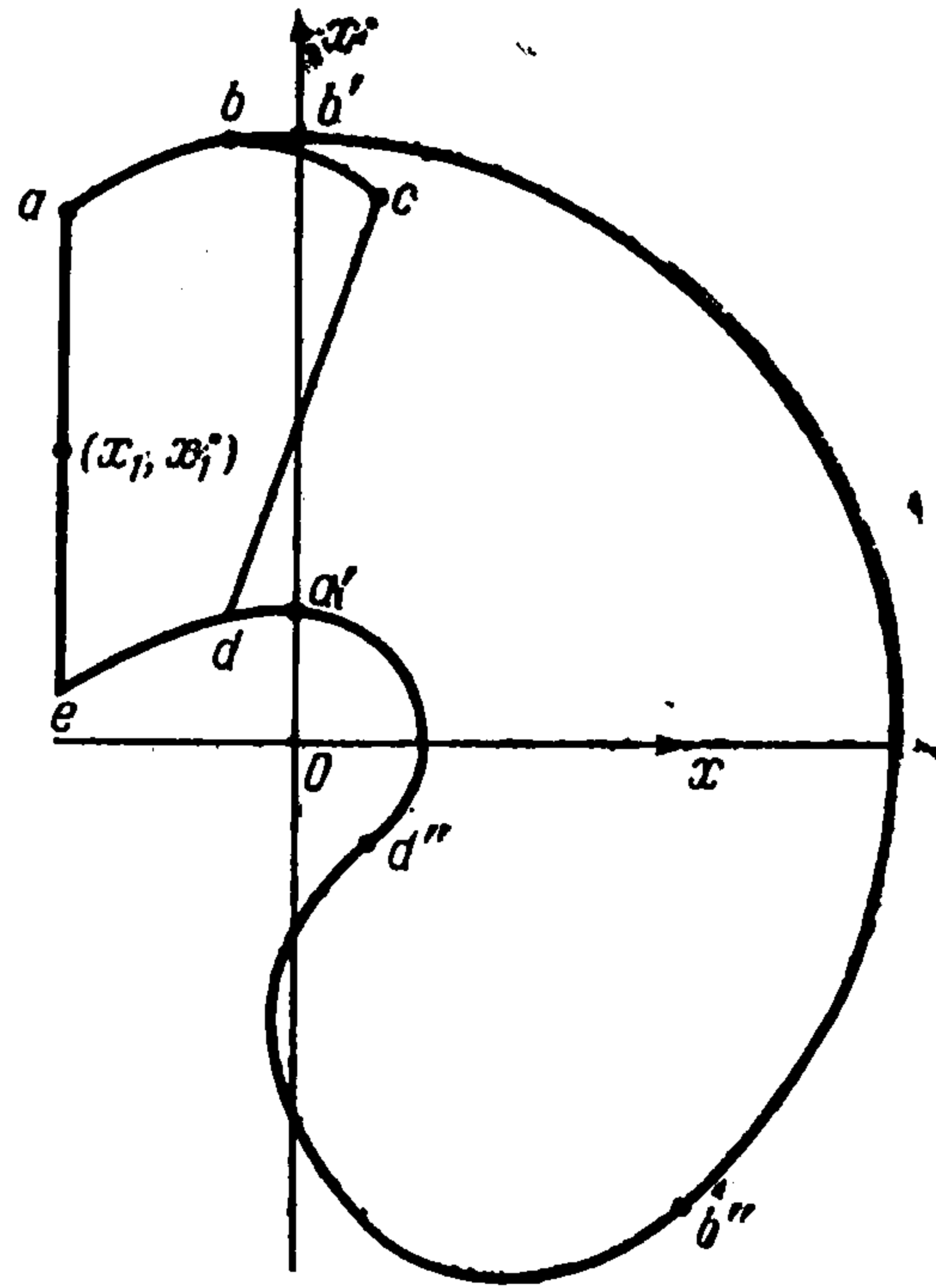
Куски окружностей $b'b''$ радиуса $R_1 = R + 1$ и $d'd''$ радиуса $R_2 = R - 1$ с центрами в начале координат. Это — огибающие криволинейных участков границы типа (5.5).

Ломаную $a_1a_2b_1$ — кусок границы $D_A(t_1)$ состоящую из куска единичной окружности с центром в точке $A(t_1)$ и отрезка прямой a_2b_1 . Это участок типа 5.7.

Единичную полуокружность $b''d''$ с центром в точке $A(\pi)$. Это кусок границы области $D_A(t_1)$.

6. Обратимся к построению аналитических критериев непрерывности и дифференцируемости функций

$$T(x_1, \dots, x_0), \mu_1(x_1, \dots, x_0), t^1(x_1, \dots, x_0), t^2(x_1, \dots, x_0)$$



Фиг. 8

Для этого удобнее изменить точку зрения и вести наблюдение из подвижной системы координат $A\bar{X}\bar{X}'$ с началом в точке A и осями, параллельными осям основной системы. Конечная точка B быстрогодействия будет в этих осях двигаться согласно уравнениям

$$x_B = x_0 - x_A(t), \quad x_B' = x_0' - x_A'(t)$$

В дальнейшем все координаты и скорости точек будут рассматриваться по отношению к новой системе отсчета.

Введем скорость точки прямолинейного участка границы области $D_A(t)$

$$v_1 = \pm \varphi_2'(t) \lambda, \quad v_2 = \pm \varphi_2''(t) \lambda \quad (0 < \lambda \leq 1)$$

На криволинейном участке границы, т. е. на кривых G_{\pm} положим $\lambda = 1$. Назовем «скоростью погружения» вектор с компонентами

$$x_C' = x_B' - v_1 - x_0', \quad x_C'' = x_B'' - v_2$$

Если первое пересечение границы области и траектории x_B, x_B' состоялось в точке (x_E, x_E') прямолинейного участка границы при $t = t_1$, то значение параметра λ определится из уравнений

$$x_E = \pm \lambda \varphi_2(t_1), \quad x_E' = \pm \lambda (\varphi_2'(t_1) + 1) \pm 1 \quad (6.1.1)$$

Либо в случае 1° п. 3 при $t_1 > t_2$ из уравнений

$$\begin{aligned} x_E &= \pm \lambda [\varphi_2(t_1) - \varphi_2(t_1 - t_2)] \pm \varphi_2(t_1 - t_2) \\ x_E' &= \pm \lambda [\varphi_2'(t_1) - \varphi_2'(t_1 - t_2)] \pm \varphi_2'(t_1 - t_2) \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

Второе уравнение каждой системы выписано на тот случай, если первое обратится в тождество.

Изменим также точку зрения на область $D_A(t_1)$ и будем рассматривать ее не как совокупность конечных точек быстрогодействий со временем $T \leq t_1$, а как совокупность конечных точек экономичных траекторий с фиксированным временем t_1 и минимальным расходом

$$\min \int_0^{\infty} |u| dt = v$$

Лемма 6.1. При $v = 1$ совокупность конечных точек экономичных траекторий представляет собою границу области $D_A(t_1)$, а при $v < 1$ граница сожмется в $1/v$ раз.

Для доказательства этого обстоятельства заметим, что, в точности повторяя рассуждения работы [6], придем к следующей теореме.

Теорема 6.1. Для того чтобы существовала экономичная траектория в точку (x_0, x_0') из точки $(0, 0)$ с фиксированным временем t_1 и расходом, равным единице, необходимо и достаточно, чтобы c_1°, c_2° были решением задачи

$$\min_{c_1, c_2} \max_{0 \leq t \leq t_1} |c_1 \varphi_2(t_1 - t) + c_2 \varphi_2'(t_1 - t)| = 1, \quad c_1 x_0 + c_2 x_0' = -1$$

Если c_1°, c_2° — решение этой задачи, а t^1, t^2, \dots, t^n — корни первого уравнения, то экономичное управление является импульсным и сумма модулей его импульсов $|\mu_1| + \dots + |\mu_n| = 1$. Опуская подробности построения экономичных траекторий, которые, почти полностью повторяют быстрогодействия, отметим только их свойства.

Экономичная траектория в прямолинейный участок границы во всех случаях, кроме случая 2° ($\operatorname{Re} \lambda < 0, t_1 > t_2$), совпадает с быстрогодействием в эту точку.

Экономичная траектория в точку криволинейного участка границы или в точку прямолинейного участка в случае $\operatorname{Re} \lambda < 0, t_1 < t_2$ строится следующим образом.

Пусть (x_0, x_0') лежит на криволинейном участке и пусть $T(x_0, x_0')$ — время быстрогодействия в эту точку, тогда экономичная траектория геометрически повторяет быстроедействие, однако t^1 — момент первого импульса $|\mu_1| = 1$ — запаздывает на время $t^1 = t_1 - T(x_0, x_0')$.

Если (x_0, x_0') лежит в случае 2° [$\text{Re} \lambda < 0, t_1 < t_2$] на прямолинейном участке границы $D(t_2)$ и $t_1 > t_2$, то геометрически быстроедействие совпадает с экономичной траекторией, но $t^1 = t_1 - t_2$.

В случае $\lambda_{1,2} = \pm i\omega, t_1 > \pi / \omega$ экономичные траектории теряют однозначность и экономичная траектория в точке (x_0, x_0') может иметь первый импульс при $t^1 = t_1 - T(x_0, x_0')$ либо при $t^1 = t_1 - T(x_0, x_0') - \pi / \omega$. Такие же случаи могут встретиться при $\text{Re} \lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$, или $\text{Re} \lambda_2 = 0, \lambda_1 > 0$ или $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Однако их не детализируем, поскольку из дальнейшего будет видно, что этот анализ не нужен.

Рассматривая $v(x_0, x_0', t_1)$ — расход на экономичной траектории из нуля как функцию конечной точки, отметим без доказательства некоторые свойства.

При всяком фиксированном $t_1 > 0$ функция $v(x_0, x_0', t_1)$ существует во всем пространстве, является определено положительной и бесконечно большой при $x_0^2 + x_0'^2 \rightarrow \infty$. Если задать некоторое t_1 , то $v(x_0, x_0', t) \geq v(x_0, x_0', t_1), 0 < t \leq t_1$.

Геометрически очевидно, что линии $v(x_0, x_0', t_1) = \kappa = \text{const} > 0$ представляют собою преобразованную в κ раз границу области $D(t_1)$. Обозначим через ψ угол между радиусом-вектором точки (x_0, x_0') и осью x , а через θ — угол между осью x и касательной к границе, тогда

$$\frac{\partial v}{\partial x_0} \cos \psi + \frac{\partial v}{\partial x_0'} \sin \psi = \frac{v}{\sqrt{x_0^2 + x_0'^2}} = \text{const}, \quad \frac{\partial v}{\partial x_0} \cos \theta + \frac{\partial v}{\partial x_0'} \sin \theta = 0 \quad (6.2)$$

Определитель этой системы $\Delta = \sin(\psi - \theta)$ не равен нулю; так как угол между радиусом-вектором и касательной $\psi - \theta$ заключен в пределах $0 < \psi - \theta < \pi$.

Угол θ во всех угловых точках границы $D(t_1)$ терпит разрыв, поэтому терпят разрыв и производные $\partial v / \partial x_0, \partial v / \partial x_0'$. Первая формула системы (6.2) выражает производную вдоль радиуса вектора, а вторая — производную вдоль границы.

Возвратимся теперь к исходной задаче и докажем теорему.

Теорема 6.2. Если вектор скорости погружения направлен внутрь области $D(t_1)$, то время быстрогодействия $T(x_0, \dots, x_1')$ является непрерывной функцией своих переменных. Если, кроме того, точка (x_E, x_E') пересечения траектории точки B и границы $D(t_1)$ не является угловой точкой границы, то $T(x_0, \dots, x_1')$ является также непрерывно дифференцируемой. Если же скорость погружения направлена вдоль границы $D(t_1)$ или наружу области, то время быстрогодействия разрывно.

Доказательство. Время T быстрогодействия есть наименьший положительный корень уравнения

$$v(x_B, x_B', t) = 1 \quad (6.3)$$

$$x_B = x_0 - x_1 \Phi_1(t) - x_1' \Phi_2(t), \quad x_B' = x_0' - x_1 \Phi_1'(t) - x_1' \Phi_2'(t)$$

Если скорость погружения направлена внутрь области, это значит, что при малых Δt

$$v(x_B(T + \Delta t), x_B'(T + \Delta t), T + \Delta t) < 1$$

Это, в свою очередь, значит, что в окрестности x_0, x_0', x_1, x_1' существует непрерывное решение $T(x_0, x_0', x_1, x_1')$ уравнения (6.3). Дифференцируя (6.3), получим

$$\frac{\partial v}{\partial x_B} dx_B + \frac{\partial v}{\partial x_B'} dx_B' + \frac{\partial v}{\partial t} dt = 0$$

$$dx_B = (x_B' - x_0) dt + dx_0 - \Phi_1'(t) dx_1 - \Phi_2(t) dx_1'$$

$$dx_B' = x_B'' dt + dx_0' - \Phi_1(t) dx_1 - \Phi_2'(t) dx_1'$$

Во всех точках, кроме угловых, частные производные $\partial v / \partial x_B$, $\partial v / \partial x_B$ существуют и непрерывны, а коэффициент при dt в уравнении (6.4), полученный после учета (6.5), меньше нуля вследствие условия о направлении скорости погружения. Поэтому существуют непрерывные частные производные функции $T(x_0, \dots, x_1)$.

Пусть вектор скорости погружения касателен к криволинейному участку границы, тогда существует такое $e = \text{const}$, что при $t = t_1$ выполняются равенства

$$x_1 \varphi_1'(t_1) + (x_1' - e) \varphi_2'(t_1) = 0, \quad x_1 \varphi_1''(t_1) + (x_1' - e) \varphi_2''(t_1) = 0$$

это значит, что они выполняются тождественно и точка B идет по границе $D(t)$. Малое смещение на соседнюю интегральную линию приведет к разрыву T .

Пусть скорость погружения направлена вдоль прямолинейного участка, тогда существует такая постоянная e , что

$$-x_A' = \pm e \varphi_2 \pm \lambda \varphi_2', \quad -x_A'' = \pm e \varphi_2' \pm \lambda \varphi_2''$$

Эти уравнения свидетельствуют о том, что точка (x_0, x_0') лежит на огибающей 5.6, поскольку они дают те же значения λ , что и уравнения (5.6.3).

Пусть скорость погружения направлена наружу области $D(t_1)$. Этот случай может встретиться только тогда, когда точка встречи x_E , x_E' совпадает с угловой точкой области $D(t_1)$, потому что в противном случае t_1 не было бы первым корнем уравнения (6.3). Если эта точка a_1 или b_1 , неподвижна в подвижной системе, то время разрыва, а точка (x_0, x_0') принадлежит куску границы типа (5.4).

Подвижная угловая точка движется по отношению к неподвижной системе по интегральной линии уравнения $x'' + bx' + cx = 0$, причем ей отвечает импульс $\mu_1 = 1$ при $t^1 = 0$. Если точка (x_0, x_0') лежит на этой линии, то очевидно, что при $t = t_1 + \Delta t$ ее скорость погружения является касательной к границе и время быстрогодействия разрывно.

При $t_1 = 0$ утверждение, что «скорость погружения» направлена внутрь области $D(0)$, не имеет смысла. Однако можно утверждать, что в тех точках отрезка $x = x_1$, $x_1' - 1 \leq x' \leq x_1' + 1$, для которых предельный вектор скорости погружения при $t_1 \rightarrow 0$ направлен внутрь области $D(t_1)$, время быстрогодействия непрерывно, а в тех, где он направлен наружу или равен нулю, время быстрогодействия разрывно.

Доказательство совершенно аналогично.

7. После того как выяснены свойства функции $T(x_0, x_0', x_1, x_1')$, рассмотрим последовательно всевозможные расположения корней на комплексной плоскости. Пусть x_E , x_E' — координаты точки пересечения кривой x_B , x_B' с границей области $D(t_1)$, или, что то же самое, границей области $D(T)$. Обозначая, как и раньше, через $T(x, x')$ время быстрогодействия из нуля в точку x, x' , а через $\mu_1(x, x')$ — значение первого импульса этого быстрогодействия, через $\mu_1 = \mu_1(x_0, x_0', x_1, x_1')$ — значение первого импульса на быстродействии из точки (x_1, x_1') в точку (x_0, x_0') , а через $t^1(x_0, x_0', x_1, x_1')$, $t^2(x_0, x_0', x_1, x_1')$ — моменты первого и второго импульсов, получим

Случай $\lambda_{12} = \beta \pm i\omega$, $\beta > 0$. Пусть точка B попадает на прямолинейный участок границы $D(T)$.

$$t^1 = 0, \quad t^2 = T, \quad \mu_1 = \mu_1(x_E, x_E') \quad \text{при } T \leq t_2 \quad (7.1)$$

$$t^1 = 0, \quad t^2 = t_2, \quad \mu_1 = \mu_1(x_E, x_E') \quad \text{при } T > t_2 \quad (7.2)$$

Если точка B попадает на криволинейный участок границы, то

$$t^1 = T - T(x_E, x_E'), \quad t^2 = T, \quad \mu_1 = \mu_1(x_E, x_E') = \pm 1 \quad (7.3)$$

Действительно, быстрое действие является необходимо экономичной траекторией, реализующей весь запас (в дальнейшем на этом базируется построение быстрых действий).

Случай $\lambda_{12} = \beta \pm i\omega$, $\beta < 0$. Если $T \leq t_2$, то точке B на прямолинейном участке границы отвечают

$$t^1 = 0, \quad t^2 = T, \quad \mu_1 = \mu_1(x_E, x_E) \quad (7.4)$$

На криволинейном участке границы при $T \leq t_2$

$$t^1 = T - T(x_B, x_B), \quad t^2 = T, \quad \mu_1 = \mu_1(x_E, x_E) \quad (7.5)$$

На прямолинейном участке при $T > t_2$

$$t^1 = T - t_2, \quad t^2 = T, \quad \mu_1 = \mu_1(x_E, x_E) \quad (7.6)$$

Случай $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. Граница состоит из прямолинейных участков

$$t^1 = 0, \quad t^2 = T, \quad \mu_1 = \mu_1(x_E, x_E) \quad (7.7)$$

Случай $\lambda_{12} = \pm i\omega$. На прямолинейном участке

$$t^1 = 0, \quad t^2 = T, \quad \mu_1 = \mu_1(x_E, x_E)$$

На криволинейном участке

$$t^1 = T - T(x_E, x_E), \quad \mu_1 = \mu_1(x_E, x_E) = \pm 1 \quad \text{при } T < \pi/\omega \quad (7.8)$$

При $2\pi/\omega > T > \pi/\omega$ возможны два быстрых действия

$$t^1 = T - T(x_E, x_E), \quad \mu_1 = \mu_1(x_E, x_E) \quad (7.9)$$

$$t^1 = T - T(x_E, x_E) - \pi/\omega, \quad \mu_1 = \mu_1[x_E(T - \pi/\omega), x_E(T - \pi/\omega)]$$

Случай $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$. В этом случае попадание точки B может произойти только на прямолинейный участок (a_2b_1) , (b_2a_1) . И скорость погружения может быть направлена внутрь только на открытом участке (a_2, b_1) или (b_2, a_1) .

Поэтому, как отмечено в п. 6, не могут представлять интереса свойства экономичных траекторий, которые могут быть неоднозначными, если конечная точка лежит на отрезке a_1a_2

$$t^1 = 0, \quad t^2 = T, \quad \mu_1 = \mu_1(x_E, x_E) \quad (7.10)$$

Случай $\lambda_2 < 0$, $\lambda_1 = 0$. Повторяется случай 7.5

$$t^1 = 0, \quad t^2 = T, \quad \mu_1 = \mu_1(x_E, x_E) \quad (7.11)$$

Случай $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

$$t^1 = 0, \quad t^2 = T, \quad \mu_1 = \mu_1(x_E, x_E) \quad (7.12)$$

Формулы (7.1)–(7.12) описывают функции μ_1 , t^1 , t^2 при помощи функций $T(x, x)$, $\mu_1(x, x)$, подробно изученных в начале статьи.

Поступила 27 XII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Цянь Сюэ Сень. Техническая кибернетика (под ред. А. А. Фельдбаума). М., Изд. иностр. лит., 1956, стр. 225–253.
2. Фельдбаум А. А. Оптимальные процессы в системах автоматического регулирования. Автоматика и телемеханика, 1953, т. 14, № 6.
3. Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Понтрягин Л. С. К теории оптимальных процессов. Докл. АН СССР, 1959, т. 110, № 1.
4. Лернер А. Я. О предельном быстром действии систем автоматического управления. Автоматика и телемеханика, 1954, т. 15, № 6.
5. Красовский Н. Н. К теории оптимального регулирования. Автоматика и телемеханика, 1957, т. 18, № 1.
6. Красовский Н. Н. К теории оптимального регулирования. ПММ, 1959, т. 23, вып. 4.
7. Калман Р. Е. Об общей теории систем управления. Тр. I Международного конгресса ИФАК, т. 2, Изд-во АН СССР, 1961.
8. Ахиезер Н., Крейн М. О некоторых вопросах теории моментов. Статья IV, ГОНТИ УССР, 1938, стр. 171.