

ДВИЖЕНИЕ ВОКРУГ ЦЕНТРА ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ВРАЩАЮЩИМИСЯ МАХОВИКАМИ

Б. А. Смольников

(Ленинград)

Задача о движении твердого тела вокруг его центра инерции при наличии внутри тела стационарных циклических вращений, не изменяющих распределения масс тела (гиростата), была впервые поставлена и рассмотрена В. Вольтерра в ряде статей за 1895—1899 гг., основные результаты которых подытожены в его работе «К теории изменения широт» [1]. Им была показана принципиальная интегрируемость уравнений для направляющих косинусов тела в эллиптических функциях времени. Частный случай задачи Вольтерра был затем более подробно изучен в работе Сильвио Эно [2], опубликованной в 1908 г. и посвященной анализу движения несимметричного твердого тела, вокруг одной из главных осей инерции которого имеется стационарное внутреннее вращение, аналогичное равномерному вращению маховика.

В предлагаемой работе исследуется другой частный случай задачи Вольтерра, когда корпус несущего тела обладает осевой динамической симметрией и тело содержит внутри себя систему маховиков, вращающихся с постоянными относительно тела скоростями. К этому же случаю приводится задача о движении тела, когда маховики вращаются с постоянными относительно инерциального пространства скоростями. При этом предполагается, что общий кинетический момент системы остается неизменным в процессе движения, т. е. внешние возмущения отсутствуют. В результате анализа уравнений задачи выявлена геометрическая картина движения, указаны типы возможных режимов движения корпуса тела и установлена зависимость этих режимов от параметров системы и начальных условий. Показано, что траектория оси симметрии тела описывает на поверхности единичной сферы петлеобразные кривые, аналогичные подобным кривым в задаче Лагранжа.

1. Исходные соотношения. Пусть в корпусе несущего тела имеется система n маховиков, оси которых фиксированы в корпусе и заданы относительно его главных осей xuz направляющими косинусами $\alpha_k \beta_k \gamma_k$, где k — номер маховика. Тогда, полагая, что моменты инерции корпуса тела (вместе с маховиками) относительно его главных осей x, y, z есть A, B, C и что проекции относительных моментов количества движения маховиков на эти же оси есть H_x, H_y, H_z , запишем уравнения сохранения суммарного момента количества движения системы в следующем виде:

$$\begin{aligned} A\omega_x + H_x &= L \sin \varphi \sin \vartheta, & B\omega_y + H_y &= L \cos \varphi \sin \vartheta \\ C\omega_z + H_z &= L \cos \vartheta \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$H_x = \sum_{k=1}^n H_k \alpha_k, \quad H_y = \sum_{k=1}^n H_k \beta_k, \quad H_z = \sum_{k=1}^n H_k \gamma_k \quad (H_k = I_k \Omega_k)$$

Здесь I_k — момент инерции k -го маховика, Ω_k — его угловая скорость относительно корпуса, $\omega_x \omega_y \omega_z$ — проекции вектора угловой ско-

рости корпуса на его главные оси, а φ , ϑ , ψ — эйлеровы углы, определяющие положение осей x , y , z относительно неподвижных осей $\xi\eta\zeta$, в которых ось ζ направлена вдоль вектора суммарного кинетического момента системы L . Заменяя в (1.1) угловые скорости ω_x , ω_y , ω_z их выражениями через эйлеровы углы и их производные и разрешая относительно производных, приходим к системе

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \left[\frac{1}{C} - \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A} + \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) \right] L \cos \vartheta + \operatorname{ctg} \vartheta \left(\frac{H_x}{A} \sin \varphi + \frac{H_y}{B} \cos \varphi \right) - \frac{H_z}{C} \\ \dot{\vartheta} &= \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) L \sin \vartheta \sin \varphi \cos \varphi - \left(\frac{H_x}{A} \cos \varphi - \frac{H_y}{B} \sin \varphi \right) \\ \dot{\psi} &= \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A} + \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) L - \frac{1}{\sin \vartheta} \left(\frac{H_x}{A} \sin \varphi + \frac{H_y}{B} \cos \varphi \right)\end{aligned}\quad (1.2)$$

Полученная система может быть проинтегрирована до конца для двух частных режимов вращения маховиков. Первый из этих режимов, рассмотренный впервые в работе В. Вольтерра [1], отвечает тому случаю, когда скорости вращения маховиков относительно корпуса поддерживаются постоянными, т. е. $H_k = \operatorname{const}$ и, следовательно, H_x , H_y , $H_z = \operatorname{const}$. Вторым режимом вращения маховиков, при котором возможно точное интегрирование системы (1.2), характеризуется постоянством абсолютных скоростей вращения маховиков относительно их осей.

Чтобы найти необходимые интегралы для каждого из этих режимов вращения маховиков, выпишем систему динамических уравнений Вольтерра для рассматриваемой системы [3]

$$\begin{aligned}A\dot{\omega}_x + (C - B)\omega_y\omega_z + \sum_{k=1}^n I_k [\dot{\Omega}_k \alpha_k + \Omega_k (\omega_y \gamma_k - \omega_z \beta_k)] &= 0 \\ B\dot{\omega}_y + (A - C)\omega_z\omega_x + \sum_{k=1}^n I_k [\dot{\Omega}_k \beta_k + \Omega_k (\omega_z \alpha_k - \omega_x \gamma_k)] &= 0 \\ C\dot{\omega}_z + (B - A)\omega_x\omega_y + \sum_{k=1}^n I_k [\dot{\Omega}_k \gamma_k + \Omega_k (\omega_x \beta_k - \omega_y \alpha_k)] &= 0\end{aligned}\quad (1.3)$$

а также уравнения вращения маховиков

$$I_k (\dot{\Omega}_k + \omega_x \alpha_k + \omega_y \beta_k + \omega_z \gamma_k) = m_k \quad (1.4)$$

Здесь m_k — вращающий момент на валу k -го маховика. Полагая теперь $\Omega_k = \operatorname{const}$ и складывая все три уравнения системы (1.3) предварительно домноженные на ω_x , ω_y , ω_z , можно получить следующий интеграл:

$$\frac{1}{2} A \omega_x^2 + \frac{1}{2} B \omega_y^2 + \frac{1}{2} C \omega_z^2 = \operatorname{const} \quad (1.5)$$

Переходя ко второму режиму вращения маховиков, достаточно положить в (1.4) $m_k = 0$, после чего из системы (1.3), действуя аналогично предыдущему, легко построить интеграл

$$\frac{1}{2} A \omega_x^2 + \frac{1}{2} B \omega_y^2 + \frac{1}{2} C \omega_z^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k (\omega_x \alpha_k + \omega_y \beta_k + \omega_z \gamma_k)^2 = \operatorname{const} \quad (1.6)$$

Нетрудно показать, что этот интеграл представляет собой интеграл энергии. Действительно, если записать выражение для кинетической энергии системы, имеющее согласно [3] вид

$$T = \frac{1}{2} A \omega_x^2 + \frac{1}{2} B \omega_y^2 + \frac{1}{2} C \omega_z^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k [\Omega_k^2 + 2\Omega_k (\omega_x \alpha_k + \omega_y \beta_k + \omega_z \gamma_k)] \quad (1.7)$$

и учесть, что при $m_k = 0$ из (1.4) вытекает

$$I_k (\Omega_k + \omega_x \alpha_k + \omega_y \beta_k + \omega_z \gamma_k) = h_k = \text{const} \quad (1.8)$$

то для T получим выражение

$$2T = A \omega_x^2 + B \omega_y^2 + C \omega_z^2 - \sum_{k=1}^n I_k (\omega_x \alpha_k + \omega_y \beta_k + \omega_z \gamma_k)^2 + \sum_{k=1}^n \frac{h_k^2}{I_k} \quad (1.9)$$

которое отличается от интеграла (1.6) лишь постоянным слагаемым.

При помощи соотношений (1.8) можно представить вектор \mathbf{H} ($H_x H_y H_z$) для данного режима вращения маховиков в виде

$$\mathbf{H} = \sum_{k=1}^n \mathbf{h}_k - \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (1.10)$$

где тензор \mathbf{G} задан матрицей своих компонентов в главных осях

$$\mathbf{G} = \left\| \begin{array}{ccc} \sum I_k \alpha_k^2 & \sum I_k \alpha_k \beta_k & \sum I_k \alpha_k \gamma_k \\ \sum I_k \beta_k \alpha_k & \sum I_k \beta_k^2 & \sum I_k \beta_k \gamma_k \\ \sum I_k \gamma_k \alpha_k & \sum I_k \gamma_k \beta_k & \sum I_k \gamma_k^2 \end{array} \right\| \quad (1.11)$$

причем суммирование под знаком \sum производится от 1 до n . Тогда закон сохранения момента количества движения системы запишется в виде

$$(\Theta - \mathbf{G}) \cdot \boldsymbol{\omega} + \sum_{k=1}^n \mathbf{h}_k = \mathbf{L} \quad (1.12)$$

где Θ — тензор инерции тела вместе с маховиками, заданный в главных осях своими компонентами A, B, C .

В проекциях на главные оси тела каждое из уравнений (1.12) будет содержать все три компоненты вектора $\boldsymbol{\omega}$. Поэтому, чтобы получить из (1.12) три скалярных уравнения, содержащих по одной из компонент вектора $\boldsymbol{\omega}$, нужно перейти к другой системе осей $x'y'z'$, повернутых относительно главных осей тела на некоторые углы. Конкретное определение матрицы поворота от осей xyz к осям $x'y'z'$ может быть выполнено совершенно аналогично тому, как это делается при определении главных осей инерции тела. Заметим, что в проекциях на оси $x'y'z'$, которые можно назвать квазиглавными осями тела, уравнения (1.12) примут форму, совершенно аналогичную форме уравнений (1.1). Физический же смысл параметров A, B, C , а также H_x, H_y, H_z будет здесь несколько иным. Указанный переход от главных осей xyz к квазиглавным осям $x'y'z'$ соответствует преобразованию выражения для кинетической энергии к нормальному виду, т. е. к виду, не содержащему произведений различных компонент вектора угловой скорости тела $\boldsymbol{\omega}$.

Оба рассматриваемых режима движения тела описываются одной и той же системой уравнений вида (1.2) и имеют интеграл вида (1.5). Принимая в качестве основных переменных эйлеровы углы, характеризую-

щие положение главных (или квазиглавных) осей тела относительно осей $\xi\eta\zeta$ и вводя вместо постоянных H_x, H_y, H_z новые постоянные R, μ и ν , определяемые следующими соотношениями:

$$H_x = AR \sin \mu \sin \nu, \quad H_y = BR \cos \mu \sin \nu, \quad H_z = CR \cos \nu$$

$$R = [(H_x/A)^2 + (H_y/B)^2 + (H_z/C)^2]^{1/2}$$

запишем систему (1.2) в таком виде:

$$\varphi' = \left[\frac{1}{C} - \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A} + \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) \right] L \cos \vartheta + R [\sin \nu \operatorname{ctg} \vartheta \cos (\varphi - \mu) - \cos \nu]$$

$$\vartheta' = \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) L \sin \vartheta \sin \varphi \cos \varphi + R \sin \nu \sin (\varphi - \mu) \quad (1.13)$$

$$\psi' = \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A} + \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) L - R \sin \nu \frac{\cos (\varphi - \mu)}{\sin \vartheta}$$

а ее интеграл (1.5)

$$\left[\frac{1}{C} - \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A} + \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) \right] L \sin^2 \vartheta +$$

$$+ 2R [\sin \nu \sin \vartheta \cos (\varphi - \mu) + \cos \nu \cos \vartheta] = \text{const} \quad (1.14)$$

Ограничиваясь далее исследованием того частного случая, когда несущее тело обладает осевой динамической симметрией, т. е. $A = B$, запишем систему (1.13) и ее интеграл (1.14) в виде

$$\varphi' = \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) L \cos \vartheta + R [\sin \nu \operatorname{ctg} \vartheta \cos (\varphi - \mu) - \cos \nu]$$

$$\vartheta' = R \sin \nu \sin (\varphi - \mu), \quad \psi' = \frac{L}{A} - R \sin \nu \frac{\cos (\varphi - \mu)}{\sin \vartheta}$$

$$a \sin^2 \vartheta + \sin \nu \sin \vartheta \cos (\varphi - \mu) + \cos \nu \cos \vartheta = c$$

$$(a = L/2R (1/C - 1/A)) \quad (1.16)$$

Здесь c — постоянная интегрирования. Используя интеграл (1.16), можно получить

$$\vartheta' = \frac{R}{\sin \vartheta} \sqrt{\sin^2 \nu \sin^2 \vartheta - (c - a \sin^2 \vartheta - \cos \nu \cos \vartheta)^2} \quad (1.17)$$

Это уравнение представим

$$\left(\frac{d \cos \vartheta}{dt} \right)^2 = -R^2 f_1(\vartheta) f_2(\vartheta) \quad (1.18)$$

Здесь функции $f_1(\vartheta)$ и $f_2(\vartheta)$, играющие основную роль в дальнейшем исследовании, очевидно есть

$$f_1(\vartheta) = a \sin^2 \vartheta + \cos (\vartheta - \nu) - c, \quad f_2(\vartheta) = a \sin^2 \vartheta + \cos (\vartheta + \nu) - c$$

Из уравнения (1.18) сразу видно, что движение тела по углу ϑ возможно лишь в тех областях значений этого угла, где знаки функций f_1 и f_2 различны. Границами этой области служат окружности единичной сферы, на которых либо $f_1 = 0$ либо $f_2 = 0$.

2. Исследование функций $f_1(\vartheta)$ и $f_2(\vartheta)$. Из (1.19) видно, что между f_1 и f_2 существуют следующие соотношения связи:

$$f_1(\vartheta) = f_2(-\vartheta), \quad f_1(\vartheta, \nu) = f_2(\vartheta, -\nu), \quad f_1(\vartheta, a, c) = -f_2(\pi - \vartheta, -a, -c) \quad (2.1)$$

Легко видеть также, что на границах интервала $0 \leq \vartheta \leq \pi$ значения функций f_1 и f_2 равны, а значения их производных по ϑ равны по величине и противоположны по знаку. В силу соотношений (2.1) достаточно ограничиться изучением поведения лишь одной из функций f_1 или f_2 , в диапазоне $-\pi \leq \vartheta \leq \pi$. Используя интеграл (1.16), можно записать функции f_1 и f_2 в виде

$$f_1 = \sin \nu \sin \vartheta [1 - \cos(\varphi - \mu)], \quad f_2 = -\sin \nu \sin \vartheta [1 + \cos(\varphi - \mu)] \quad (2.2)$$

откуда видно, что на границах области возможных движений, где f_1 или f_2 обращаются в нуль, $\varphi = \mu \pm k\pi$ (k — целое). Кроме того, из (2.2) можно заключить, что если на обеих предельных окружностях, ограничивающих область возможных движений оси тела, обращается в нуль одна и та же функция (т. е. только f_1 или только f_2), то движение по углу φ будет колебательным, если же на одной из предельных окружностей $f_1 = 0$, а на другой $f_2 = 0$, то движение по φ будет круговращательным, причем за время движения оси z тела от одной предельной окружности до другой угол φ изменится на π . Из разности $f_1 - f_2 = 2 \sin \nu \sin \vartheta$ следует, что кривые $f_1(\vartheta)$ и $f_2(\vartheta)$ пересекаются только на концах интервала $0 \leq \vartheta \leq \pi$, образуя замкнутую улиткообразную фигуру (фиг. 1). Движение по углу ϑ возможно лишь на том отрезке оси ϑ , который заключен внутри этой фигуры. Положение фигуры относительно оси ϑ определяется величиной константы c , т. е. начальными условиями движения, форма же и размеры ее — параметрами a и ν . При $\nu = 0$ (что соответствует вращению маховика только вокруг оси симметрии тела z), кривые $f_1(\vartheta)$ и $f_2(\vartheta)$ совпадают, т. е. фигура стягивается в одну линию. Несущее тело будет совершать в этом случае регулярную прецессию при

$$\cos \vartheta = \frac{1}{2a} \pm \left(\frac{1}{4a^2} - \frac{c-a}{a} \right)^{1/2}$$

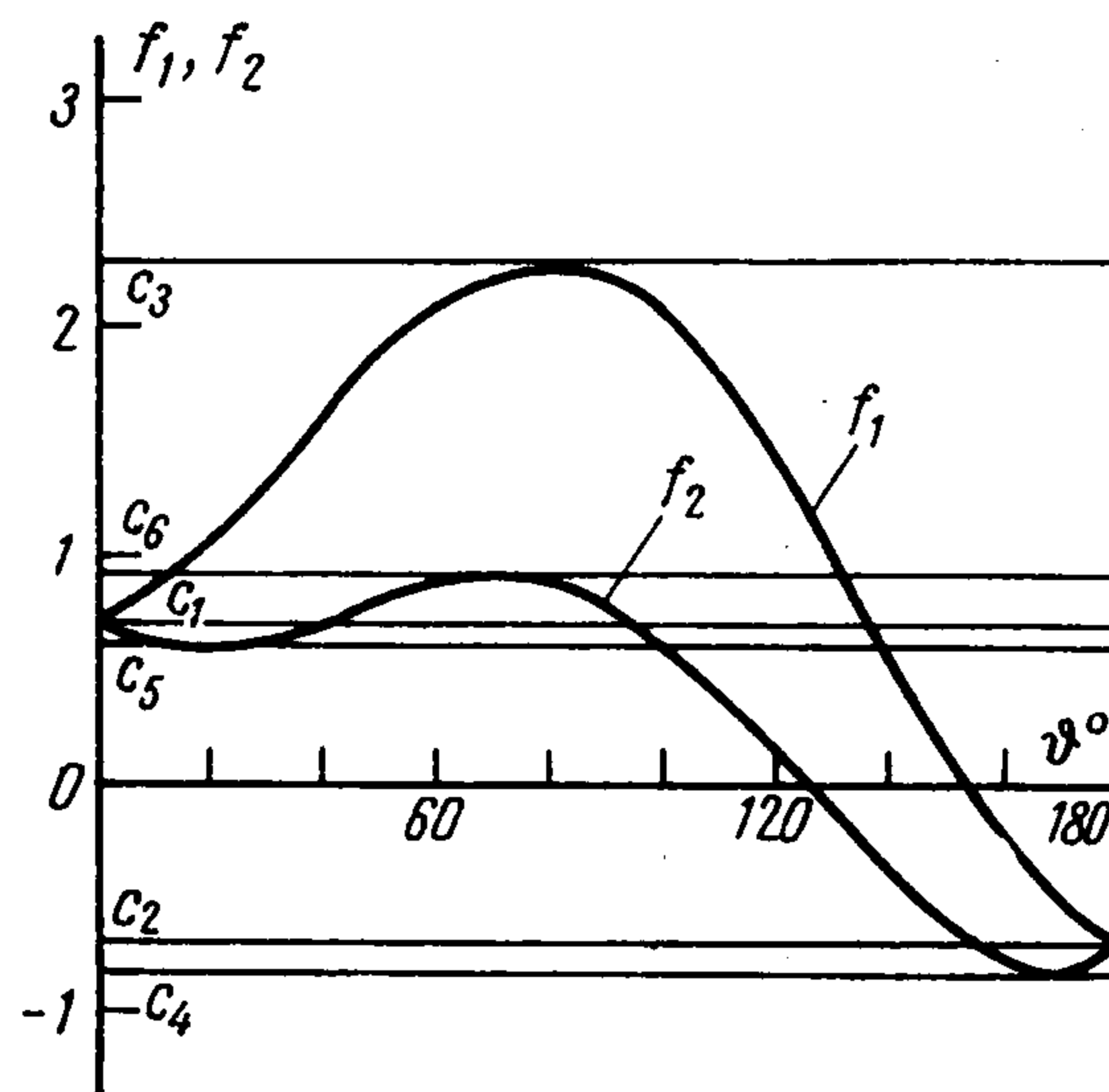
В случае, когда $\nu = \pi/2$ (т. е. отсутствует проекция кинетического момента маховиков на ось z), кривые $f_1(\vartheta)$ и $f_2(\vartheta)$, а следовательно, сама «улитка» и вся картина движения оси z тела становятся симметричными относительно $\vartheta = \pi/2$. В общем случае, как следует из фиг. 1, в зависимости от количества и расположения экстремумов функций $f_1(\vartheta)$ и $f_2(\vartheta)$ область возможных движений оси z по углу ϑ может состоять либо из одной полосы $\vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2$, либо из двух полос $\vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2$ и $\vartheta_3 \leq \vartheta \leq \vartheta_4$. Чтобы выявить влияние параметров a и ν на конфигурацию «улитки», обратимся к исследованию функции $f_2(\vartheta)$. Положение экстремумов этой функции определяется, очевидно, уравнением:

$$a \sin 2\vartheta = \sin(\vartheta + \nu) \quad (2.3)$$

Изучение решений этого уравнения при различных a и ν проще всего производить графоаналитически, изображая его правую и левую части двумя синусоидами, отличающимися по амплитуде, фазе и частоте. При помощи такого графика нетрудно установить, что в зависимости от значений параметров a и ν уравнение (2.3) может иметь один или три корня. Пограничным является тот случай, когда обе синусоиды касаются одна другой и уравнение (2.3) имеет два корня. Чтобы определить положение этой пограничной кривой на плоскости параметров $a\nu$ обозначим значения величин a , ν и ϑ , соответствующие условию касания синусоид, как a_* , ν_* и ϑ_* . Тогда, учитывая, что в точке касания синусоид их производные равны, имеем

$$a_* \sin 2\vartheta_* = \sin(\vartheta_* + \nu_*), \quad 2a_* \cos 2\vartheta_* = \cos(\vartheta_* + \nu_*) \quad (2.4)$$

Исключая из этой системы ϑ_* , можно получить явное уравнение линии раздела, однако для численных расчетов более удобно пользоваться параметрическим представ-



Фиг. 1

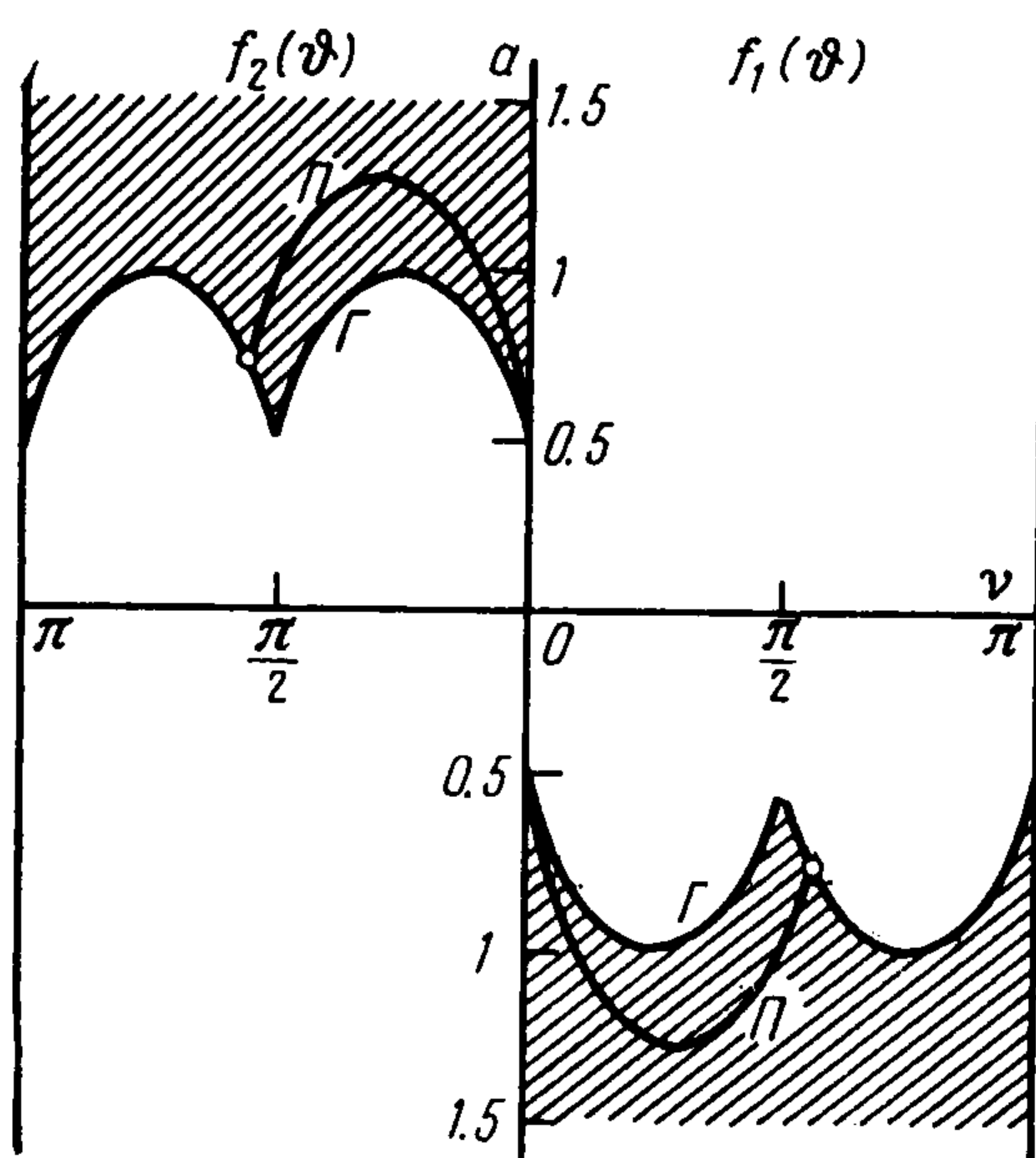
лением этой линии, имеющим вид

$$\operatorname{tg} v_* = \operatorname{tg}^3 \vartheta_*, \quad a_* = \frac{\sin(\vartheta_* + v_*)}{\sin 2\vartheta_*} \quad (2.5)$$

На фиг. 2 изображена эта линия Γ , разделяющая плоскость параметров av на области, отвечающие одному корню уравнения (2.3) (незаштрихованная область) и трем корням этого уравнения (заштрихованные области). Координаты ряда точек этой линии есть

$v_* = 0^\circ$	$0^\circ 17'$	$2^\circ 45'$	$10^\circ 53'$	$30^\circ 35'$	45°	$59^\circ 24'$	$79^\circ 04'$	$87^\circ 12'$	90°
$ a_* = 0.5$	0.5219	0.6016	0.7578	0.9577	1.0	0.9578	0.7576	0.6028	0.5

Точкам перехода из одной области в другую отвечают два корня уравнения (2.3). В силу второго из условий (2.1) можно считать, что правая полуплоскость плоскости av характеризует функцию $f_1(\vartheta)$, а левая функцию $f_2(\vartheta)$, так что экстремумы этих функций характеризуются точками, расположенными в правой и левой полуплоскостях симметрично относительно оси a . Из фиг. 2 также видно, что функция $f_1(\vartheta)$ может иметь три экстремума только при $a < -0.5$, а функция $f_2(\vartheta)$ — только при $a > 0.5$. Полагая далее, что $v \geq 0$ (в противном случае достаточно f_1 и f_2 поменять местами) имеем $df_1/d\vartheta \geq 0$ при $\vartheta = 0$, т. е. экстремумы функции $f_1(\vartheta)$ следуют в таком порядке: максимум — минимум — максимум



Фиг. 2

У функции же $f_2(\vartheta)$ чередование экстремумов будет иным: минимум — максимум — минимум (в случае, разумеется, когда их три).

Существенное значение для режима движения тела по углу φ имеет то обстоятельство, превосходит ли $\max f_2$ значение $f_2(0)$ или нет. Пограничным, очевидно, является тот случай, когда $\max f_2 = f_2(0)$. Обозначая отвечающие этому условию значения a , v и ϑ , как a_{**} , v_{**} и ϑ_{**} , можно записать соответствующие соотношения в следующем виде:

$$\begin{aligned} a_{**} \sin 2\vartheta_{**} - \sin(\vartheta_{**} + v_{**}) &= 0 \\ a_{**} \sin^2 \vartheta_{**} + \cos(\vartheta_{**} + v_{**}) - \cos v_{**} &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Исключая отсюда ϑ_{**} , можно получить уравнение линии Π , разделяющей плоскость av на области, где $\max f_2 > f_2(0)$ и $\max f_2 < f_2(0)$. Ясно, что эта линия целиком должна находиться в заштрихованной части плоскости av , так как при наличии лишь одного экстремума у функции $f_2(\vartheta)$ она вообще не имеет максимума. Для построения линии Π удобно воспользоваться ее параметрическим представлением

$$\operatorname{tg} v_{**} = \frac{2(1 - \cos \vartheta_{**})^2}{\sin 2\vartheta_{**}}, \quad a_{**} = \frac{\sin(\vartheta_{**} + v_{**})}{\sin 2\vartheta_{**}} \quad (2.7)$$

Координаты ряда точек этой линии есть

$v_{**} = 0^\circ$	$0^\circ 37'$	$2^\circ 20'$	$6^\circ 21'$	$14^\circ 33'$	$30^\circ 01'$	45°	$53^\circ 23'$	$75^\circ 55'$	$84^\circ 03'$	90°	$100^\circ 53'$
$ a_{**} = 0.5$	0.548	0.618	0.735	0.917	1.155	1.276	1.299	1.193	1.099	1.0	0.7558

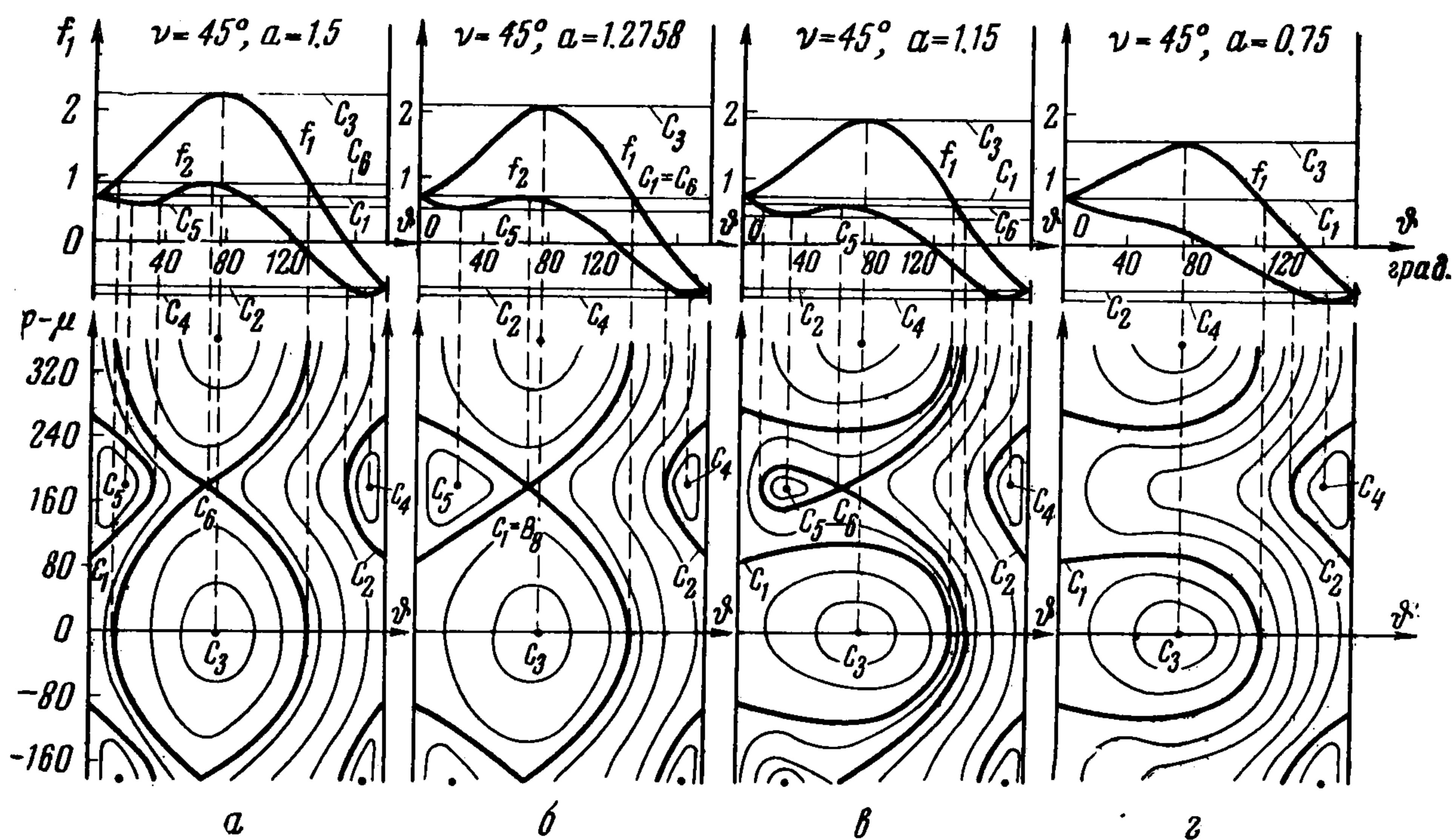
Из фиг. 2 видно, что линии Γ и Π имеют две общие точки. Координаты первой из них очевидно $|a| = 0.5$, $v = 0$. Координаты второй легко найти из сравнения выражений (2.5) и (2.7), откуда для ϑ получаем уравнение

$$\operatorname{tg}^3 \vartheta = \frac{2(1 - \cos \vartheta)^2}{\sin 2\vartheta} \quad (2.8)$$

и, следовательно, $\vartheta = 120^\circ$, $\operatorname{tg} v = -3\sqrt{3}$; $v = 100^\circ 53'$; $|a| = 0.7558$. При этих значениях параметров кривая $f_2(\vartheta)$ имеет точку перегиба на одном уровне с точкой $f_2(0)$.

Таким образом, как следует из фиг. 2, линия Π отсекает от области существования трех экстремумов функции $f_2(\vartheta)$ участок, соответствующий условию $\max f_2 < f_2(0)$. Поведение $f_1(\vartheta)$, очевидно, аналогично $f_2(\vartheta)$ и соответствует лишь условию $a < 0$.

3. Исследование фазовых траекторий. Исследование фазовых траекторий в осях $\vartheta\dot{\vartheta}$ может быть выполнено сравнительно легко ввиду наличия интеграла (1.16). Следует при этом иметь в виду, что общая картина хода фазовых траекторий, отвечающих различным значениям c , существенно зависит от того, в какой области плоскости параметров лежат значения a и ν . На фиг. 3 показано изменение картины фазовой



Фиг. 3

плоскости при перемещении характеризующей точки на плоскости $a\nu$ из области, расположенной над линией П, в область, находящуюся между П и Г и далее в область под линией Г (по прямой $\nu = 45^\circ$). Из фиг. 3, а, построенной для значений $\nu = 45^\circ$, $a = 1.5$ видно, что параметр семейства фазовых траекторий c может принимать в общем случае шесть критических значений. Первые два из них $c_1 = \cos \nu$ и $c_2 = -\cos \nu$ отвечают тому случаю, когда угол ϑ может обращаться в 0 или π . Соответствующие этим значениям c фазовые траектории представляют собой сепаратриссы, отделяющие области существования колебательных режимов движения тела по углу ϑ от режимов круговращательных. Охватываемые этими сепаратриссами колебательные циклы в предельном случае вырождаются в точки равновесия, характеризуемые значениями $c = c_4$ и $c = c_5$. Кроме этих двух колебательных циклов, здесь существует еще один цикл, центр которого определяется критическим значением $c = c_3$, а внешняя граница определяется ходом сепаратриссы $c = c_6$, состоящей из двух ветвей. Уравнения сепаратрисс $c = c_1$ и $c = c_2$ имеют вид

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{1}{\sin \nu} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \left(\cos \nu - 2a \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \right) \\ \cos \varphi &= -\frac{1}{\sin \nu} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} \left(\cos \nu + 2a \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Фиг. 3, б соответствует тому случаю, когда характеризующая точка на плоскости параметров лежит на пограничной кривой П. Здесь сепаратриссы

ратрисса $c = c_6$ сливается с сепаратриссой $c = c_1$, так что круговращательные режимы движения по углу φ оказываются возможными только в промежутке между сепаратриссами $c = c_2$ и $c = c_6$. Уравнение сепаратриссы $c = c_1$, слившейся с сепаратриссой $c = c_6$, можно в этом случае записать в виде

$$\cos \varphi = \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta_{**}}{2} \left(\frac{\cos \vartheta_{**} - \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta_{**}} - 1 \right) \quad (3.2)$$

При дальнейшем перемещении характеризующей точки в область, заключенную между кривыми Π и Γ (фиг. 3, *в*) сепаратрисса $c = c_1$ замыкается уже не вокруг центра $c = c_5$, а вокруг центра $c = c_3$. Центр же $c = c_5$ охватывается петлей сепаратриссы $c = c_6$. По мере приближения характеризующей точки на плоскости av к линии Γ эта петля все более стягивается вокруг центра $c = c_5$ и, наконец, когда точка переходит через Γ , исчезает вовсе, в результате чего фазовый портрет принимает вид, показанный на фиг. 3, *г*.

Как видно из представленных фигур, для качественного определения режимов движения корпуса тела по углам ϑ и φ достаточно ограничиться построением соответствующей улитки, подбирая необходимые значения параметров a и v на плоскости параметров a, v (фиг. 2). Однако в ряде случаев бывает необходимо определить и закон движения оси тела z в пространстве, т. е. найти траекторию, описываемую этой осью на поверхности неподвижной сферы, центр которой совмещен с центром инерции тела. Для этого запишем уравнение для угла ψ в виде

$$\dot{\psi} = \frac{L}{A} + \frac{R}{2} \frac{f_1(\vartheta) + f_2(\vartheta)}{\sin \vartheta} \quad (3.3)$$

и выразим тангенс угла χ , образованного касательной к траектории оси z и местной параллелью единичной сферы

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{r d\vartheta}{\sin \vartheta d\psi} = \frac{\sqrt{-f_1(\vartheta) f_2(\vartheta)}}{(L/AR) \sin^2 \vartheta + 1/2 [f_1(\vartheta) + f_2(\vartheta)]} \quad (3.4)$$

Отсюда следует, что $\operatorname{tg} \chi$ обращается в нуль на предельных окружностях, ограничивающих области возможных движений, и обращается в бесконечность при значениях u ($u = \cos \vartheta$),

$$u = \frac{R \cos v \pm \sqrt{[Rc - L(1/C + 1/A)]^2 + R^2(\cos^2 v - c^2)}}{L(1/C + 1/A)} \quad (3.5)$$

При $c = \pm \cos v$ очевидно имеем $u = \pm 1$, т. е. ось z тела проходит через полюс единичной сферы. Заметим также, что если один из корней знаменателя дроби (3.4) совпадает с одним из корней ее числителя, то траектория оси z имеет на соответствующей предельной окружности точку возврата. Имея выражение для $\operatorname{tg} \chi$, можно получить и формулу для «кривизны» траектории

$$K = \frac{d\chi}{\sqrt{1 + (\sin \vartheta d\psi/d\vartheta)^2 d\vartheta}} = \frac{1}{2} \frac{1}{(1 + \operatorname{tg}^2 \chi)^{3/2}} \frac{d \operatorname{tg} \chi}{d\vartheta} \quad (3.6)$$

Обращаясь снова к уравнению (3.3), видим, что при $R = 0$ или $v = 0$ тело совершает регулярную прецессию. Если же $L = 0$, то, как нетрудно показать, тело совершает чистое вращение вокруг неподвижной оси и его ось z описывает на единичной сфере окружность с угловым радиусом v , что соответствует результатам работы [4].

В общем случае, когда все указанные величины отличны от нуля, возможны четыре режима движения. Рассмотрим их на примере функций $f_1(\vartheta)$ и $f_2(\vartheta)$, приведенных на фиг. 1, где $L/AR = 0.6$, $C/A = 1/8$.

Первому режиму здесь отвечает $c_6 < c < c_3$, когда и на верхней и на нижней окружностях обращается в нуль функция $f_1(\vartheta)$. Значения $\dot{\psi}$ на верхней ψ_+ и на нижней ψ_- предельных окружностях будут

$$\dot{\psi}_+ = \frac{L}{A} - \frac{R \sin \nu}{\sin \vartheta_1}, \quad \dot{\psi}_- = \frac{L}{A} - \frac{R \sin \nu}{\sin \vartheta_2} \quad (3.7)$$

Полагая, что L и R всегда положительны, видим, что скорость движения на каждой из предельных окружностей может быть как положительной, так и отрицательной. Траектория заключена в полосе $\vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2$ и может иметь петли или точки возврата (фиг. 4, а, б).

Второй и третий режимы возникают при $c_1 < c < c_6$, если $\vartheta_1 \leq \vartheta_0 \leq \vartheta_2$ и при $c_2 < c < c_6$, если $\vartheta_3 \leq \vartheta_0 \leq \vartheta_4$. Выражения для $\dot{\psi}$ имеют соответственно вид

$$\dot{\psi}_+ = \frac{L}{A} - \frac{R \sin \nu}{\sin \vartheta_1}, \quad \dot{\psi}_- = \frac{L}{A} + \frac{R \sin \nu}{\sin \vartheta_2} \quad (3.8)$$

$$\dot{\psi}_+ = \frac{L}{A} + \frac{R \sin \nu}{\sin \vartheta_3}, \quad \dot{\psi}_- = \frac{L}{A} - \frac{R \sin \nu}{\sin \vartheta_4} \quad (3.9)$$

Нетрудно видеть, что здесь образование петель у траектории возможно лишь на окружностях, обращенных к полюсам единичной сферы (фиг. 4, в).

Четвертый режим будет характеризоваться значениями $c_5 < c < c_1$ или $c_4 < c < c_2$, так что для $\dot{\psi}$ имеем

$$\dot{\psi}_+ = \frac{L}{A} + \frac{R \sin \nu}{\sin \vartheta_1}, \quad \dot{\psi}_- = \frac{L}{A} + \frac{R \sin \nu}{\sin \vartheta_2} \quad (3.10)$$

и здесь, очевидно, петли не возникают ни на верхней, ни на нижней окружностях. В пограничном режиме, когда $c = \pm \cos \nu$ уравнения для $\dot{\psi}$ и $\dot{\vartheta}$ приобретают вид

$$\dot{\psi} = \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{A} \right) \frac{L}{2} - \frac{R \cos \nu}{1 + \cos \vartheta}$$

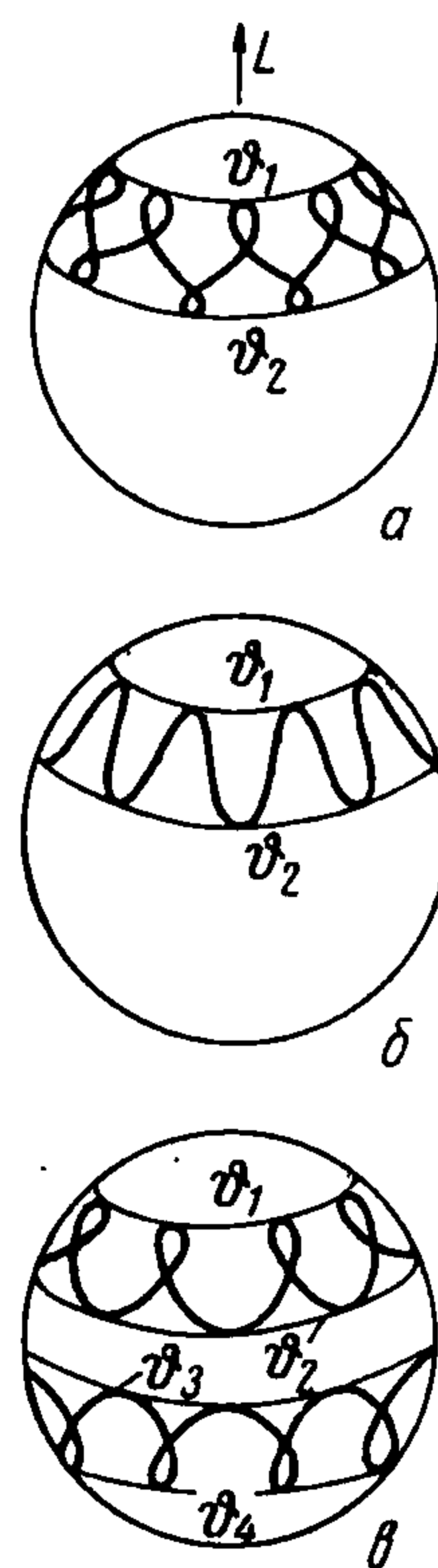
$$\dot{\vartheta} = R \sqrt{\sin^2 \nu - (\cos \nu \operatorname{tg}^{1/2} \vartheta - a \sin \vartheta)^2} \quad (3.11)$$

Видно, что при $\vartheta = 0$ скорость $\dot{\vartheta}$ не обращается в нуль и ось тела проходит через полюс единичной сферы без остановки, причем угол ψ претерпевает скачок на $\pm\pi$.

Проведенные рассуждения относились к движению оси веретенообразного тела, для которого $a > 0$. Пользуясь, однако, последним из соотношений (2.1), нетрудно показать, что и для дискообразного тела ($a < 0$) режимы движения будут совершенно аналогичными.

4. Интегрирование уравнений движения. Обращаясь теперь к интегрированию системы (1.15) запишем квадратуру для угла ϑ в виде

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2(u_1 - u)(u - u_2)(u - u_3)(u - u_4)}} = \int R dt \quad (4.1)$$



Фиг. 4

Полином, стоящий под корнем, есть

$$P(u) = \sin^2 v (1 - u^2) - [a(1 - u^2) + u \cos v - c]^2 \quad (4.2)$$

Записав значения этого полинома в точках $u = \pm 1$ и $u = 0$, получим соотношения связи между корнями полинома и параметрами a, v, c :

$$a^2 p_1 = (\cos v - c)^2, \quad a^2 p_2 = (c \cos v - a)^2, \quad a^2 p_3 = (a - c)^2 - \sin^2 v \quad (4.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} p_1 &= (1 - u_1)(1 - u_2)(1 - u_3)(1 - u_4) \\ p_2 &= (1 + u_1)(1 + u_2)(1 + u_3)(1 + u_4) \\ p_3 &= u_1 u_2 u_3 u_4 \quad (p_1 \geq 0, p_2 \geq 0) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Из системы (4.3) находим

$$a = \pm \frac{1 - \lambda}{Q}, \quad \cos v = \pm \frac{\lambda \sqrt{p_1}}{Q}, \quad c = \pm \frac{\sqrt{p_1}}{Q} \quad (4.5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} Q &= \sqrt{(1 - p_3)(1 - \lambda)^2 + p_1(1 + \lambda^2) \pm 2\sqrt{p_1}(1 - \lambda)} \\ \lambda_1 &= \frac{\sqrt{p_2} + \sqrt{p_1}}{\sqrt{p_2} - \sqrt{p_1}}, \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{p_2} - \sqrt{p_1}}{\sqrt{p_2} + \sqrt{p_1}} \end{aligned} \quad (4.6)$$

При этом для λ выбирается то значение λ_1 или λ_2 , при котором $|\cos v| \leq 1$. Полученные соотношения позволяют произвести выбор параметров, необходимых для реализации требуемого режима движения несущего тела.

Переходя непосредственно к интегрированию уравнения (4.1), заметим, что полином $P(u)$ при $|u| > 1$ всегда отрицателен и, следовательно, все его вещественные корни располагаются в интервале $-1 \leq u \leq 1$ (фиг. 5). Полагая, например, что лишь два корня полинома $P(u)$ вещественны и считая, что движение происходит в полосе $u_2 \leq u \leq u_1$, запишем, пользуясь обозначениями из [5], интеграл (4.1) в форме:

$$\int_{u_2}^u \frac{du}{\sqrt{P(u)}} = \frac{1}{\sqrt{pq}} F(\phi, k) \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} P(u) &= a^2 [(u - m)^2 + n^2] (u_1 - u)(u - u_2), & \phi &= 2 \operatorname{arctg} \left[\frac{q(u_1 - u)}{p(u - u_2)} \right]^{1/2} \\ p^2 &= (m - u_1)^2 + n^2, & q^2 &= (m - u_2)^2 + n^2, & k &= \frac{1}{2} \left[\frac{(u_1 - u_2)^2 - (p - q)^2}{pq} \right]^{1/2} \end{aligned}$$

Здесь $F(\phi, k)$ — эллиптический интеграл первого рода. Полагая, что процесс движения начинается от некоторого начального значения u_0 , не являющегося в общем случае корнем полинома $P(u)$, будем иметь

$$\int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{P(u)}} = \frac{1}{\sqrt{pq}} [F(\phi_0, k) - F(\phi, k)] \quad (4.8)$$

Выражая отсюда p , найдем

$$\sin \phi_0 = sn(\tau \sqrt{pq} + F_0), \quad \cos \phi_0 = cn(\tau \sqrt{pq} + F_0) \quad (4.9)$$

и в результате для $u(\tau)$ окончательно получим

$$u(\tau) = \frac{pu_2 + qu_1 + (pu_2 - qu_1) \operatorname{cn}(\tau \sqrt{pq} + F_0)}{p + q + (p - q) \operatorname{cn}(\tau \sqrt{pq} + F_0)} \quad (F_0 = F(\phi_0, k)) \quad (4.10)$$

Совершенно аналогично можно построить решение и для случая четырех вещественных корней полинома $P(u)$. Чтобы найти явное выражение для угла ψ , остается подставить полученные значения $u(\tau)$ в уравнение (3.3), записанное в виде

$$2\psi = \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{C}\right)L + R \left(\frac{\cos v - c}{1-u} - \frac{\cos v + c}{1+u}\right) \quad (4.11)$$

Угол ψ представится как сумма линейной функции τ и интегралов вида

$$\int \frac{d\tau}{cn(\tau + F_0) + b}, \quad \int \frac{d\tau}{sn(\tau + F_0) + b} \quad (4.12)$$

которые могут быть выражены через тэта-функции.

В заключение заметим, что и для несимметричного тела, т. е. при $A \neq B \neq C$ решение задачи может быть представлено в аналогичной форме, если положить $\mu = 0$.

Действительно, в этом случае из интеграла (1.14) можно выразить

$$\cos \varphi = \frac{-R \sin v \pm \sqrt{\alpha' u^2 + 2\beta' u + \gamma'}}{(1/A - 1/B)L \sin \vartheta} \quad (4.13)$$

Исключая при помощи этого выражения угол φ из второго уравнения системы (4.13), приходим к следующему интегралу для угла ϑ :

$$\int \frac{du}{\sqrt{\alpha' u^2 + 2\beta' u + \gamma'} \sqrt{\alpha'' u^2 + 2\beta'' u + \gamma'' + 2\delta''} \sqrt{\alpha' u^2 + 2\beta' u + \gamma'}} = \int R dt \quad (4.14)$$

$$\alpha' = L^2 \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right) \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right), \quad \beta' = -LR \cos v \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)$$

$$\gamma' = R^2 \sin^2 v + cL \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right) - L^2 \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right) \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) \quad (4.15)$$

$$\alpha'' = L^2 \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right) \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B}\right), \quad \beta'' = LR \cos v \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)$$

$$\gamma'' = -2R^2 \sin^2 v - cL \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right) + L^2 \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right) \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B}\right), \quad \delta'' = R \sin v$$

Здесь c — константа из интеграла (4.14). Интеграл (4.14) при помощи замены переменной может быть приведен к форме эллиптического интеграла. Для этого, полагая, например, $\alpha' > 0$, воспользуемся подстановкой Эйлера

$$\sqrt{\alpha' u^2 + 2\beta' u + \gamma'} = \sqrt{\alpha'} u + v \quad (4.16)$$

Отсюда, возводя в квадрат и затем дифференцируя, находим

$$\frac{du}{u \sqrt{\alpha'} + v} = \frac{dv}{\beta' - v \sqrt{\alpha'}} \quad (4.17)$$

в результате чего интеграл (4.14) принимает вид

$$\int \frac{dv}{\sqrt{\frac{1}{4}\alpha'' (v^2 - \gamma'')^2 + (v^2 - \gamma'')(\beta' - v \sqrt{\alpha'}) (\beta'' + \delta'' \sqrt{\alpha'}) + (\gamma'' + v\delta'') (\beta' - v \sqrt{\alpha'})^2}} \quad (4.18)$$

Здесь под корнем стоит полином 4-й степени, так что все последующие преобразования будут аналогичны проделанным выше. Для нахождения угла ψ остается в (4.11) заменить u на v ; в результате приходим к интегралам типа (4.12).

Поступила 27 IX 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. V o l t e r r a Vito. Sur la theorie des variations des latitudes. Opere matematiche, 1956, vol. 2, Roma, pp. 452—573.
2. E n a, S i l v i o. Intorno alla rotazione dei corpi muniti di movimenti ciclici stazionarii. Atti della R. Accademia dei Lincei, 1908, vol. 8, Roma, 1908, pp. 534—576.
3. Л у р ь е А. И. Аналитическая механика. Физматгиз, 1961.
4. С м о л ь н и к о в Б. А. К движению твердого тела под действием вращения внутреннего маховика. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1.
5. Г р а д ш т е й н И. С., Р ы ж и к И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз. 1962.