Прикладная математика и механика. Том 30, 1966

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ДВИЖЕНИЙ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ НЕЦИКЛИЧЕСКОЙ КООРДИНАТОЙ

Я. Л. Лунц, Х. Л. Смолицкий

(Ленинград)

Изучаются движения консервативных систем, в некотором смысле обобщающие прецессионные и нутационные движения гироскопов. Получены довольно простые условия устойчивости прецессионных движений по всем скоростям и нециклической координате. Эти условия, как правило, необходимы и достаточны; в частном случае из них следуют известные условия устойчивости для гироскопов с вертикальной наружной осью подвеса. Оценивается неустойчивость систем по циклическим координатам; определен вектор среднего отклонения системы от невозмущенной прецессии за период близкого нутационного колебания (уход типа Магнуса).

1. Пусть консервативная система с $n+1$ степенями свободы ($n \geqslant 1$) имеет обобщенные координаты $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta$, где β — нециклическая координата, остальные — циклические. Тогда кинетический потенциал

$$L(\alpha_1^{\cdot}, \ldots, \alpha_n^{\cdot}, \beta^{\cdot}, \beta) = \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}(\beta)\alpha_i^{\cdot}\alpha_j^{\cdot} + \beta^{\cdot} \sum_{i=1}^{n} a_i(\beta)\alpha_i^{\cdot} + \frac{1}{2} b(\beta)\beta^{\cdot 2} - \Pi(\beta)$$

где $\Pi(\beta)$ — потенциальная энергия системы. Симметричные матрицы

$$A(\beta) = \begin{Vmatrix} a_{11}, & \ldots, & a_{1n}, & a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & \ldots, & a_{nn}, & a_n \\ a_1, & \ldots, & a_n, & b \end{Vmatrix}, \qquad B(\beta) = \begin{Vmatrix} a_{11}, & \ldots, & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & \ldots, & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

определенно положительны (в смысле соответствующих им квадратичных форм) в некотором промежутке изменения β. Предполагается, что функции $a_{ij}(\beta)$, $a_i(\beta)$, $b(\beta)$, $\Pi(\beta)$ непрерывны с производными любого порядка.

Через $C(\beta)$ обозначим матрицу, обратную матрице B, т. е. $C = B^{-1}$. Введем n-мерные векторы: $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $\alpha = (\alpha_1^{\cdot}, \ldots, \alpha_n^{\cdot})$. Тогда кинетический потенциал примет вид

$$L(\alpha^{\cdot}, \beta^{\cdot}, \beta) = {}^1/_2(B\alpha^{\cdot}, \alpha^{\cdot}) + \beta^{\cdot}(a, \alpha^{\cdot}) + {}^1/_2 b\beta^{\cdot 2} - \Pi(\beta)$$

где (x, y) означает скалярное произведение векторов x и y.

Рассмотрим движение с начальными условиями $\beta_0, \beta_0^{\cdot}, \alpha_0^{\cdot}$; в последующем $A_0, B_0, \ldots, a_0, b_0$ — значение функций от β при $\beta = \beta_0$.

Из уравнений Лагранжа следуют n первых интегралов

$$B\alpha^{\cdot} + \beta^{\cdot} a = \Delta = B_0\alpha_0^{\cdot} + \beta_0^{\cdot} a_0 \tag{1.1}$$

и интеграл энергии

$$\begin{aligned} &{}^1/_2(B\alpha^{\cdot}, \alpha^{\cdot}) + \beta^{\cdot}(a, \alpha^{\cdot}) + {}^1/_2 b\beta^{\cdot 2} + \Pi(\beta) = {}^1/_2\varepsilon = \\ &= {}^1/_2(B_0\alpha_0^{\cdot}, \alpha_0^{\cdot}) + \beta_0^{\cdot}(a_0, \alpha_0^{\cdot}) + {}^1/_2 b_0\beta_0^{\cdot 2} + \Pi_0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Из уравнения (1.1) имеем

$$\alpha^{\cdot} = B^{-1}(\Delta - \beta^{\cdot} a) = C\Delta - \beta^{\cdot} Ca \tag{1.3}$$

После этого интеграл энергии принимает вид

$$\begin{gathered}{}^1/_2(\Delta - \beta^{\cdot} a,\ C\Delta - \beta^{\cdot} Ca) + \beta^{\cdot}(a,\ C\Delta - \beta^{\cdot} Ca) + {}^1/_2 b\beta^{\cdot 2} + \Pi(\beta) = \\ = {}^1/_2[b - (Ca,\ a)]\,\beta^{\cdot 2} + {}^1/_2(C\Delta,\ \Delta) + \Pi(\beta) = {}^1/_2\varepsilon\end{gathered}$$

Пусть $|A|$ и $|B|$ означают определители матриц A и B.

Так как $|A| > 0$, $|B| > 0$, то нетрудно убедиться, что

$$b - (Ca,\ a) = \frac{|A|}{|B|} > 0$$

Введем обозначения

$$h(\beta) \equiv \frac{|A|}{|B|}, \qquad \varphi(\beta,\ \Delta) = (C\Delta,\ \Delta) + 2\Pi(\beta)$$

Тогда интеграл энергии примет вид

$$h(\beta)\beta^{\cdot 2} + \varphi(\beta,\ \Delta) = \varepsilon = h_0\beta_0^{\cdot 2} + \varphi(\beta_0,\ \Delta) \tag{1.4}$$

В последующем дифференцирование по β будем обозначать штрихом: $h'(\beta)$, $\varphi'(\beta,\ \Delta)$, C' и т. д. Тогда уравнение движения в форме Раусса имеет вид

$$2h(\beta)\beta^{\cdot\cdot} + h'(\beta)\beta^{\cdot 2} + \varphi'(\beta,\ \Delta) = 0$$

Если начальные данные β_0, $\beta_0^{\cdot} = 0$, $\alpha_0^{\cdot}$ таковы, что

$$\varphi'(\beta_0,\ \Delta) = 0, \quad \text{или} \quad (C_0'\Delta,\ \Delta) + 2\Pi_0' = 0 \tag{1.5}$$

то существует движение типа $\beta \equiv \beta_0$, $\alpha^{\cdot} = \text{const}$. Движение этого типа, используя терминологию гироскопии, назовем прецессией. Для прецессии из (1.3) имеем $\alpha^{\cdot} = \alpha_0^{\cdot} = C_0\Delta$.

2. На плоскости с прямоугольными координатами $(\beta,\ z)$ (β — горизонтальная, z — вертикальная оси) рассмотрим линию $z = \varphi(\beta,\ \Delta)$ и горизонтальную прямую $z = \varepsilon$, где Δ и ε определены некоторыми произвольными начальными условиями β_0, $\beta_0^{\cdot}$, α_0. В силу (1.4) всегда имеем $\varphi(\beta_0, \Delta) \leqslant \varepsilon$, причем $\varphi(\beta_0, \Delta) = \varepsilon$ в том и только в том случае, когда $\beta_0^{\cdot} = 0$ (в силу $h_0 > 0$). Если $\beta_0^{\cdot} \neq 0$, то в некотором промежутке, содержащем внутри себя β_0, выполняется неравенство $\varphi(\beta,\ \Delta) < \varepsilon$. Предположим, что существуют точки β_1 и β_2 встречи прямой $z = \varepsilon$ и линии $z = \varphi(\beta,\ \Delta)$ такие, что $\varphi(\beta_1,\ \Delta) = \varepsilon$, $\varphi(\beta_2,\ \Delta) = \varepsilon$, $\varphi(\beta,\ \Delta) < \varepsilon$ для $\beta_1 < \beta < \beta_2$. Легко видеть, что если в точках β_1 и β_2 прямая $z = \varepsilon$ пересекает линию $z = \varphi(\beta,\ \Delta)$ (не касается, т. е. $\varphi'(\beta_1,\ \Delta) < 0$, $\varphi'(\beta_2,\ \Delta) > 0$), то уравнение Раусса имеет периодическое решение с периодом

$$T = 2\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\sqrt{h(\beta)}\,d\beta}{\sqrt{\varepsilon - \varphi(\beta,\ \Delta)}} \tag{2.1}$$

принимающее все значения между β_1 и β_2. В силу (1.3) $\alpha^{\cdot}$ также периодическая функция времени t с тем же периодом T. Описанное выше движение назовем нутационным.

Если имеет место нутационное движение, то в промежутке $\beta_1 < \beta < \beta_2$ нкция $\varphi(\beta,\ \Delta)$ имеет хотя бы одну точку минимума. Нутацию назовем правильной, если $\varphi(\beta, \Delta)$ имеет ровно одну точку минимума. В случае правильной нутации единственную точку минимума назовем центром нутации и обозначим через β_+. Очевидно, $\varphi'(\beta_+, \Delta) = 0$, и следовательно, $\beta \equiv \beta_+$, а $\alpha^{\cdot} \equiv C(\beta_+)\Delta$ будет прецессией, отвечающей центру нутации.

Представим теперь (1.3) и (1.4) в виде

$$\begin{gathered} \alpha^{\cdot} = [C(\beta) - C(\beta_+)]\,\Delta + C(\beta_+)\,\Delta - \beta^{\cdot} Ca \\ h(\beta)\,\beta^{\cdot 2} + [\varphi(\beta, \Delta) - \varphi(\beta_+, \Delta)] = \nu^2 = \varepsilon - \varphi(\beta_+, \Delta) \end{gathered} \tag{2.2}$$

Заметим, что границы β_1 и β_2 изменения β при нутации являются корнями уравнения

$$\varphi(\beta, \Delta) - \varphi(\beta_+, \Delta) = \nu^2 \tag{2.3}$$

а период T определяется формулой (2.1) с заменой в ней $\varepsilon - \varphi(\beta, \Delta)$ на $\nu^2 - [\varphi(\beta, \Delta) - \varphi(\beta_+, \Delta)]$. Определим теперь приращение вектора $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ за один период нутации. Интегрируя (2.2) по t, заменяя переменную интегрирования t на β, найдем

$$\delta\alpha = 2\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\sqrt{h(\beta)}\,[C(\beta) - C(\beta_+)]\,\Delta}{\sqrt{\nu^2 - [\varphi(\beta, \Delta) - \varphi(\beta_+, \Delta)]}}\,d\beta + TC(\beta_+)\,\Delta$$

так как интеграл от $\beta^{\cdot} Ca$ по полному периоду обращается в нуль.

Среднее приращение вектора α за период равно

$$\frac{\delta\alpha}{T} \equiv \langle\alpha^{\cdot}\rangle = \frac{2}{T}\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\sqrt{h(\beta)}\,[C(\beta) - C(\beta_+)]\,\Delta}{\sqrt{\nu^2 - [\varphi(\beta, \Delta) - \varphi(\beta_+, \Delta)]}}\,d\beta + C(\beta_+)\,\Delta \tag{2.4}$$

Центр β_+ нутации зависит только от выбора Δ, являясь корнем уравнения (1.5). Интеграл в (2.4) зависит от Δ и ν^2; обозначим его через $\Phi(\nu^2, \Delta)$. Поэтому (2.4) можно представить в виде

$$\langle\alpha^{\cdot}\rangle = \Phi(\nu^2, \Delta) + C(\beta_+(\Delta))\,\Delta \tag{2.5}$$

Приближенное выражение для $\Phi(\nu^2, \Delta)$ при малых ν и фиксированном Δ будет дано позднее, пока рассмотрим устойчивость прецессий.

3. Из равенства (1.5) следует, что для прецессии $\beta = \beta_0$, $\alpha^{\cdot} = C_0\Delta$ линия $z = \varphi(\beta, \Delta)$ имеет в точке $\beta = \beta_0$ горизонтальную касательную. Если при этом выполнено

$$\varphi''(\beta_0, \Delta) > 0, \quad \text{или} \quad (C_0''\Delta, \Delta) + 2\Pi_0'' > 0 \tag{3.1}$$

(т. е. β_0 — точка минимума для $\varphi(\beta, \Delta)$), то прецессия устойчива по β и $\alpha^{\cdot}$. Это утверждение легко следует из предположенной непрерывности a_{ij}, a_i, b, Π и их производных как функций от β, условий (1.5) и (3.1). Если $\varphi''(\beta, \Delta) < 0$, то прецессия неустойчива. Случай $\varphi''(\beta_0, \Delta) = 0$ рассматривать не будем.

Пусть теперь β_0 и Δ удовлетворяют условиям (1.5) и (3.1). Тогда соответствующая прецессия устойчива по β и $\alpha^{\cdot}$. Как правило, она неустойчива по α. Это следует хотя бы из (2.5). Ниже будет показано, что $\Phi(\nu^2, \Delta)$, как правило, отлично от нуль-вектора, и, следовательно, некоторые составляющие его отличны от нуля, что означает систематический уход соответствующей координаты α_i от значений в прецессии. Позже найдем количественную оценку этой неустойчивости для возмущений различного характера, а теперь приведем примеры применения формул (1.5) и (3.1).

4. *Примеры.* Рассмотрим гироскоп в кардановом подвесе с вертикальной осью наружной рамки. При этом одновременно рассматриваются гироскопы с пересекающимися и скрещивающимися осями рамок, со смещенным вдоль оси ротора центром тяжести гироскопа. Обозначим через α_1 угол поворота наружной рамки, α_2 — угол поворота ротора, β — угол поворота внутренней рамки. Имеем $\Pi(\beta) = mgl\sin\beta$, где m — масса ротора и внутренней рамки, l — величина смещения центра тяжести ротора и внутренней рамки вдоль оси ротора; удвоенная кинетическая энергия гироскопа равна

$$2T = M_1(\beta)\alpha_1^{\cdot 2} + J(\alpha_2^{\cdot} + \alpha_1^{\cdot}\sin\beta)^2 - 2\alpha_1^{\cdot}\beta^{\cdot}N_1(\beta) + I\beta^{\cdot 2}$$

$$M_1(\beta) = p_1 + q_1\cos 2\beta - r_1\sin 2\beta - s_1\cos\beta, \qquad N_1(\beta) = D_1\cos\beta + K_1\sin\beta$$

Здесь $p_1, q_1, r_1, s_1, D_1, K_1, I$ — различные моменты инерции (осевые и центробежные) рамок, ротора и их линейные комбинации, J — осевой момент ротора. Для тяжелого гироскопа в кардановом подвесе $r_1 = s_1 = 0$; для гироскопа с пересекающимися осями $s_1 = 0$; для гироскопа с центром тяжести гироблока, не смещенным относительно оси вращения внутреннего кольца, имеем $l = 0$.

Первые интегралы движения имеют вид

$$\Delta_1 = M_1(\beta)\alpha_1^{\cdot} + J(\alpha_2^{\cdot} + \alpha_1^{\cdot}\sin\beta)\sin\beta - N_1(\beta)\beta^{\cdot}$$

$$\Delta_2 = J(\alpha_2^{\cdot} + \alpha_1^{\cdot}\sin\beta) \equiv J\Omega \qquad (M_1(\beta) > 0)$$

Поэтому

$$a_{11} = M_1(\beta) + J\sin^2\beta, \quad a_{12} = a_{21} = J\sin\beta, \quad a_{22} = J, \quad a_1 = -N_1(\beta), \quad a_2 = 0, \quad b = I$$

При этом предполагается $M_1(\beta) > 0$ для всех значений β. Без труда находим

$$\varphi(\beta, \Delta) = (C\Delta, \Delta) + 2\Pi(\beta) = \frac{(\Delta_1 - \Delta_2\sin\beta)^2}{M_1(\beta)} + \frac{\Delta_2^2}{J} + 2mgl\sin\beta$$

Оставляя в стороне не интересный для технической гироскопии случай $\Omega = 0$, будем считать $\Omega \neq 0$. Введем безразмерные величины

$$\mu = \frac{2mgl}{J\Omega^2}, \quad \omega = \frac{\alpha_1^{\cdot}}{\Omega}, \quad \Delta = \frac{\Delta_1}{\Delta_2}, \quad p = \frac{p_1}{J}, \quad q = \frac{q_1}{J}, \quad r = \frac{r_1}{J}, \quad s = \frac{s_1}{J}$$

$$D = \frac{D_1}{J}, \quad K = \frac{K_1}{J}$$

и функции

$$M(\beta) = \frac{M_1(\beta)}{J} = p + q\cos 2\beta - r\sin 2\beta - s\cos\beta$$

$$N(\beta) = \frac{N_1(\beta)}{J} = D\cos\beta + K\sin\beta$$

Тогда будем иметь

$$\varphi(\beta, \Delta) = J\Omega^2\left[1 + \frac{(\sin\beta - \Delta)^2}{M(\beta)} + \mu\sin\beta\right]$$

В последующем вместо разыскания минимума функции $\varphi(\beta, \Delta)$ будем искать минимум функции

$$\psi(\beta, \Delta) = \frac{(\sin\beta - \Delta)^2}{M(\beta)} + \mu\sin\beta \tag{4.1}$$

Здесь

$$\Delta = \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{M_1(\beta)\alpha_1^{\cdot} + J\Omega\sin\beta - N_1(\beta)\beta^{\cdot}}{J\Omega} = \sin\beta + \omega M(\beta) - N(\beta)\frac{\beta^{\cdot}}{\Omega}$$

Поэтому, если начальное условие таково, что $\beta_0^{\cdot} = 0$, то

$$\Delta = \sin \beta_0 + M_0 \omega_0 \tag{4.2}$$

Дифференцируя (4.1), получим

$$\psi'(\beta, \Delta) = \frac{2(\sin\beta - \Delta)\cos\beta}{M(\beta)} - \frac{(\sin\beta - \Delta)^2 M'(\beta)}{M^2(\beta)} + \mu\cos\beta$$

Заменяя β на β_0, учитывая (4.2) и приравнивая результат подстановки нулю, получим уравнение для определения ω_0 — угловой скорости прецессии наружной рамки. Именно имеем

$$(\mu - 2\omega_0)\cos\beta_0 - M_0'\omega_0^2 = 0 \tag{4.3}$$

Квадратное уравнение (4.3) имеет действительные корни при выполнении условия

$$\cos^2\beta_0 + \mu M_0' \cos\beta_0 \geqslant 0 \tag{4.4}$$

Для тяжелого гироскопа ($r = s = 0$) имеем

$$M_0' = -4q\sin\beta_0\cos\beta_0$$

Поэтому уравнение (4.3) при $\beta_0 = \pm {}^1/_2\pi$ удовлетворяется любыми значениями ω_0 (существование произвольных прецессий тяжелого гироскопа при сложившихся рамках). Имеем

$$\psi''(\beta, \Delta) = \frac{2\cos^2\beta}{M(\beta)} - \frac{2(\sin\beta - \Delta)\sin\beta}{M(\beta)} - \frac{4(\sin\beta - \Delta)\cos\beta M'(\beta)}{M^2(\beta)} -$$
$$- \frac{(\sin\beta - \Delta)^2 M''(\beta)}{M^2(\beta)} + 2\frac{(\sin\beta - \Delta)^2[M'(\beta)]^2}{M^3(\beta)} - \mu\sin\beta$$

Полагая $\beta = \beta_0$ в $\psi''(\beta, \Delta)$, учитывая (4.2) и заменяя, в силу (4.3), $2\omega_0\cos\beta_0$ на $\mu\cos\beta_0 - M_0'\omega_0^2$, найдем следующее условие устойчивости:

$$2M_0^{-1}(\cos^2\beta_0 + \mu M_0'\cos\beta_0) + [(2\omega_0 - \mu)\sin\beta_0 - M_0''\omega_0^2] > 0 \tag{4.5}$$

и условие неустойчивости

$$2M_0^{-1}(\cos^2\beta_0 + \mu M_0'\cos\beta_0) + [(2\omega_0 - \mu)\sin\beta_0 - M_0''\omega_0^2] < 0 \tag{4.6}$$

прецессии $\beta \equiv \beta_0, \omega \equiv \omega_0$. Таким образом, функция $N(\beta)$ не влияет на устойчивость.

Отметим некоторые частные случаи.

1) Так как $M_0 > 0$, то, в силу (4.4), условие (4.5) выполнено, если

$$(2\omega_0 - \mu)\sin\beta_0 - M_0''\omega_0^2 > 0$$

Это достаточное условие устойчивости получено И. Н. Синициным [1].

2) Для тяжелого гироскопа

$$M_0 = p + q\cos 2\beta_0 = (p + q) - 2q\sin^2\beta_0, \qquad M_0' = -4q\sin\beta_0\cos\beta_0$$

$$M_0'' = -4q\cos 2\beta_0$$

Считая $\beta_0 \neq \pm {}^1/_2\pi$, из (4.3) найдем $\mu = 2\omega_0 - 4q\sin\beta_0\omega_0^2$. Подставив это выражение в равенство (4.5), умножив результат на M_0 и сократив на $2\cos^2\beta_0$, получим условие устойчивости прецессий тяжелого гироскопа, найденное ранее В. Н. Скимелем [2]. В обозначениях данной работы оно имеет вид

$$1 - 8q\omega_0\sin\beta_0 + 2q\omega_0^2(p + q + 6q\sin^2\beta_0) > 0$$

Для $\beta_0 = \pm {}^1/_2\pi$ имеем

$$M_0 = p - q, \quad M_0' = -4q\cos\beta_0\sin\beta_0 = 0, \quad M_0'' = 4q$$

Здесь ω_0 — произвольное. Условие устойчивости $\pm(2\omega_0 - \mu) - 4q\omega_0^2 > 0$ (плюс — для $\beta_0 = +{}^1/_2\pi$, минус — для $\beta_0 = -{}^1/_2\pi$) было ранее найдено в работах В. В. Румянцева [3] и К. Магнуса [4].

3) Если $2r \pm s \neq 0$, то $M'(\pm{}^1/_2\pi) \neq 0$. Считая последнее условие выполненным, из (4.3) для $\beta_0 = \pm{}^1/_2\pi$ найдем $\omega_0 = 0$. Поэтому прецессия $\beta_0 = \pm{}^1/_2\pi$, $\omega_0 = 0$ устойчива для $\mp\mu > 0$, неустойчива для $\mp\mu < 0$.

4) Пусть β_0 таково, что $M_0' = 0$. Тогда $\omega_0 = {}^1/_2\,\mu$ и прецессия $\beta \equiv \beta_0, \omega = {}^1/_2\,\mu$ устойчива, если $M_0'' < 0$ (в предположении $\mu \neq 0$), т. е. если β_0 есть точка максимума функции $M(\beta)$.

5) Пусть $\mu = 0$ (гироблок статически уравновешен относительно своей оси вращения). Тогда один из корней уравнения (4.3) равен нулю: $\omega_0 = 0$. Из (4.5) для $\beta_0 \neq \mp{}^1/_2\pi$ находим, что прецессия $\beta \equiv \beta_0, \omega_0 = 0$ устойчива.

В этих примерах шла речь об устойчивости по угловым скоростям ротора, наружной и внутренней рамок и углу поворота внутренней рамки. Как известно, даже прецессия примера 5 неустойчива по углу поворота наружной рамки (магнусовский уход). Вернемся к количественной оценке среднего ухода по α_i за период нутационных колебаний, определяемого формулой (2.5).

5. Пусть β_0 и Δ таковы, что выполнены условия (1.5) и (3.1). Тогда для достаточно малых $|\beta_0^{\cdot}|$ начальные условия

$$\beta = \beta_0, \qquad \alpha^{\cdot} = C_0(\Delta - \beta_0^{\cdot} a_0), \qquad \beta^{\cdot} = \beta_0^{\cdot}$$

порождают правильную нутацию с центром в β_0. Найдем первый член разложения $\Phi(\nu^2, \Delta)$ по степеням ν^2. Для этого в интегралах (2.1) и (2.4) введем новую переменную интегрирования u, полагая

$$\beta = \beta(u) \equiv {}^1/_2(\beta_2 + \beta_1) + {}^1/_2(\beta_2 - \beta_1)\sin u$$

где β_1 и β_2 — корни уравнения (2.3).

В последующем через $O(\nu)$ или $O(\nu, u)$ будем обозначать функции (векторы или матрицы, составляющие которых суть функции), определенные и равномерно ограниченные соответственно в промежутке $|\nu| \leqslant \delta$ или прямоугольнике $|\nu| \leqslant \delta$, $|u| \leqslant {}^1/_2\pi$, где $\delta > 0$ — достаточно малое число.

Представим уравнение (2.3) в виде

$${}^1/_2\,\varphi_0''(\beta - \beta_0)^2 + {}^1/_6\varphi_0'''(\beta - \beta_0)^3 + k(\beta)(\beta - \beta_0)^4 = \nu^2$$

Здесь $k(\beta)$ — ограниченная в окрестности точки $\beta = \beta_0$ функция. Тогда легко находим

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \beta_0 - c|\nu| + d\nu^2 + \nu^3 O(\nu)\\ \beta_2 &= \beta_0 + c|\nu| + d\nu^2 + \nu^3 O(\nu)\end{aligned} \qquad \left(c = \left(\frac{2}{\varphi_0''}\right)^{1/2}, \quad d = -\frac{\varphi_0'''}{3(\varphi_0'')^2}\right) \tag{5.1}$$

и, следовательно,

$$\beta(u) = \beta_0 + c|\nu|\sin u + d\nu^2 + \nu^3 O(\nu, u) \tag{5.2}$$

Поэтому для произвольной функции $f(\beta)$ имеем

$$f(\beta(u)) = f_0 + f_0' c|\nu|\sin u + (df_0' + {}^1/_2\,c^2 f_0''\sin^2 u)\nu^2 + \nu^3 O(\nu, u) \tag{5.3}$$

Для функции $\varphi(\beta, \Delta)$, в силу (1.5) и (2.3), можно доказать

$$\nu^2 - [\varphi(\beta, \Delta) - \varphi(\beta_0, \Delta)] = \left[1 + \frac{c\varphi_0'''}{3\varphi_0''}|\nu|\sin u + \nu^2 O(\nu, u)\right]\nu^2\cos^2 u$$

Отсюда

$$\frac{|\nu|\cos u}{\sqrt{\nu^2 - [\varphi(\beta, \Delta) - \varphi(\beta_0, \Delta]}} = 1 - \frac{c\varphi_0'''}{6\varphi_0''}|\nu|\sin u + \nu^2 O(\nu, u) \tag{5.4}$$

После замены переменной в интегралах (2.1) и (2.4) новые подынтегральные функции в силу (5.3) — для $\sqrt{h(\beta)}$ и $(C\beta)$ и (5.4) — для $\varphi(\beta, \Delta)$ будут равны

в интеграле (2.1)

$$\frac{\beta_2-\beta_1}{2|\nu|}\,\frac{|\nu|\cos u\sqrt{h}}{\sqrt{\nu^2-\varphi+\varphi_0}} =$$

$$= (c+\nu^2 O(\nu))\left[\sqrt{h_0}+|\nu|\,c\left(\frac{h_0'}{2\sqrt{h_0}}-\frac{\varphi_0'''}{6\varphi_0''}\right)\sin u+\nu^2 O(\nu, u)\right]$$

в интеграле (2.4)

$$\frac{\beta_2-\beta_1}{2|\nu|}\,\frac{|\nu|\cos u}{\sqrt{\nu^2-\varphi+\varphi_0}}\sqrt{h}(C-C_0) = (c+\nu^2 O(\nu))\Big\{|\nu|\sqrt{h_0}\,C_0'c\sin u +$$

$$+\nu^2\left[c^2C_0'\left(\frac{h_0'}{2\sqrt{h_0}}-\frac{\varphi_0'''}{6\varphi_0''}\right)\sin^2 u +\right.$$

$$\left.+\sqrt{h_0}\left(dC_0'+\frac{c^2}{2}C_0''\sin^2 u\right)\right]+\nu^3 O(\nu, u)\Big\}.$$

В силу того что интеграл по промежутку $-{}^1/_2\,\pi \leqslant u \leqslant {}^1/_2\pi$ от $\sin u$, $\sin^2 u$, 1 равен соответственно 0, ${}^1/_2\,\pi$, π, из последних равенств легко получим, учитывая (5.1)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2h_0}{\varphi_0''}}+\nu^2 O(\nu)$$

$$T\Phi(\nu^2, \Delta) = 2\pi\left(\frac{2}{h_0\varphi_0''}\right)^{1/2}\left[h_0\left(\frac{C_0''}{2\varphi_0''}-\frac{\varphi_0'''C_0'}{3(\varphi_0'')^2}\right)+\frac{C_0'}{2\varphi_0''}\left(h_0'-\frac{\varphi_0'''h_0}{3\varphi_0''}\right)\right]\nu^2\Delta +$$

$$+\nu^3 O(\nu) = \pi\left(\frac{2}{h_0\varphi_0''}\right)^{1/2}\left(\frac{hC'}{\varphi''}\right)_0'\Delta\nu^2+\nu^3 O(\nu) \qquad (5.5)$$

Легко доказать, что последнее слагаемое можно заменить на $\nu^4 O(\nu)$. Таким образом, имеем

$$\Phi(\nu^2, \Delta) = \frac{\nu^2}{2h_0}\left(\frac{hC'}{\varphi''}\right)_0'\Delta+\nu^4 O(\nu) = \frac{\beta_0^{\cdot 2}}{2}\left(\frac{hC'}{\varphi''}\right)_0'\Delta+\beta_0^{\cdot 4}O(\beta_0^{\cdot})$$

Здесь $\beta_0^{\cdot}$ — скорость нутации в момент прохождения центра нутации. На основании формулы (2.5) имеем

$$\langle\alpha^{\cdot}\rangle = C_0\Delta+\frac{1}{2}\beta_0^{\cdot 2}\left(\frac{hC'}{\varphi''}\right)_0'\Delta+\beta_0^{\cdot 4}O(\beta_0^{\cdot}) \qquad (5.6)$$

Применим формулу (5.6) для определения ухода наружной рамки гироскопа, статически уравновешенного относительно своей оси ($l=\mu=0$). В этом случае существует прецессия $\beta\equiv\beta_0$, $\omega_0=0$. Используя обозначения п. 4, на основании (5.6) находим

$$\langle\alpha_1^{\cdot}\rangle =$$

$$= -\beta_0^{\cdot 2}\,\frac{I\,[2(p-q)\sin\beta_0-(2r+s\sin\beta_0)\cos\beta_0]-JN_0(K+N_0\sin\beta_0)}{4J\Omega M_0\cos^2\beta_0}+\beta_0^{\cdot 4}O(\beta_0^{\cdot})$$

При $r=s=D=K=0$ получается известная приближенная формула Магнуса для ухода наружной рамки.

6. Пусть β_1 и вектор $\Delta^{(1)}$ удовлетворяют условиям (1.5) и (3.1). Тогда существует устойчивая прецессия $\beta\equiv\beta_1$, $\alpha^{\cdot}\equiv\alpha^{\cdot(1)} = C(\beta_1)\Delta^{(1)}$. Пусть β_2, $\Delta^{(2)}$ — произвольные число и вектор такие, что $|\beta_2-\beta_1|$ и $|\Delta^{(2)}-\Delta^{(1)}|$

достаточно малы; пусть $\beta_2^{\cdot}$ — достаточно малое число. Тогда движение с начальными условиями β_2, $\Delta^{(2)}$, $\beta_2^{\cdot}$ будет правильной нутацией, центр которой обозначим через β_0. Скорость $\beta_0^{\cdot}$ этой нутации в момент прохождения центра нутации определяется из равенства

$$h_0\beta_0^{\cdot 2} = h(\beta_2)\beta_2^{\cdot 2} + \varphi(\beta_2, \Delta^{(2)}) - \varphi(\beta_0, \Delta^{(2)})$$

и можно убедиться, что $\beta_0^{\cdot 2}$ — величина второго порядка малости относительно $|\beta_2^{\cdot}| + |\beta_2 - \beta_1| + |\Delta^{(2)} - \Delta^{(1)}|$.

Найдем вектор среднего отклонения $\langle \alpha^{\cdot} - \alpha_1^{\cdot} \rangle$. На основании (5.6)

$$\langle \alpha^{\cdot} - \alpha^{\cdot(1)} \rangle = C_0\Delta^{(2)} - C(\beta_1)\Delta^{(1)} + \frac{1}{2}\beta_0^{\cdot 2}\left(\frac{hC'}{\varphi''}\right)_0'\Delta^{(2)} + \beta_0^{\cdot 4}O(\beta_0^{\cdot}) \qquad (6.1)$$

Оценим величину $C_0\Delta^{(2)} - C(\beta_1)\Delta^{(1)}$. Для этого, обозначая $\xi = \Delta^{(2)} - \Delta^{(1)}$, заметим, что

$$\varphi(\beta, \Delta^{(2)}) = (C\Delta^{(2)}, \Delta^{(2)}) + 2\Pi(\beta) = (C(\Delta^{(1)} + \xi), \Delta^{(1)} + \xi) +$$
$$+ 2\Pi(\beta) = \varphi(\beta, \Delta^{(1)}) + 2(C\Delta^{(1)}, \xi) + (C\xi, \xi)$$

Поэтому, в силу (1.5), для определения центра нутации имеем

$$\varphi'(\beta_0, \Delta^{(1)}) + 2(C_0'\Delta^{(1)}, \xi) + (C_0'\xi, \xi) = 0$$

Для малых $|\xi|$ в силу $\varphi'(\beta_1, \Delta^{(1)}) = 0$ это уравнение имеет решение

$$\beta_0 = \beta_1 - \frac{2(C'(\beta_1)\Delta^{(1)}, \xi)}{\varphi''(\beta_1, \Delta^{(1)})} + |\xi|^2 O(|\xi|)$$

Поэтому

$$C_0\Delta^{(2)} - C(\beta_1)\Delta^{(1)} = (C(\beta_1) + C'(\beta_1)(\beta_1 - \beta_0) + |\xi|^2 O(|\xi|))(\Delta^{(1)} + \xi) -$$
$$- C(\beta_1)\Delta^{(1)} = C(\beta_1)\xi + \frac{2(C'(\beta_1)\Delta^{(1)}, \xi)}{\varphi''(\beta_1, \Delta^{(1)})}C'(\beta_1)\Delta^{(1)} + |\xi|^2 O(|\xi|)$$

Отсюда, если $|\xi|$, $|\beta_2 - \beta_1|$, $\beta_2^{\cdot}$ суть величины одного порядка малости, то главным членом в (5.7) будет $C_0\Delta^{(2)} - C(\beta_1)\Delta^{(1)}$; тогда имеем

$$\langle \alpha^{\cdot} - \alpha^{\cdot(1)} \rangle \approx C(\beta_1)\xi + \frac{2(C'(\beta_1)\Delta^{(1)}, \xi)}{\varphi''(\beta_1, \Delta^{(1)})}C'(\beta_1)\Delta^{(1)}$$

Если $\xi = 0$, т. е. $\Delta^{(2)} = \Delta^{(1)}$; $\beta_0 = \beta_1$ (центр нутации совпадает с исходной точкой β_1), то тогда следует пользоваться приближенной формулой

$$\langle \alpha^{\cdot} - \alpha^{\cdot(1)} \rangle \approx \frac{\nu^2}{2h(\beta_1)}\left(\frac{hC'}{\varphi''}\right)_{\beta=\beta_1}'\Delta^{(1)}$$
$$\left(\nu^2 \approx h(\beta_2)\beta_2^{\cdot 2} + \frac{1}{2}\varphi''(\beta_1, \Delta^{(1)})(\beta_2 - \beta_1)^2\right)$$

Поступила 18 I 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Синицин И. Н. Об устойчивости тяжелого гироскопа в специальном кардановом подвесе. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 1.
2. Скимель В. Н. Некоторые задачи движения и устойчивости тяжелого гироскопа. Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1958, 38.
3. Румянцев В. В. Об устойчивости движения гироскопа в кардановом подвесе. ПММ, 1958, т. 22, вып. 3.
4. Магнус К. Об устойчивости движения тяжелого симметричного гироскопа в кардановом подвесе. ПММ, 1958, т. 22, вып. 2.