НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА

В. А. Левин (Москва)

В работе рассматриваются нестационарные движения разреженного газа, которые возникают при разлете газовых облаков и истечении газа из источника. Имеется обширная литература, посвященная данному вопросу. Движения, возникающие при разлете простых конфигураций газа, в рамках сплошной среды были исследованы в работах [1-3]. С газокинетической точки зрения подобные задачи рассматривались в работе [4], в которой были получены решения, описывающие свободно-молекулярный разлет газовых облаков и движение от свободно-молекулярного источника и струи. Разлет симметричных сгустков рассматривался также в [5]. В [6] получено решение о разлете «полупространства». Задача об истечении разреженного газа из источника решалась в [7, 8]. Во всех этих работах предполагалось отсутствие внешних силовых полей. Позднее в [9] был получен результат для разлета точечной массы газа в постоянном поле.

Решение в [4, 6, 9] строится путем нахождения функции распределения частиц по скоростям из уравнения Больцмана, в котором опущен интеграл столкновений. В случае отсутствия внешних сил такое решение выписывается сразу. При постоянном силовом поле решение уравнения Больцмана получено в [9]. Ниже предлагается общий метод решения подобного рода задач при наличии различных силовых полей. Эффективность этого метода иллюстрируется рядом примеров.

Рассмотрим сначала движение газа, который в момент времени $t = \tau$ весь сосредоточен в точке пространства $\mathbf{r}_0 = (x_1^\circ, x_2^\circ, x_3^\circ)$. Кроме того, известна функция распределения частиц по скоростям в данный момент времени $f(\mathbf{u}^\circ, \tau)$ и имеется внешнее силовое поле. Тогда движение газа будет описываться следующей системой уравнений, записанной в переменных Лагранжа

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t), \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \mathbf{u}, \qquad n\frac{\partial (x_1, x_2, x_3)}{\partial (u_1^\circ, u_2^\circ, u_3^\circ)} = f(\mathbf{u}^\circ, \tau) \tag{1}$$

Здесь за лагранжевы координаты приняты время t и начальная скорость соответствующей частицы. В уравнениях движения функции F_i будут известными функциями своих аргументов, а последнее уравнение является уравнением неразрывности, записанным в переменных Лагранжа [10]. Таким образом, для определения всей картины течения надо проинтегрировать систему (1) с заданными начальными условиями $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}^\circ$ при $t = \tau$. Решив эту задачу Коши, найдем выражение для скорости и плотности в параметрическом виде, где параметром является начальная скорость. Исключая начальную скорость из решения, получим распределение скорости и плотности в каждой точке пространства в зависимости от времени.

Нужно отметить, что данный подход к решению задачи будет верен, пока якобиан преобразования $d\,(x_1, x_2, x_3;\ u_1^\circ, u_2^\circ, u_3^\circ) \neq 0$ отличен от нуля. Обращение якобиана в нуль означает, что частицы, вылетевшие из точки с разными скоростями, оказались в одной точке пространства, и найденное решение, начиная с этого момента времени, перестает быть справедливым.

Если же газ в начальный момент времени занимал некоторую область D, то соответствующее решение дается формулами

$$N = \iiint\limits_D n(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t, \tau)\, d\mathbf{r}_0, \qquad \mathbf{U} = \frac{1}{N}\iiint\limits_D n\mathbf{u}\, d\mathbf{r}_0, \qquad (d\mathbf{r}_0 = dx_1^\circ dx_2^\circ dx_3^\circ) \tag{2}$$

Если T — время работы распределенного источника, то решение в этом случае имеет вид

$$N = \int_0^T \iiint\limits_D H(t-\tau)\, n\, d\mathbf{r}_0\, d\tau$$

$$\mathbf{U} = \frac{1}{N}\int_0^T \iiint\limits_D H(t-\tau)\, n\mathbf{u}\, d\mathbf{r}_0\, d\tau, \qquad H(t-\tau) = \begin{cases} 0 & (t < \tau) \\ 1 & (t > \tau) \end{cases} \tag{3}$$

В формулах (2.3) величины n, $\mathbf{u}$ — суть решение задачи о движении точечной массы газа, который находился в момент времени $t = \tau$ в точке $\mathbf{r}_0$ с начальным распределением частиц по скоростям $f(\mathbf{r}_0, \mathbf{u}^\circ, \tau)$. Зная среднюю скорость газа и скорости от различных точек, можно вычислить тензор давления, температуру и более высокие моменты. Так, для тензора давления получим

$$P_{ij}(\mathbf{r}, t) = \iiint\limits_D m(u_i - U_i)(u_j - U_j)\, n d\mathbf{r}_0 \qquad (P_{ij} = P_{ij} - p\delta_{ij},\ 3p = P_{11} + P_{22} + P_{33}) \quad (4)$$

Здесь имеем общепринятые обозначения. Для температуры

$$T = \frac{2}{3kN} \iiint\limits_D \frac{mn}{2} \sum_{i=1}^{3} (u_i - U_i)^2\, d\mathbf{r}_0 \qquad (5)$$

Из выражения для гидростатического давления следует, что $p = NkT$. Нетрудно проверить, что гидродинамические уравнения, выписанные для всего газа, удовлетворяются тождественно.

Рассмотрим несколько примеров.

1. *Разлет газового облака в сопротивляющейся среде.* При разлете точечной массы газа система уравнений имеет вид

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = -\nu \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}, \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \mathbf{u}$$

$$n \frac{\partial (x_1, x_2, x_3)}{\partial (u_1^\circ, u_2^\circ, u_3^\circ)} = n_0 \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} \exp\left[-\beta (u_1^{\circ 2} + u_2^{\circ 2} + u_3^{\circ 2})\right] \qquad \left(\beta = \frac{m}{2kT_0}\right) \qquad (6)$$

Здесь m — масса частицы, k — постоянная Больцмана, T_0 — температура, ν — частота соударений, рассчитанная на одну частицу. В качестве начальной функции распределения взяли максвелловскую, хотя она может быть какой угодно. Решая (6) и исключая начальные скорости, получим

$$\mathbf{u} = \frac{\nu(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)e^{-\nu t}}{1 - e^{-\nu t}}, \qquad n = n_0 \nu^3 \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} (1 - e^{-\nu t})^{-3} \exp\left[-\frac{\beta \nu^2}{(1 - e^{-\nu t})^2} \sum_{i=1}^{3} (x_i - x_i^\circ)^2\right] \qquad (7)$$

Устремляя $t \to \infty$, получим покоящийся газ с предельным распределением плотности

$$n_\infty = n_0 \nu^3 \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} \exp\left[-\beta\nu^2 \sum_{i=1}^{3} (x_i - x_i^\circ)^2\right] \qquad (8)$$

Если в выражениях (7) устремить трение к нулю $\nu \to 0$, то получим известное решение [4, 9], описывающее разлет точечной массы газа в свободном пространстве.

Воспользовавшись выражениями (2), для средней скорости и плотности получим при разлете объема D формулы

$$N = n_0 \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} \nu^3 \iiint\limits_D (1 - e^{-\nu t})^{-3} \exp\left[-\frac{\beta\nu^2}{(1 - e^{-\nu t})^2} \sum_{i=1}^{3} (x_i - x_i^\circ)^2\right] d\mathbf{r}_0$$

$$\mathbf{U} = n_0 \nu^4 \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} \frac{e^{-\nu t}}{N} \iiint\limits_D (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)(1 - e^{-\nu t})^{-4} \exp\left[-\frac{\beta\nu^2}{(1 - e^{-\nu t})^2} \sum_{i=1}^{3} (x_i - x_i^\circ)^2\right] d\mathbf{r}_0 \qquad (9)$$

Если первоначально газ заполнял полупространство, плоский слой, цилиндрическую полость или шар, то, устремляя $\nu \to 0$ в (9) и производя несложное интегрирование, получим известные формулы, описывающие свободно-молекулярный разлет соответствующих областей газа [4–6].

2. *Свободно-молекулярный источник в силовом поле* (фиг. 1). Пусть в начале координат находится точечный источник газа и имеется постоянное силовое поле (сила тяжести). Кроме того, задана мощность источника I (для простоты — постоянная) и функция распределения вылетающих частиц по скоростям. Функцию распределения возьмем в виде

$$f(\mathbf{u}^\circ, \tau) = I\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} \exp\{-\beta[u_1^{\circ 2} + (u_2^\circ - V_2)^2 + (u_3^\circ - V_3)^2]\} \qquad (10)$$

т. е. частицы вылетают со средней скоростью $V = (0, V_2, V_3)$. Опуская промежуточные выкладки, получим

$$N = I\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} \int_0^T \frac{H(t-\tau)}{(t-\tau)^3} \times$$

$$\times \exp\left\{-\beta \frac{x_1^2 + [x_2 - V_2(t-\tau)]^2 + [x_3 - V_3(t-\tau) + {}^1/_2\, g(t-\tau)^2]^2}{(t-\tau)^2}\right\} d\tau$$

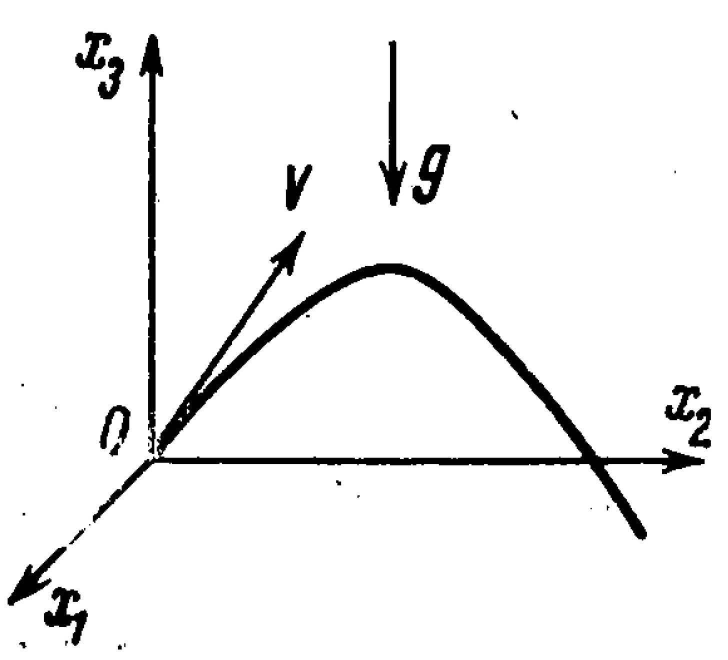
$$U_i = \frac{1}{N} I\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} \int_0^T \frac{H(t-\tau)}{(t-\tau)^4} x_i \times$$

$$\times \exp\left\{-\beta \frac{x_1^2 + [x_2 - V_2(t-\tau)]^2 + [x_3 - V_3(t-\tau) + {}^1/_2\, g(t-\tau)^2]^2}{(t-\tau)^2}\right\} dt \qquad (i = 1, 2)$$

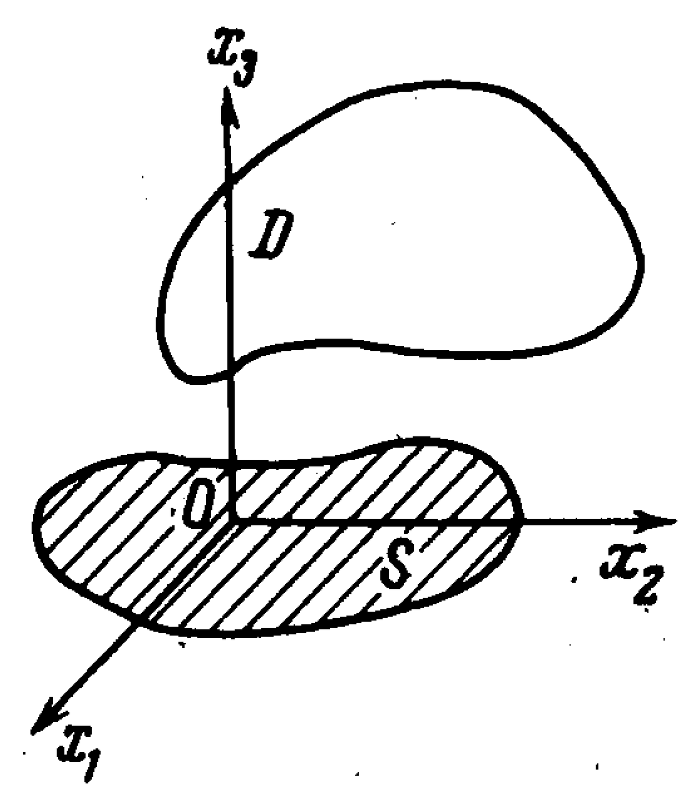
$$U_3 = \frac{1}{N} I\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} \int_0^T \frac{H(t-\tau)}{(t-\tau)^4} [x_3 - {}^1/_2\, g(t-\tau)^2] \times \qquad (11)$$

$$\times \exp\left\{-\beta \frac{x_1^2 + [x_2 - V_2(t-\tau)]^2 + [x_3 - V_3(t-\tau) + {}^1/_2\, g(t-\tau)^2]^2}{(t-\tau)^2}\right\} d\tau$$

Из этих формул, полагая время работы источника $T = \infty$, получим при $V_2 = V_3 = g = 0$ выражения для точечного источника, а при $V_2 = g = 0, V_3 \neq 0$ для свободно-молекулярной струи [4].



Фиг. 1



Фиг. 2

3. *Нестационарное обтекание плоской пластинки разреженным газом.* Пусть в начальный момент времени газ занимает область D в полупространстве $x_3 > 0$ с максвелловской функцией распределения и в плоскости $x_3 = 0$ расположена плоская пластинка (фиг. 2).

Газ, расширяясь, начинает обтекать пластинку. Для решения задачи необходимо задать закон взаимодействия падающих частиц с пластинкой. Будем считать, что падающие частицы рассеиваются диффузно, т. е. на пластинке зададим функцию распределения отраженных частиц в виде [11]

$$f(\mathbf{u}^\circ, x_1, x_2, \tau) = \frac{2}{\pi\beta_0^2} I(x_1, x_2, \tau) \exp[-\beta_0(u_1^{\circ 2} + u_2^{\circ 2} + u_3^{\circ 2})] \qquad (12)$$

Здесь $I(x_1, x_2, \tau)$ — поток частиц, падающий на пластинку.

Движение газа при разлете облака в пустоте определяется формулами

$$N = n_0\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2}\iiint\limits_D \frac{1}{t^3}\exp\left[-\frac{\beta}{t^2}\sum_{i=1}^{3}(x_i - x_i^\circ)^2\right]d\mathbf{r}_0$$

$$N\mathbf{U} = n_0\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2}\iiint\limits_D \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{t^4}\exp\left[-\frac{\beta}{t^2}\sum_{i=1}^{3}(x_i - x_i^\circ)^2\right]d\mathbf{r}_0 \qquad (13)$$

Для потока частиц, падающего на пластинку, получим

$$I(x_1, x_2, \tau) = n_0\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2}\iiint\limits_D \frac{x_3^\circ}{\tau^4}\exp\left[-\beta\frac{(x_1 - x_1^\circ)^2 + (x_2 - x_2^\circ)^2 + x_3^{\circ 2}}{\tau^2}\right]d\mathbf{r}_0 \qquad (14)$$

Таким образом, оказывается, что на пластинке имеется распределенный источник с известной функцией распределения рассеянных частиц. Считая β_0 постоянной, найдем формулы, описывающие течение рассеянных частиц в виде

$$N_* = \frac{2}{\pi\beta_0^2}\int_0^\infty \frac{H(t-\tau)}{(t-\tau)^3}\iint\limits_S I(\xi_1, \xi_2, \tau)\exp\left[-\frac{\beta_0}{(t-\tau)^2}\sum_{i=1}^{3}(x_i - \xi_i)^2\right]d\xi_1 d\xi_2 d\tau$$

$$N_*\mathbf{U}_* = \frac{2}{\pi\beta_0^2}\int_0^\infty \frac{H(t-\tau)}{(t-\tau)^4}\iint\limits_S (\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})\, I(\xi_1, \xi_2, \tau)\, \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{\beta_0}{(t-\tau)^2}\sum_{i=1}^{3}(x_i - \xi_i)^2\right]d\xi_1, d\xi_2, d\tau \qquad \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, 0) \qquad (15)$$

Интегрирование в (15) производится по поверхности пластинки. Среднюю плотность падающего и отраженного газа найдем в виде суммы плотностей $N^* = N + N_*$, а среднюю скорость

$$\mathbf{U}^* = (N\mathbf{U} + N_*\mathbf{U}_*)/N^*.$$

Для того чтобы найти течение за пластинкой, надо проинтегрировать (13), но не по всей области D, а лишь по той части первоначального объема, которая видна из данной точки, расположенной позади пластинки. В случае необходимости можно найти распределение температуры, давление и другие более высокие моменты.

Поступила 22 XI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Гостехиздат, 1954.
2. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. Гостехиздат, 1955.
3. Keller J. B. Spherical, cylindrical and onedimensional gas flows. Quart. Appl. Math., 1956, vol. 14, p. 171.
4. Narasimha R. Gollisionless expansion of gases into vacuum. J. Fluid Mech, 1962, vol. 12, No. 2. p. 294.
5. Molmud P. Expansion of rarefied gas cloud into a vacuum. Phys. Fluids., 1960, vol. 3, p. 362.
6. Keller J. B. On the solution of the Boltzmann equation for rarefied gases. Communs Pure and Appl. Math., 1948, vol. 1, p. 275.
7. Прессман А. Я. Об истечении разреженного газа в вакуум из точечного источника. Докл. АН СССР, 1961, т. 138, № 6, стр. 1305.
8. Mirels H., Mullen J. F. Expansion of Gas Clouds and Hypersonic Jets Bounded by a Vacuum. AIAA Journal, 1963, vol. 1, No. 3, p. 596.
9. Шидловский В. П. Задача о разлете точечной массы газа и ее решение при помощи кинетической теории. ПМТФ, 1963, № 4, стр. 74.
10. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. ч. I. Гостехиздат, 1949.
11. Grad H. On the kinetic theory of rarefied gases. Communs Pure and Appl. Math. 1949, vol. 2, No. 4, p. 331 (русск. перев.: Грэд Г О кинетической теории разреженных газов. Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит.. 1952, № 4,5).