ЛИТЕРАТУРА

1. Кротов В. Ф. Методы решения вариационных задач на основе достаточных условий абсолютного минимума, ч. I, II. Автоматика и телемеханика, 1962, т. 23, № 42; 1963, т. 29, № 5.
2. Космодемьянский В. А. Об одном типе вариационных задач ПММ, 1962, т. 27, вып. 6.
3. Космодемьянский В. А. Необходимые условия вариационного исчисления для одной задачи типа Больца — Майера. ПММ. 1965, т. 29, вып. 2.
4. Космодемьянский В. А. К расчету составных ракет. Инж. ж., 1964, т. 4, № 2.
5. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Мат. сб. 1960, т. 51 (93), № 1.

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ОТСУТСТВИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЙ ДЛЯ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

И. М. Беленький (Москва)

Задача нахождения замкнутых траекторий, а также предельных циклов, механических систем, представляет большие математические трудности, так как при этом приходится изучать не локальные свойства траекторий, а их свойства в целом.

Хотя общих правил отыскания периодических траекторий не существует, однако некоторые необходимые условия существования таких траекторий можно получить, основываясь на теории индексов Пуанкаре [1]. Известные критерии Уиттекера [2] и Бендиксона [3] позволяют указывать области, в которых могут существовать периодические траектории, однако приложение этих критериев представляет трудности.

Ниже изучаются такие условия, при выполнении которых в рассматриваемых областях периодические траектории существовать не могут.

Для автономных систем такие условия, при выполнении которых не могут существовать периодические траектории, так называемые «отрицательные критерии» [4], в частности, были указаны Пуанкаре [1], Бендиксоном [3] и Дюлаком [5]. Различным обобщениям этих критериев для автономных систем посвящены работы [6, 7].

Цель настоящей заметки — показать существование «отрицательного критерия» и для консервативных систем.

1. Пусть изображающая точка M механической системы движется в консервативном силовом поле с потенциалом $V(x, y)$ при заданной величине постоянной энергии h. В этих условиях выпишем дифференциальное уравнение траекторий, которое, как известно, будет иметь вид [8]

$$y'' = (1 + y'^2)\left(-\frac{\partial\Phi}{\partial x} y' + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) \qquad (\Phi = \ln \sqrt{2(h - V(x, y))}) \tag{1.1}$$

Вводя угол $\psi(x, y) = \operatorname{arc\,tg} y'$, образованный вектором скорости $\mathbf{v}$, с положительным направлением оси x, получим дифференциальное соотношение вида

$$d\psi(x, y) = \frac{\partial\Phi}{\partial y}\,dx - \frac{\partial\Phi}{\partial x}\,dy \tag{1.2}$$

Поведение траекторий системы будет существенным образом зависеть от распределения и структуры особых точек O_j функции $\Phi(x, y)$. Введем понятие «квазииндекса» особой точки O_j как предельное значение интеграла

$$J_j = \frac{1}{2\pi} \lim_{r\to 0} \oint\limits_{(\gamma_j)} \frac{\partial\Phi}{\partial y}\,dx - \frac{\partial\Phi}{\partial x}\,dy \tag{1.3}$$

где интегрирование проводится по контуру (γ_j) круга малого радиуса r с центром в точке O_j. Для обыкновенной точки квазииндекс будет равен нулю. В отличие от индексов Пуанкаре, которые могут принимать лишь целочисленные значения, квазииндекс особой точки может принимать любые действительные значения.

Так, например, если рассмотреть силовое поле, образованное притягивающими центрами O_j с потенциалами $V_j = -A \,/\, r_j^n$, то квазииндекс особой точки O_j, как нетрудно убедиться, будет равен $J_j = {}^1/_2 n$.

2. Рассмотрим некоторую область (D), где функция $\Phi(x, y)$ имеет изолированные особые точки O_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$, а в остальных точках области она непрерывна и имеет непрерывные частные производные по x и y до второго порядка включительно.

Пусть система совершает периодическое движение, оставаясь на фазовой плоскости в области (D). Тогда в (D) существует некоторый замкнутый (без самопересечений) контур (C), вдоль по которому интеграл от правой части пфаффовой формы (1.2)

$$\oint\limits_{(C)} \frac{\partial \Phi}{\partial y}\, dx - \frac{\partial \Phi}{\partial x}\, dy = 2\pi \tag{2.1}$$

Пусть внутри контура (C) находятся все, лежащие в (D) особые точки O_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$ функции $\Phi(x, y)$.

Преобразуем криволинейный интеграл, стоящий в левой части (2.1), в интеграл по площади, для чего выделим внутри орбиты (C) области, ограниченные окружностями (γ_j) малого радиуса r с центрами в особых точках O_j. Рассматривая неодносвязную область (σ^*), ограниченную сложным контуром $(\Gamma) = (C) + (\gamma_1) + (\gamma_2) + \ldots + (\gamma_k)$, в силу теоремы Грина, получаем

$$\oint\limits_{(\Gamma)} \frac{\partial \Phi}{\partial y}\, dx - \frac{\partial \Phi}{\partial x}\, dy = -\iint\limits_{(\sigma^*)} \triangle \Phi \, dx\, dy \tag{2.2}$$

где (σ^*) — область, ограниченная контуром (Γ).

Уменьшая теперь радиусы окружностей (γ_k) и переходя в формуле (2.2) к пределу при $r \to 0$, в силу (2.1) и (1.3) получим

$$-\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{(\sigma)} \triangle \Phi \, dx\, dy = 1 - J \qquad (J = J_1 + \ldots + J_k) \tag{2.3}$$

Здесь (σ) — область, ограниченная контуром (C), а J — сумма квазииндексов особых точек O_j, находящихся внутри контура (C).

Теорема. Пусть в рассматриваемой области сумма квазииндексов J удовлетворяет одному из следующих условий

$$(a) \quad -\infty < J < 1, \qquad (б) \quad J = 1, \qquad (c) \quad 1 < J < +\infty \tag{2.4}$$

Если при этом в рассматриваемой области (D) функция $\triangle \Phi$ знакопостоянна или же равна нулю, соответственно указанным случаям (2.4) и имеет место следующее соот ветствие знаков:

$$(a) \quad \triangle \Phi \geqslant 0, \qquad (б) \quad \triangle \Phi > 0 \; (\triangle \Phi < 0), \qquad c) \quad \triangle \Phi \leqslant 0 \tag{2.5}$$

то это является достаточным условием того, что в рассматриваемой области (D) нет замкнутых траекторий. Следовательно, $\Phi(x, y)$ должна принадлежать в случае (a) — классу субгармонических функций, в случае (c)— классу супергармонических функций, а случай $(б)$ можно выразить одним условием $\triangle \Phi \neq 0$.

Достаточность установленных критериев (2.5), в силу (2.3) и (2.4), очевидна.

3. Рассмотрим примеры, указывающие на возможность существования периодических траекторий в областях, где отрицательные критерии (2.5) не выполняются.

(1) В силовом поле с логарифмическим потенциалом $V = A \ln r$ точка M может совершать периодические движения, двигаясь по окружности (C) произвольного радиуса r с центром в начале координат. Здесь

$$\Phi_x = \frac{-Ax}{2r^2(h - A \ln r)}, \qquad \Phi_y = \frac{-Ay}{2r^2(h - A \ln r)}, \qquad (\Phi = \ln \sqrt{2(h - A \ln r)})$$

и, следовательно, квазииндекс особой точки ($r = 0$) будет равен

$$J = \frac{1}{2\pi} \lim_{r\to 0} \oint_{(\gamma)} \frac{A(x\,dy - y\,dx)}{2r^2(h - A\ln r)} = \lim_{r\to 0} \frac{A}{2(h - A\ln r)} = 0$$

т. е. приходим к рассмотрению случая (a). С другой стороны, условие отрицательного критерия $\triangle\Phi \geqslant 0$ здесь не выполняется, так как для рассматриваемого случая

$$\triangle\Phi = \frac{-A^2}{2r^2(h - A\ln r)^2} < 0$$

(2) В качестве другого примера рассмотрим движение точки M в поле притягивающего центра с потенциалом $V = -A / r^n$ (A, $n > 0$).

Непосредственный подсчет дает

$$\triangle\Phi = \frac{Ahn^2r^{n-2}}{2(A + hr^n)^2} \qquad (\Phi = \ln\sqrt{2(h + A / r^n)}) \tag{3.1}$$

и, следовательно, при $h = 0$ имеем $\triangle\Phi = 0$, а при $h \neq 0$ знак $\triangle\Phi$ совпадает со знаком постоянной энергии h, т. е. $\operatorname{sgn}(\triangle\Phi) = \operatorname{sgn}(h)$. Рассмотрим теперь периодическое движение точки M по некоторой окружности (C) радиуса r, центр которой совпадает с началом координат. Из простых физических соображений следует, что на контуре (C) должно выполняться условие $v^2 = An / r^n$, и, следовательно, в силу интеграла энергии, получим

$$\frac{A(n-2)}{2r^n} = h \tag{3.2}$$

т. е. знак h будет зависеть от величины показателя n, характеризующего потенциал силового поля. Написав разложения для Φ_x и Φ_y в окрестности нуля ($r = 0$)

$$\Phi_x = -\frac{nx}{r^2} + \ldots, \qquad \Phi_y = -\frac{ny}{r^2} + \ldots$$

подсчитаем квазииндекс особой точки ($r = 0$)

$$J = \frac{1}{2\pi} \lim_{r\to 0} \oint_{(\gamma)} \frac{n(x\,dy - y\,dx)}{2r^2} = \frac{n}{2} \tag{3.3}$$

Для различных значений показателя n в силу (3.1), (3.2) и (3.3) имеем

1) $n < 2$, $J < 1$, $h < 0$, $\triangle\Phi < 0$

2) $n = 2$, $J = 1$, $h = 0$, $\triangle\Phi = 0$

3) $n > 2$, $J > 1$, $h > 0$, $\triangle\Phi > 0$

Здесь отрицательные критерии в силу (2.5) не выполняются, а периодические траектории существуют. Этим показана существенность отрицательных критериев (2.5).

Автор благодарит В. В. Немыцкого за внимание и интерес к работе.

Поступила 15 XII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. Гостехиздат, М.— Л., 1947.
2. Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика. ОНТИ, М.— Л., 1937, стр. 424.
3. Bendixon J. Sur les courbes définies par des équations différentielles. Acta Math., 1901, vol 24, p.p. 1—88.
4. Minorsky N. Modern Trends in Nonlinear Mechanics. Advances Appl. Mech., 1948, vol. 1 (русск. перев.: Сб. «Проблемы механики». Изд. иностр. лит., 1955).
5. Dulac H. Recherche des cycles limites. Comp. Rend., 1937, vol. 204, No. 23, pp. 1703—1706.
6. Ткачев В. Ф. и Ткачев Вл. Ф. О критериях отсутствия любых и кратных предельных циклов. Матем. сб., новая серия, 1960, т. 52, № 3.
7. Ткачев В. Ф. Обобщение одной теоремы А. Пуанкаре об отсутствии предельных циклов. Успехи матем. наук, 1961, т. 16, № 5.
8. Беленький И. М. Введение в аналитическую механику. Изд. «Высшая школа», 1964, стр. 77—80.