ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ АБСОЛЮТНОГО ЭКСТРЕМУМА В ОДНОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА БОЛЬЦА — МАЙЕРА

В. А. Космодемьянский

(Москва)

Изучается решение одной вариационной задачи типа Больца — Майера на основе достаточных условий абсолютного минимума [1].Своеобразие рассматриваемого класса задач состоит в том, что некоторые функции управления параметрически, известным образом зависят от времени и положения точек разрыва первого рода.

В работах [2, 3] показано, что поставленная задача является объектом вариационного исчисления и при помощи классического понятия вариации выведены необходимые условия экстремума исходного функционала.

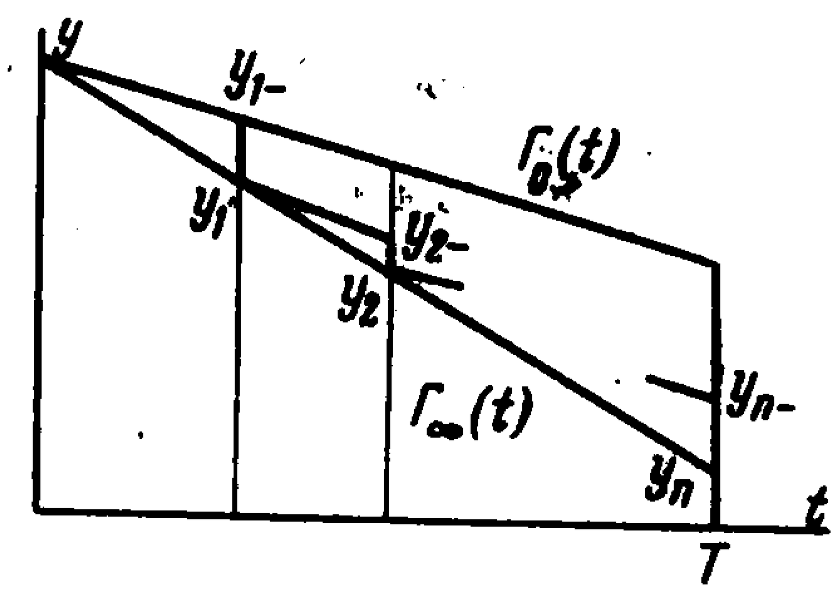
Применение принципа оптимальности позволяет установить существование некоторых нетривиальных кривых, на которых достигается абсолютный экстремум данного функционала. Так, например, абсолютный экстремум функционала, рассматриваемого на классе функций управления, моделью которых является функция изменения относительной массы составной ракеты, может достигаться на модели бесконечно ступенчатой (непрерывной) ракеты. Полученные формулы (5.2) являются обобщением формулы Циолковского (5.4) на случай произвольного движения непрерывной ракеты.

К изучаемой проблеме примыкает известная задача динамики полета о программировании тяги двигателя реактивного аппарата в предположении,что работа двигателя происходит в режиме максимальной тяги с паузами.

Абсолютный экстремум функционала достигается в этом случае на кривых, реализуемых при помощи скользящих режимов.

1. Пусть масса многоступенчатой ракеты убывает по линейному закону [4]. Введем безразмерную массу многоступенчатой ракеты $y = m / m_0$, где m_0 — стартовая масса составной ракеты. Если рассмотреть вспомогательную плоскость y, t, то участки кривой $y = y(t)$, соответствующие рабочему режиму двигателей, изобразятся наклонными прямыми, а участки отделения «сухого веса» — вертикальными отрезками (фиг. 1)

Двигатели последовательных субракет работают без пауз. Обозначим отношение массы сухого веса i-й ступени к массе ее топлива через k_i.



Фиг. 1

Кроме того, обозначим

$$y(t_i - 0) = y_{i-}, \qquad y(t_i + 0) = y_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

где t_i — момент отделения i-й ступени. Аналитически функция y задается $2n$ равенствами вида

$$y_i = y_{i-1} - \beta_i (t_i - t_{i-1}), \quad y_i = y_{i-} (1 + k_i) - k_i y_{i-1} \qquad (1.1)$$

где

$$t_0 = 0, \qquad t_n = T, \qquad y_0 = 1, \qquad y_n = m_p / m_0$$

Здесь T — время работы двигателей, m_p — масса полезного груза, β_i — секундный расход топлива двигателя i-й ступени.

Из равенств (1.1) следует, что безразмерная масса составной ракеты является функцией управления особого типа, поскольку вид функции управления между ее точками разрыва первого рода известен. Точки t_i, «плавая» по отрезку $[t_0, T]$, влияют на величину исходного функционала.

Рассмотрим движение одноступенчатого летательного аппарата в предположении, что время полета летательного аппарата более времени его полета на активном участке.

Для простоты предположим, что в течение работы двигателя допускается лишь одна пауза. Относительная масса меняется по линейному закону, а отношение тяги P к стартовому весу л. а. равно

$$P / m_0 = - V_r y^{\cdot}.$$

Функция управления $y(t)$ и ее производная определяются в данном случае следующими аналитическими равенствами (фиг. 2):

$$y_1 = 1 - \beta_1 (t - t_0), \qquad y_1^{\cdot} = -\beta_1 \qquad (0 \leqslant t \leqslant t_1)$$
$$y_2 = 1 - \beta_1 (t_1 - t_0), \qquad y_2^{\cdot} = 0 \qquad (t_1 < t \leqslant t_2)$$
$$y_3 = y_2 - \beta_2 (t - t_2), \qquad y_3^{\cdot} = -\beta_2 \qquad (t_2 < t \leqslant T) \tag{1.2}$$

Данная функция управления $y(t)$ вместе со своей производной принадлежит к функциям, вид которых между точками разрыва производной известен. Точки разрыва производной находится из условий экстремума произвольного функционала.

2. Пусть процесс, происходящий в некоторой динамической системе, описывается n обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка

$$x_s^{\cdot} - f_s(x, u, y, t) = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

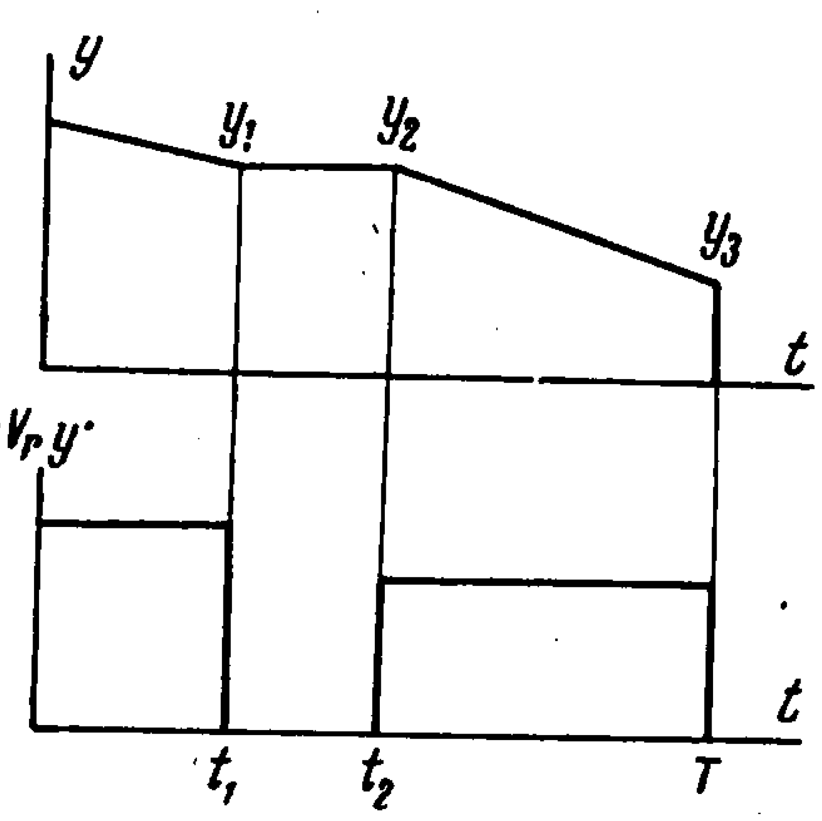
где $x(t), u(t)$ — n-мерная и r-мерная вектор-функции соответственно; их свойства описаны в[1], а $y(t, t_i)$ — l-мерная вектор-функция с компонентами $\{y_1(t,t_i), \ldots, y_l(t,t_i)\}$, непрерывными почти всюду на отрезке $[t_0, T]$, за исключением точек t_i, где эти функции претерпевают разрывы первого рода; при каждом фиксированном $t \in [t_0, T]$ вектор-функция $y(t, t_i)$ принадлежит ограниченному замкнутому множеству Ω.

Условия, наложенные на $x(t)$, $u(t)$, $y(t, t_i)$ задают множество $V(t, t_i)$ допустимых значений совокупностей $n + r + i$ чисел (x_s, u_j, t_i) при каждом $t \in [t_0, T]$, а также область B допустимых значений в $n + 1$-мерном пространстве t, x и множество V допустимых совокупностей $(n + r + i + 1)$ чисел x_s, u_j, t, t_i $(s = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, r)$.

Ставится задача об отыскании минимума функционала

$$J = g(x_0, x_1) + \int_{t_0}^{T} f^0(t, x, u, y)\,dt \tag{2.2}$$

на множестве троек вектор-функций $x(t)$, $u(t)$, $y(t, t_i)$.



Фиг. 2

Совокупность троек вектор-функций, обладающих перечисленными свойствами и удовлетворяющих системе (2.1), принадлежит классу D_i; здесь и в дальнейшем индекс i указывает, что вариационная задача рассматривается на классе функций $y(t, t_i)$, имеющих на отрезке $[t_0, T]$ не более i разрывов первого рода.

Очевидно, отыскание вектор-функции $y(t, t_i)$ сводится к определению положения точек t_i.

3. Основная теорема работы [1] имеет следующий вид.

Теорема 1. Пусть дана последовательность вектор-функций $\{x_s^i, u_s^i, y_s^i\}$. Для того чтобы эта последовательность минимизировала функционал J на множестве D_i, достаточно существование такой функции $\varphi(t, x)$, что

$$R[t, x_s^i, u_s^i, y_s^i] \to \sup R = \mu(t, t_i), \qquad [x, u, y] \in V(t, t_i), \ t \in [t_0, T]$$
$$\Phi[\overset{i}{x}_{0s}, \overset{i}{x}_{1s}] \to \inf \Phi(x_0, x_1), \qquad x_0 \in B(t_0), \qquad x_1 \in B(T)$$
$$R(t_i - 0) - R(t_i + 0) + \int_{t_0}^{T} \partial R / \partial t_i dt = 0 \tag{3.1}$$

Если минималь на множестве D_i существует, то первое и второе условия системы (3.1) имеют вид

$$R[t, x^*, u^*, y] = \mu(t, t_i), \qquad \Phi(x_0, x_1) = \inf \Phi(x_0, x_1), \qquad x_0 \in B(t_0), \qquad x_1 \in B(T) \tag{3.2}$$

Первое и второе условия (3.1) совпадают с условиями основной теоремы (1). Докажем справедливость третьего условия.

Построим функционал

$$I = \Phi(x_0, x_1) - \int_{t_0}^{T} R(t, x, u, y)\,dt \tag{3.2}$$

Этот функционал на множестве D_i совпадает с J в силу свойств функции R. При $y \in \Omega$ функционал I является функцией точек t_i. Представляя выражение (3.2) в виде

$$I = \Phi(x_0, x_1) - \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} R_i(t, x, u, y)\, dt \tag{3.3}$$

и приравнивая нулю производную от I по t_i, получим третье условие.

Предположим, что кривая, минимизирующая функционал, существует. В зависимости от способа выбора функции $\varphi(t, x)$ можно указать различные способы нахождения экстремали. Рассмотрим метод решения поставленной вариационной задачи в формализме Лагранжа.

Пусть область $B(t)$ допустимых фазовых координат открыта и при значениях $t = t_0$, $x(t_0)$ будет заданной точкой фазового пространства. Пусть $Q(t, x)$ зависит от t. Тогда условия (3.1) будут иметь вид

$$R_{x_s}(t, x^*, u^*, y) = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

$$\varphi_x f(t, x^*, u^*, y) - f^0(t, x^*, u^*, y) = \sup, \qquad u \in Q(t)$$

$$H(t_i - 0) - H(t_i + 0) + \int_{t_i}^{T} \partial H / \partial t_i dt = 0 \tag{3.4}$$

Вводя вектор-функцию $\lambda(t) = \varphi_x[t, x^*]$ с составляющими $\lambda_s(t)$ $(s = 1, \ldots, n)$, представим условия (3.4) в виде

$$\lambda_s^{\cdot} + \partial H / \partial x_s = 0, \qquad H(t, x^*, u^*, y) = \sup R(t, x, u, y), \; u \in Q(t) \tag{3.5}$$

Если динамическая система такова, что ее поведение зависит лишь от $y(t, t_i)$, то уравнения (3.4) будут определять положение искомых моментов времени [3,4].

4. Определим число точек разрыва t_i, необходимого для реализации абсолютного экстремума функционала J.

Уточним постановку задачи. Пусть на некотором множестве M функционал (2.2) ограничен снизу

$$\inf J = m > -\infty$$

Пусть функция $R(t, x, u, y)$ при всех $t \in [t_0, T]$ и любом y имеет единственную точку супремума в пространстве $x(t)$, $u(t)$. Кроме того, при любых x, u, y функция R ограничена.

Множество Ω будет замкнутым ограниченным множеством. Если абсолютный экстремум функционала J не реализуется на границе множества Ω, то он реализуется на замыкании этого множества.

Действительно, рассмотрим систему расширяющихся множеств $\{D_i\}$ $(i = 1, \ldots, \infty)$, соответствующих i точкам разрыва первого рода в значениях $y(t, t_i)$. Определим на каждом множестве D_i величину

$$\mu(t, t_i) = \sup R(t, x, u, y), \quad [x, u, y] \in V \tag{4.1}$$

Последовательность $\{\mu_i\}$ не может возрастать, так как размерность пространства D_i увеличивается при переходе от функций управления, имеющих меньшее число точек разрыва, к функциям, имеющим большее число точек разрыва.

В силу предположения, будучи бесконечной, неубывающей и ограниченной, данная последовательность имеет предел

$$\lim_{i\to\infty} \mu(t, t_i) = \mu(t), \qquad \mu(t) = \sup R(t, x, u, y), \qquad [x, u, y] \in V \tag{4.2}$$

Рассмотрим два возможных случая поведения последовательности $y(t, t_i)$ при $i \to \infty$. Пусть компоненты вектор-функции $y(t, t_i)$ образуют при $i \to \infty$ последовательность Коши. В этом случае существует единственная предельная функция

$$y^* = \lim y(t, t_i) \qquad \text{при } i \to \infty$$

Функция y^* удовлетворяет исходной системе уравнений. Абсолютный экстремум функции R достигается на тройке вектор-функций $x^*(t)$, $y^*(t)$, $u^*(t)$.

Пусть при стремлении числа точек t_i к бесконечности значения вектор-функции $y(t, t_i)$ стремятся к двум предельным значениям, равным y_1, y_2 соответственно.

Последовательность супремумов (4.1) функции R, являясь неубывающей и ограниченной последовательностью, стремится к единственному пределу, т. е.

$$\sup R(t, x, u, y_1) = \sup R(t, x, u, y_2) \to \mu(t) \tag{4.3}$$

Кривую x^*, u^*, $y_1 = y_2$ в пространстве t, x назовем кривой нулевой близости скользящего режима. Эта кривая не удовлетворяет исходной системе уравнений [5]. Однако найдутся такие непрерывные функции $\alpha_1(t), \alpha_2(t)$, что данная кривая будет удовлетворять соотношениям

$$x_s^{*\cdot} = \alpha_1 f(x^*, u, y_1, t) + \alpha_2 f(x^*, u, y_2, t)$$

$$1 = \alpha_1 + \alpha_2, \qquad \alpha_1 \geqslant 0, \qquad \alpha_2 \geqslant 0, \qquad \sup R(t, x, u, y), \qquad u \in Q(t, x) \tag{4.4}$$

В зависимости от способа задания $\varphi(t, x)$ можно получить различные методы построения минимизирующей последовательности.

Запишем уравнения, дающие решение поставленной задачи, в формализме Лагранжа, предполагая, что функция R при всех $t \in [t_0, T]$ и любом y имеет единственную точку супремума в пространстве $x(t)$, $u(t)$. Последовательность y_i при $i \to \infty$ имеет своим пределом величины y_k $(k = 1, 2)$. Исходная система уравнений примет вид

$$\lambda_s^{\cdot} + \alpha_1 \partial H / \partial x_s (x, u, y_1, t) + \alpha_2 \partial H (x, u, y_2, t) / \partial x_s = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

$$H(t, \lambda, u, y_k) = \sup, \qquad u \in Q(t) \qquad (k = 1, 2)$$

$$x^{*\cdot} = \alpha_1 f(x, u, y_1, t) + \alpha_2 f(x, u, y_2, t), \qquad 1 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_1 \geqslant 0, \quad \alpha_2 \geqslant 0 \tag{4.5}$$

5. Рассмотрим движение многоступенчатой ракеты. Уравнение движения центра масс такого летательного аппарата может быть представлено в виде (2.1).

Функция управления безразмерной массы $y = m / m_0$ считается известной (см. п. 1), Нетрудно прийти к заключению, что данная функция $y(t, t_i)$ при любых i лежит в замкнутой области, границы которой удовлетворяют уравнениям

$$\Gamma_0 = 1 - \beta t, \qquad \Gamma_\infty(t) = 1 - \beta(k + 1)t \tag{5.1}$$

Верхняя граница этого множества соответствует полету одноступенчатой ракеты, нижняя — полету непрерывной ракеты. Следовательно, экстремум функционала может реализоваться на границах, определяемых уравнениями (5.1).

Уравнения движения непрерывной ракеты имеют в этом случае вид

$$x_s^{\cdot} - f_s(x, u, \Gamma_\infty(t), t) = 0 \tag{5.2}$$

или, если $u(t)$ выбраны по известной программе, т. е. $u = u(t)$ — система дифференциальных уравнений (5.2) примет вид:

$$x_s^{\cdot} - f_s(x, \Gamma_\infty(t), t) = 0$$

Рассмотрим задачу Циолковского о вертикальном полете однородной составной ракеты в однородном поле силы тяжести. Уравнение движения центра масс составной ракеты имеет вид

$$v^{\cdot} = -V_r^{\cdot} y^{\cdot} / y - g \tag{5.3}$$

Здесь v — скорость центра составной ракеты $V_r = \text{const}$ — относительная скорость отбрасываемых частиц.

Предельная скорость V^*, которая реализуется при помощи непрерывной ракеты, равна

$$\frac{V^*}{V_r} = \int\limits_{\Gamma_\infty(t)} \frac{\beta}{v} dt - \frac{gT}{V_r} = \frac{1}{1 + k} \ln \frac{m_0}{m_p} - \frac{gT}{v_r} \tag{5.4}$$

Значение V^*, таким образом, находится без решения уравнения (5.3) в явном виде. Для сравнения укажем прежний метод решения подобной задачи.

Найдя решение уравнения (5.3), будем иметь

$$y_n = \{(1+k)\exp[-(v / nV_r + gT / nV_r)] - k\}^n$$

Переходя в последнем уравнении к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} [(1+k)(1 - I / n) - k]^n = \lim_{n\to\infty} \{[1-(1+k)\, y / n]^{-n / I(1+k)}\}^{-I(1+k)} =$$

$$= \exp[I(1+k)], \qquad I = (v + gT) / V_r$$

Следовательно,

$$V^* = [V_r / 1 + k] \ln m_0 / m_p - gT$$

В заключение рассмотрим вертикальный подъем непрерывной ракеты в однородной среде и однородном поле земного тяготения. Уравнение движения имеет вид

$$v^{\cdot} = -g - c_x \rho S v^2 / 2m_0 [1 - \beta(1+k)t] + \beta V_r / [1 - \beta(1+k)t], \; D = {}^1/_2 c_x \rho S v^2 \qquad (5.5)$$

Здесь D — лобовое сопротивление, c_x — коэффициент лобового сопротивления, S — площадь миделя ракеты, ρ — плотность среды, в которой происходит полет.

Решение уравнения (5.5) может быть представлено в виде

$$v = \frac{1}{2}(a_0 y / a_1)^{1/2} \left\{\frac{c[J_{\nu+1}(\xi) - J_{\nu-1}(\xi)] + Y_{\nu+1}(\xi) - Y_{\nu-1}(\xi)}{cJ_\nu(\xi) + Y_\nu(\xi)}\right\}$$

$$\nu = 2(a_1 a_0)^{1/2}, \qquad \xi = 2(a_1 a_0 y)^{1/2}, \qquad a_0 = g / \beta(1+k), \qquad a_1 = c_x \rho S / 2m_0 \beta(1+k)$$

Полагая, что $\xi_0 = 2\sqrt{a_1 a_0}$, $v_0 = 0$ при $t_0 = 0$ найдем

$$c = [Y_{\nu-1}(\xi_0) - Y_{\nu+1}(\xi_0)] / [J_{\nu+1}(\xi_0) - J_{\nu-1}(\xi_0)]$$

Рассмотрим движение гипотетической ракеты со следующими характеристиками: $k = 0.1$, $y_n = 0.1$, $\beta = 0.005$ *сек*$^{-1}$, $V_r = 3000$ *м/сек*, $m_0 = 165.3$ *т*, $T = 164$ *сек*, $c_x = {}^1/_3$, $S = 5$ *м*^{2}, $\rho = 0.01$ *кг·сек*^{2} / *м*^{4}. В этом случае верхний предел $V^* = 4167$ *м/сек*.

Если используется модель одноступенчатой ракеты, то скорость в конце активного участка равна $V = 3134$ *м/сек*.

Рассмотрим горизонтальный пролет крылатого реактивного одноступенчатого аппарата. Двигатель летательного аппарата может работать с паузами. Тогда экстремум функционала достигается на кривых с бесконечно большим числом точек переключения с одного режима на другой. Выведем при помощи уравнений (4.5) уравнение кривой скольжения. Уравнения движения летательного аппарата имеют вид

$$v^{\cdot} = -[D(v, y) - V_r y_2] / y, \qquad y^{\cdot} = y_2 \qquad (5.6)$$

где y_2 принимает значения $(0, -\beta)$. Функция H имеет вид

$$H = -\lambda_1 [D(v, y) - V_r y_2] + \lambda_2 y_2$$

Условие $H(y_2 = 0) = H(y_2 = -\beta)$ дает

$$\lambda_1 V_r / y + \lambda_2 = 0 \qquad (5.7)$$

Вдоль кривой скольжения справедливы уравнения

$$v^{\cdot} = -[D(v, y) - y^{\cdot} V_r] / y$$

$$\lambda_2^{\cdot} - \lambda_1 [D - yD_y + y^{\cdot} V_r] / y^2 = 0, \quad \lambda_1^{\cdot} - \lambda_1 D_v / y = 0$$

Дифференцируя по времени (5.7) и учитывая уравнения системы (5.6), получим

$$V_r D_v + D - yD_y = 0 \qquad (5.8)$$

Формула (5.8) — известное уравнение, определяющее движение летательного аппарата с режимом плавной тяги. Если допустить, что тяга регулируема, то кривая (5.8) является куском абсолютной минимали [1].

Поступила 9 IV 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Кротов В. Ф. Методы решения вариационных задач на основе достаточных условий абсолютного минимума, ч. I, II. Автоматика и телемеханика, 1962, т. 23, № 42; 1963, т. 29, № 5.
2. Космодемьянский В. А. Об одном типе вариационных задач ПММ, 1962, т. 27, вып. 6.
3. Космодемьянский В. А. Необходимые условия вариационного исчисления для одной задачи типа Больца — Майера. ПММ. 1965, т. 29, вып. 2.
4. Космодемьянский В. А. К расчету составных ракет. Инж. ж., 1964, т. 4, № 2.
5. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Мат. сб. 1960, т. 51 (93), № 1.

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ОТСУТСТВИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЙ ДЛЯ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

И. М. Беленький (Москва)

Задача нахождения замкнутых траекторий, а также предельных циклов, механических систем, представляет большие математические трудности, так как при этом приходится изучать не локальные свойства траекторий, а их свойства в целом.

Хотя общих правил отыскания периодических траекторий не существует, однако некоторые необходимые условия существования таких траекторий можно получить, основываясь на теории индексов Пуанкаре [1]. Известные критерии Уиттекера [2] и Бендиксона [3] позволяют указывать области, в которых могут существовать периодические траектории, однако приложение этих критериев представляет трудности.

Ниже изучаются такие условия, при выполнении которых в рассматриваемых областях периодические траектории существовать не могут.

Для автономных систем такие условия, при выполнении которых не могут существовать периодические траектории, так называемые «отрицательные критерии» [4], в частности, были указаны Пуанкаре [1], Бендиксоном [3] и Дюлаком [5]. Различным обобщениям этих критериев для автономных систем посвящены работы [6, 7].

Цель настоящей заметки — показать существование «отрицательного критерия» и для консервативных систем.

1. Пусть изображающая точка M механической системы движется в консервативном силовом поле с потенциалом $V(x, y)$ при заданной величине постоянной энергии h. В этих условиях выпишем дифференциальное уравнение траекторий, которое, как известно, будет иметь вид [8]

$$y'' = (1 + y'^2)\left(-\frac{\partial\Phi}{\partial x} y' + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) \qquad (\Phi = \ln\sqrt{2(h - V(x, y))}) \tag{1.1}$$

Вводя угол $\psi(x, y) = \operatorname{arc\,tg} y'$, образованный вектором скорости $\mathbf{v}$, с положительным направлением оси x, получим дифференциальное соотношение вида

$$d\psi(x, y) = \frac{\partial\Phi}{\partial y}\, dx - \frac{\partial\Phi}{\partial x}\, dy \tag{1.2}$$

Поведение траекторий системы будет существенным образом зависеть от распределения и структуры особых точек O_j функции $\Phi(x, y)$. Введем понятие «квазииндекса» особой точки O_j как предельное значение интеграла

$$J_j = \frac{1}{2\pi} \lim_{r\to 0} \oint\limits_{(\gamma_j)} \frac{\partial\Phi}{\partial y}\, dx - \frac{\partial\Phi}{\partial x}\, dy \tag{1.3}$$

где интегрирование проводится по контуру (γ_j) круга малого радиуса r с центром в точке O_j. Для обыкновенной точки квазииндекс будет равен нулю. В отличие от ин-