

ВЛИЯНИЕ КАСАТЕЛЬНОГО УСКОРЕНИЯ НА ДВИЖЕНИЕ СПУТНИКА

Ю. Г. Евтушенко (Москва)

Задача о движении спутника под действием касательного ускорения, создаваемого двигателем малой тяги, решалась в работах [1-7]. Интерес к этой задаче связан с тем, что, как показывают численные расчеты [8], тангенциальное управление тягой двигателя хорошо аппроксимирует решение задачи об оптимальном разгоне спутника.

В настоящей работе при помощи метода усреднения [9] дается асимптотический расчет влияния малого касательного ускорения на движение спутника. В § 1 найдено решение первого приближения, справедливое для произвольных значений эксцентриситета орбиты спутника, меньших единицы. В § 2 получено решение задачи во втором приближении для случая околокруговых орбит.

§ 1. Система уравнений плоского движения спутника под действием касательного ускорения f имеет вид

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{2fp^{3/2}}{(1-e^2)^2 \sqrt{\mu}} \sqrt{1+2a \cos u + 2b \sin u + e^2}$$

$$\frac{du}{dt} = \sqrt{\mu} p^{-3/2} (1 + a \cos u + b \sin u)^2 \quad (1.1)$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{2f \sqrt{p} (a + \cos u)}{\sqrt{\mu} \sqrt{1+2a \cos u + 2b \sin u + e^2}}, \quad \frac{db}{dt} = \frac{2f \sqrt{p} (b + \sin u)}{\sqrt{\mu} \sqrt{1+2a \cos u + 2b \sin u + e^2}}$$

Здесь μ — гравитационная постоянная, Z — большая полуось оскулирующего эллипса, u — центральный угол между положением спутника и некоторым фиксированным направлением, $p = Z(1-e^2)$ — фокальный параметр, переменные a и b связаны с эксцентриситетом орбиты e и угловым положением перигея σ формулами

$$e^2 = a^2 + b^2, \quad \operatorname{tg} \sigma = ba^{-1}$$

В качестве малого параметра примем величину $\varepsilon = fr_1^2 \mu^{-1}$, равную отношению ускорения тяги двигателя к ускорению силы тяжести на некоторой характерной высоте движения r_1 . Введем безразмерную большую полуось z и безразмерное время движения

$$\tau = t \sqrt{\mu r_1^{-3/2}}, \quad z = Z r_1^{-1}$$

Тогда (1.1) приводится к стандартному виду систем с быстро вращающейся фазой

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{2\varepsilon z^{3/2}}{\sqrt{1-e^2}} \sqrt{1+2a \cos u + 2b \sin u + e^2}, \quad \frac{du}{d\tau} = \frac{(1+a \cos u + b \sin u)^2}{[z(1-e^2)]^{3/2}}$$

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{2\varepsilon (a + \cos u) \sqrt{z(1-e^2)}}{\sqrt{1+2a \cos u + 2b \sin u + e^2}}, \quad \frac{db}{d\tau} = \frac{2\varepsilon (b + \sin u) \sqrt{z(1-e^2)}}{\sqrt{1+2a \cos u + 2b \sin u + e^2}} \quad (1.2)$$

В дальнейших расчетах будем считать, во-первых, что на всем интервале движения отношение ускорения тяги двигателя к ускорению силы тяжести мало и имеет порядок $O(\varepsilon)$, где $\varepsilon \ll 1$, во-вторых, в любой момент времени невозмущенное движение (при $\varepsilon = 0$) является периодическим. Первое условие накладывает ограничение на величину тяги и фокальный радиус орбиты ($r \sim r_1$), второе условие эквивалентно выполнению строгого неравенства $e < 1$.

Как показано в [8], система (1.2) не имеет никаких особенностей при $0 \leq e < 1$, и для ее решения можно применить метод усреднения. Переменные z , a , b в системе (1.2) являются медленно меняющимися функциями времени, функция u изменяется быстро. Усредняя правые части системы (1.2) за период невозмущенного (кеплерова) движения $T = 2\pi z^{3/2}$, получим систему уравнений первого приближения

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{4\varepsilon a \sqrt{z(1-e^2)}}{\pi e^2} [E(e) - K(e)], \quad \frac{dz}{d\tau} = \frac{4}{\pi} \varepsilon z^{3/2} E(e)$$

$$\frac{db}{d\tau} = \frac{4\varepsilon b \sqrt{z(1-e^2)}}{\pi e^2} [E(e) - K(e)] \quad (1.3)$$

Здесь $K(e)$, $E(e)$ — полные эллиптические интегралы соответственно первого и второго рода с модулем, равным эксцентриситету орбиты [10].

Решение (1.3) аппроксимирует точное решение системы (1.2) с погрешностью $\sim \varepsilon T$ на интервале $\tau \sim \varepsilon^{-1}$. Система (1.3) имеет первые интегралы

$$ab_0 = a_0b, \quad z = z_0 \frac{K(e_0) - E(e_0)}{K(e) - E(e)} \quad (1.4)$$

Здесь и ниже нулевой индекс обозначает начальные значения функции.

При $e \neq 0$ имеет смысл говорить об угловом положении линии апсид, в этом случае из (1.4) следует, что в первом приближении по ε касательное ускорение не изменяет углового положения линии апсид. Легко показать, что $K(e) \geq E(e)$, причем знак равенства имеет место только при $e = 0$. Поэтому, согласно (1.3), (1.4), большая полуось оскулирующего эллипса монотонно возрастает, величина эксцентриситета уменьшается. Определение времени движения и числа оборотов спутника вокруг дится к квадратурам

$$\tau = -\frac{\pi}{4\varepsilon \sqrt{z_0 [K(e_0) - E(e_0)]}} \int_{e_0}^e \frac{e \, de}{(1 - e^2) \sqrt{K - E}} \quad (1.5)$$

$$N = \int_0^\tau \frac{d\tau}{T} = -\frac{1}{8\varepsilon z_0^2 [K(e_0) - E(e_0)]^2} \int_{e_0}^e \frac{e(K - E)}{1 - e^2} de$$

В случае орбит малого или большого эксцентриситета интегралы (1.5) могут быть вычислены при помощи известных разложений полных эллиптических интегралов в ряды по модулю или дополнительному модулю. В частности, для малых эксцентриситетов из (1.4), (1.5) находим

$$z = \frac{z_0 e_0^2}{e^2} \frac{1 + \frac{3}{8}e_0^2 + \frac{15}{64}e_0^4 + \frac{175}{1024}e_0^6 + \frac{2205}{16384}e_0^8}{1 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{15}{64}e^4 + \frac{175}{1024}e^6 + \frac{2205}{16384}e^8}$$

$$\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2\varepsilon \sqrt{z_0 [K(e_0) - E(e_0)]}} [e_0 - e + \frac{13}{48}(e_0^3 - e^3) + \frac{383}{2560}(e_0^5 - e^5)] \quad (1.6)$$

$$N = \frac{\pi [e_0^4 - e^4 + \frac{11}{12}(e_0^6 - e^6) + \frac{103}{128}(e_0^8 - e^8)]}{128\varepsilon z_0^2 [K(e_0) - E(e_0)]^2}$$

Первые члены разложений (1.6) были найдены ранее рядом авторов (см., например, [1]). Аналогичным образом можно рассмотреть движение спутника с переменной, но медленно меняющейся тягой. В этом случае достаточно в (1.5) изменить масштаб времени, решения (1.4) остаются справедливыми.

§ 2. При $e = 0$ усредненная система (1.3) имеет «нулевое» решение, так называемую спиральную траекторию, вдоль которой эксцентриситет остается постоянным, большая полуось монотонно возрастает

$$e = 0, \quad z = z_0 (1 - 4\varepsilon\tau \sqrt{z_0})^{-2} \quad (2.1)$$

Из (2.1) можно сделать следующий вывод: если начальный эксцентриситет равен или близок к нулю, тогда точное решение для эксцентриситета, найденное интегрированием системы (1.2), есть некоторая функция τ , имеющая порядок $\sim O(\varepsilon)$ на интервале $\tau \sim \varepsilon^{-1}$. Для более подробного описания эволюции орбиты следует найти более высокие приближения. Построение системы второго приближения в общем случае оказывается весьма сложным, поэтому ограничимся рассмотрением околорядовых орбит. Введем новую переменную L (2.2)

$$L = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \frac{a \sin u - b \cos u}{e + a \cos u + b \sin u} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{b}{a} - \frac{\sqrt{1 - e^2} (a \sin u - b \cos u)}{1 + a \cos u + b \sin u}$$

Разлагая (2.2) в ряд по a и b , получим

$$u = L + 2a \sin L - 2b \cos L + O(e^2)$$

Таким образом, в случае круговых орбит, когда $a = b = 0$, угол L совпадает с аргументом широты u .

Дифференцируя (2.2), в силу системы (1.2), находим

$$\frac{dL}{d\tau} = z^{-3/2} + \frac{ab - ba}{1 + \sqrt{1 - e^2}} - \frac{2\epsilon(1 - e^2)\sqrt{z}(a \sin u - b \cos u)}{(1 + a \cos u + b \sin u)\sqrt{1 + 2a \cos u + 2b \sin u + e^2}} \quad (2.3)$$

Считая, что начальный эксцентриситет мал: $e_0 \sim O(\epsilon)$, разложим правые части (1.2), (2.3) в ряд по ϵ ; отбрасывая члены третьего порядка малости, получим

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\tau} &= 2\epsilon z^{3/2} [1 + a \cos L + b \sin L], & \frac{da}{d\tau} &= \epsilon \sqrt{z} [2 \cos L - a + a \cos 2L + b \sin 2L] \\ \frac{db}{d\tau} &= \epsilon \sqrt{z} [2 \sin L - b + a \sin 2L - b \cos 2L], & \frac{dL}{d\tau} &= z^{-3/2} - \epsilon \sqrt{z} (a \sin L - b \cos L) \end{aligned} \quad (2.4)$$

В системе (2.4) выполним стандартную замену переменных

$$\begin{aligned} z &= D + \epsilon z_1 + \epsilon^2 z_2 + \dots, & b &= B + \epsilon b_1 + \epsilon^2 b_2 + \dots \\ a &= A + \epsilon a_1 + \epsilon^2 a_2 + \dots, & L &= \varphi + \epsilon L_1 + \epsilon^2 L_2 + \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь $z_1, a_1, b_1, L_1, \dots$ — некоторые функции D, A, B, φ . Алгоритм их определения приведен в [9]. Функции D, A, B, φ в первом приближении удовлетворяют системе

$$\frac{dD}{d\tau} = 2\epsilon D^{3/2}, \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = D^{-3/2}, \quad \frac{dA}{d\tau} = \frac{dB}{d\tau} = 0$$

интегрируя которую, получим

$$A = A_0, \quad B = B_0, \quad D = \frac{z_0}{(1 - 4\epsilon\tau \sqrt{z_0})^2}, \quad \varphi = L_0 + \frac{D^2 - z_0^2}{4\epsilon z_0^2 D^2}$$

На функции z_1, a_1, b_1, L_1 наложим условие отсутствия нулевой гармоники по φ , тогда, используя общие формулы для определения функции z_1, a_1, b_1, L_1 (см. [9]), получим формулы для короткопериодических возмущений элементов орбиты

$$z_1 = L_1 = 0, \quad a_1 = 2D^2 \sin \varphi, \quad b_1 = -2D^2 \cos \varphi \quad (2.6)$$

Для нахождения решения во втором приближении решим усредненную систему

$$\frac{dD}{d\tau} = 2\epsilon D^{3/2}, \quad \frac{dB}{d\tau} = -\epsilon B \sqrt{D}, \quad \frac{dA}{d\tau} = -\epsilon A \sqrt{D}, \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = D^{-3/2} - 2\epsilon^2 D^{5/2} \quad (2.7)$$

с начальными условиями

$$D = z_0, \quad A = a_0 - \epsilon a_{10}, \quad B = b_0 - \epsilon b_{10}, \quad \varphi = L_0 \quad (2.8)$$

Решение системы (2.7) имеет вид

$$\begin{aligned} D &= \frac{z_0}{(1 - 4\epsilon\tau \sqrt{z_0})^2}, & A &= F \left(\frac{z_0}{D} \right)^{1/2}, & B &= G \left(\frac{z_0}{D} \right)^{1/2} \\ \varphi &= \varphi_0 + \frac{D^2 - z_0^2}{4\epsilon z_0^2 D^2} + \frac{\epsilon(z_0^2 - D^2)}{2}, & F &= a_0 - 2\epsilon z_0^2 \sin u_0, & G &= b_0 + 2\epsilon z_0^2 \cos u_0 \end{aligned}$$

Возвращаясь к первоначальным переменным, получим

$$z = z_0 (1 - 4\epsilon\tau \sqrt{z_0})^{-2} \quad (2.9)$$

$$a = F \left(\frac{z_0}{z} \right)^{1/2} + 2\epsilon z^2 \sin \left[u_0 + \frac{z^2 - z_0^2}{4\epsilon z_0^2 z^2} \right] \quad (2.10)$$

$$b = G \left(\frac{z_0}{z} \right)^{1/2} - 2\epsilon z^2 \cos \left[u_0 + \frac{z^2 - z_0^2}{4\epsilon z_0^2 z^2} \right] \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \frac{z^2 - z_0^2}{4\epsilon z^2 z_0^2} + 2a \sin \left(u_0 + \frac{z^2 - z_0^2}{4\epsilon z^2 z_0^2} \right) + \frac{\epsilon(z_0^2 - z^2)}{2} - \\ &\quad - 2b \cos \left(u_0 + \frac{z^2 - z_0^2}{4\epsilon z^2 z_0^2} \right) + 2b_0 \cos u_0 - 2a_0 \sin u_0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Решение (2.9)–(2.12) аппроксимирует точное решение системы (1.2) с погрешностью $\sim \epsilon^2$ на интервале времени $\tau \sim \epsilon^{-1}$, если $e_0 \sim O(\epsilon)$.

Из (2.9) следует, что под действием тангенциального ускорения большая полуось орбиты монотонно возрастает. Выражения для a и b состоят из двух слагаемых; первые — монотонно убывающие по абсолютной величине функции времени, вторые — осциллирующие с частотой орбитального движения спутника. Амплитуда колебаний монотонно возрастает.

Чтобы проследить эволюцию эксцентриситета орбиты, введем величину E — среднее значение квадрата эксцентриситета за период движения спутника вокруг планеты. Согласно (2.10), (2.11), имеем

$$E = z_0 z^{-1} (F^2 + G^2) + 4\varepsilon^2 z^4 \quad (2.13)$$

На фазовой плоскости a, b решения (2.10), (2.11) дают параметрическое представление годографа нормированного вектора Лапласа (т. е. вектора Лапласа, деленного на μ). Его модуль равен эксцентриситету орбиты, а угол с осью a — угловому расстоянию перигея σ . Кривая годографа есть спираль с медленно меняющимся радиусом кривизны. При фиксированном значении z уравнения (2.10), (2.11) описывают окружность радиуса $2\varepsilon z^2$ с центром в точке с координатами $Fz_0^{1/2}z^{-1/2}, Gz_0^{1/2}z^{-1/2}$. С течением времени центр окружности смещается к началу координат, радиус возрастает.

Два витка годографа показаны на фигуре, где $a' = 10^4 a, b' = 10^4 b$. Кривые получены из решения системы (1.2) с начальными условиями $a_0 = 0, b_0 = 0.3 \cdot 10^{-3}, u_0 = 0, z_0 = 1$ и $\varepsilon = 0.9 \cdot 10^{-3}$ при $r_1 = 3$. Меньшая окружность соответствует началу движения, большая — взята из интервала $2038 < \tau < 2050$. На кривых нанесены значения угла u из интервала $(0-2\pi)$. Стрелкой указано направление движения вектора Лапласа.

При достаточно малых значениях z , когда выполняется условие $b = Gz^{-1/2}z_0^{1/2} - 2\varepsilon z^2 \cos u > 0$, годограф лежит в верхней полуплоскости, линия апсид совершает колебательные движения; эксцентриситет колеблется около некоторого среднего значения. С увеличением z амплитуда колебаний линии апсид возрастает, оставаясь меньше π , среднее значение квадрата эксцентриситета монотонно возрастает. В момент касания годографа оси a' эксцентриситет орбиты обращается в нуль, направление вектора Лапласа скачком изменяется на π . Далее линия апсид совершает вращательное движение с частотой движения спутника по орбите. При больших значениях z эксцентриситет монотонно возрастает ($e \sim 2\varepsilon z^2$), фаза вращения линии апсид отстает на 0.5π от фазы центрального угла u ; в этом случае $\operatorname{tg} \sigma \approx -\operatorname{ctg} u$. Движение спутника происходит таким образом, что он находится на линии, перпендикулярной к направлению вектора Лапласа оскулирующего эллипса.

Из (2.9)–(2.11) находим выражение для фокального радиуса спутника

$$r = z - \sqrt{z_0 z} (F \cos u + G \sin u) \quad (2.14)$$

Исследуем те положения спутника, где фокальный радиус принимает наибольшие и наименьшие местные значения, так называемые экстремальные положения. Они соответствуют апогею и перигею оскулирующего эллипса. Из условия $\partial r / \partial u = 0$ находим уравнение для определения значений угла u , отвечающих экстремальным положениям

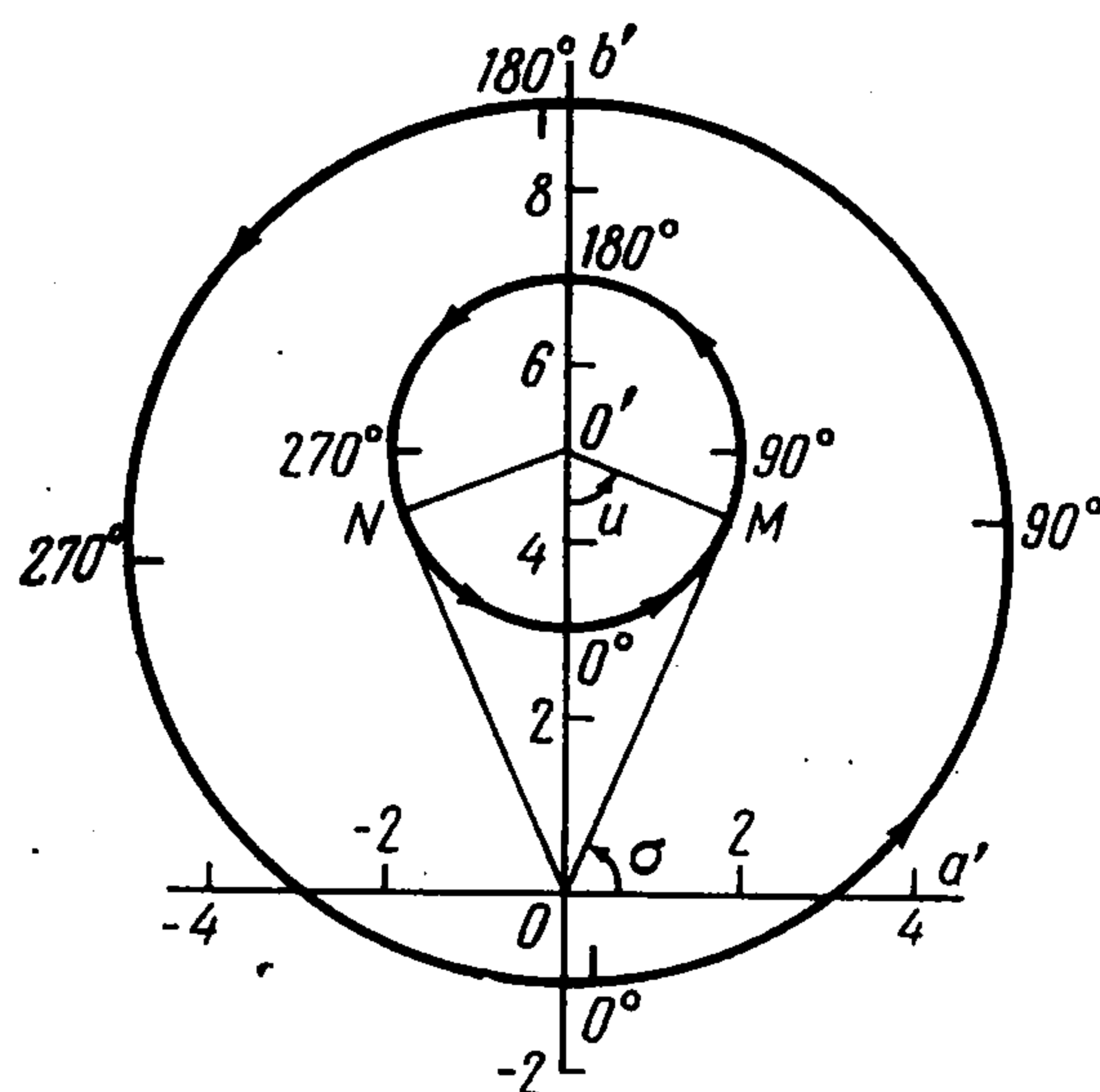
$$2\varepsilon z^3 + \sqrt{z z_0} (F \sin u - G \cos u) = 0 \quad (2.15)$$

Решения (2.15)

$$u = \pm \arccos \frac{2\varepsilon z^{5/2}}{\sqrt{z_0 (F^2 + G^2)}} - \arccos \left(\frac{G}{\sqrt{F^2 + G^2}} \right) \operatorname{sign} F \quad (2.16)$$

существуют, если

$$2\varepsilon z^{5/2} < \sqrt{z_0 (F^2 + G^2)} \quad (2.17)$$



Знак плюс в (2.16) отвечает перигею, знак минус — апогею орбиты. Условие (2.17) эквивалентно геометрическому условию: начало координат должно лежать вне кривой годографа. Имея годограф вектора Лапласа, легко найти экстремальные положения геометрически. Для этого проведем из начала координат касательные к годографу (на фигуре линии OM , ON). Из равенства углов u и σ следует, что угловое расстояние перигея равно углу $OO'M$, апогея — $OO'N$.

С увеличением z амплитуда колебаний радиуса уменьшается. Угол $NO'M$ между апогеем и перигеем уменьшается и при $e = 0$ равен нулю. Если годограф ометает начало координат, тогда радиус монотонно возрастает.

Условие (2.17) можно переписать следующим образом:

$$4Z^2 f \sin(u - \sigma) < \mu e \quad (2.18)$$

Из (2.18) следует, что если отношение ускорения тяги двигателя к местному ускорению силы тяжести меньше $e/4$, то изменение линии апсид носит колебательный характер. При больших значениях возмущающего ускорения линия апсид вращается радиус возрастает монотонно. Величина E в общем случае не является монотонной функцией времени. Дифференцируя (2.13) по u , получим, что E убывает, если

$$4ez^2 < z_0^{1/2} z^{-1/2} \sqrt{F^2 + G^2} \quad (2.19)$$

(геометрически, когда диаметр окружности, описываемой годографом вектора Лапласа, меньше расстояния от центра окружности до начала координат). Среднее значение квадрата эксцентриситета возрастает, если нарушается условие (2.19). В частности, если начальная орбита круговая ($a_0 = b_0 = 0$), тогда элементы E , σ , r монотонно возрастают на протяжении всей траектории.

Найденные приближенные формулы для изменения элементов орбиты с большей точностью аппроксимируют точное решение. Приведем некоторые результаты расчетов. Численным методом была проинтегрирована система (1.2) с начальными условиями, взятыми из рассмотренного выше примера. Получено, что при $\tau = 4255.086$, $z = 3.02994$, $e = 0.0021122$, $u = 2227.687$ по формулам (2.9) — (2.12) будем иметь $z = 3.02993$, $e = 0.0021126$, $u = 2227.687$.

Решение (2.14) для фокального радиуса иным путем получено в [2].

Автор благодарит Н. Н. Моисеева за внимание к работе.

Поступила 30 X 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. King - Hele D. G. The enlargement of elliptic satellite orbits continuous micro-thrust. (XIV Congress international astronaut. fed. No. 69) (русск. перев.: Астронавтика и ракетодинамика. Экспресс-информация, 1963, № 48).
2. Chong - Hung Zee. Low constant tangential thrust spiral trajectories. AIAA, 1963, vol. 1, No. 7.
3. Venny D. J. Escape from a circular orbits using tangential thrust. Jet Propuls., 1958, vol. 28, No. 3, p. 167—169.
4. Perkin's F. M. Flight mechanics of low-thrust space craft. JASS, 1959, vol. 26, No. 5.
5. О х о ц и м с к и й Д. Е. Исследование движения в центральном поле под действием постоянного касательного ускорения. Космические исследования, 1964, т. 2, № 6, стр. 817—842.
6. К у з м а к Г. Е., К о п н и н Ю. М. Новая форма уравнений движения спутника и приложение ее к исследованию движений, близких к кеплеровым. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 4, стр. 730—741.
7. Л а р и ч е в а В. В., Р е й н М. В. Об одном способе построения решений уравнений плоского возмущенного движения небесной механики. Космические исследования, 1965, т. 3, № 5, стр. 359—367.
8. Л е б е д е в В. Н. Вариационная задача о взлете космического аппарата с круглой орбиты. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 6, стр. 1126—1129.
9. В о л о с о в В. М. Некоторые виды расчетов в теории нелинейных колебаний, связанные с усреднением. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 1, стр. 3—54.
10. А х и з е р Н. И. Элементы теории эллиптических функций. ОГИЗ, Гостехиздат, 1948.