КОЛЕБАНИЯ ОСЦИЛЛЯТОРА, ОБЛАДАЮЩЕГО НАСЛЕДСТВЕННОЙ ПОЛЗУЧЕСТЬЮ

М. И. Розовский, Е. С. Синайский

(Днепропетровск)

Рассматриваются колебания осциллятора с упруго-наследственной линейной и слабо нелинейной характеристиками. Изучение осуществляется операционным методом на основе наследственной теории ползучести с использованием в качестве ядра релаксации экспоненты дробного порядка [1].

1. Связь между напряжением σ и деформацией ε в наследственной теории ползучести принимается, по Ю. Н. Работнову [2], в виде

$$\varphi(\varepsilon) = [1 + \varkappa \vartheta_\alpha^* (\beta_1)]\sigma \tag{1.1}$$

$$\vartheta_\alpha^*(\beta) f(t) \equiv \int_0^t \vartheta_\alpha(\beta;\ t-\tau) f(\tau)\, d\tau, \qquad \vartheta_\alpha(\beta;\ t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n t^{n(1+\alpha)+\alpha}}{\Gamma[(n+1)(1+\alpha)]} \quad (-1 < \alpha < 0)$$

Параметры ползучести $\varkappa$ и β_1 и вид функции φ определяются экспериментально. Используя свойства $\vartheta_\alpha^*(\beta)$ — операторов [1] — и ограничиваясь частным видом функции $\varphi(\varepsilon)$ $E_0 = \varepsilon\,[1 - \gamma q(\varepsilon)]$, представим (1.1) в виде

$$\sigma = E_t\, \varepsilon\, [1 - \gamma q(\varepsilon)], \qquad E_t = E_0\, [1 - \varkappa \vartheta_\alpha^*(\beta)], \qquad \beta = \beta_1 - \varkappa \tag{1.2}$$

Здесь E_t — операторный модуль упругости, E_0 — мгновенный модуль упругости, $\varkappa$ и β — параметры релаксации.

Заменяя, согласно принципу Вольтерра, в уравнении свободных колебаний упругого осциллятора мгновенный модуль упругости его операторным аналогом, получим в линейном случае

$$x^{\cdot\cdot} + 2hx^{\cdot} + \omega_0^2\, [1 - \varkappa \vartheta_\alpha^*(\beta)]\, x = 0 \tag{1.3}$$

Здесь x — перемещение, h и ω_0 — постоянные. Уравнение движения (1.3) отвечает случаю, когда $\gamma = 0$ в (1.2).

Использование в уравнении (1.3) в качестве ядра релаксации даже простой экспоненты ($\alpha = 0$) приводит к качественно верному результату [3]. В этом случае характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению третьего порядка, к которому приводится (1.3), имеет вид

$$k^3 + (2h - \beta)\, k^2 + (\omega_0^2 - 2h\beta)\, k - \omega_0^2 (\varkappa + \beta) = 0 \tag{1.4}$$

При $\omega_0^2 \geqslant 2h\beta + {}^1/_3 (2h - \beta)^2$ и ввиду того, что параметры релаксации удовлетворяют [4] неравенствам $\varkappa > 0$, $\varkappa + \beta < 0$, среди корней характеристического уравнения имеются один действительный k_1 и два комплексных. Для них справедливо

$$-{}^2/_3 h + \beta < k_1 < 0, \qquad -{}^1/_2 (2h - \beta) < \operatorname{Re} k_{2,3} < -{}^2/_3 h \tag{1.5}$$

Таким образом, решение уравнения (1.3)

$$x = A_1 e^{k_1 t} + A_2 e^{k_2 t} + A_3 e^{k_3 t} \tag{1.6}$$

описывает затухающий со временем процесс.

Однако использование в качестве ядер наследственности простых экспонент приводит к неудовлетворительным количественным результатам. Удовлетворительные количественные результаты можно получить при более точном описании процесса релаксации путем привлечения слабо сингулярных ядер [5,3,1]. Более целесообразно использовать ядро наследственности Ю. Н. Работнова — экспоненту дробного порядка $\vartheta_\alpha(\beta;\ t)$, некоторые свойства которой приводятся ниже.

2. Изображение по Лапласу функции $\mathfrak{Э}_\alpha(\beta;\, t)$ имеет вид [6]

$$L\,[\mathfrak{Э}_\alpha(\beta;\, t)] = (p^r - \beta)^{-1} \qquad (r = 1 + \alpha) \tag{2.1}$$

Здесь L — оператор преобразования Лапласа.

Определяемый при обработке экспериментальных кривых ползучести или релаксации порядок дробности α с достаточной точностью может быть представлен правильной дробью. Пусть $r = a\,/\,c$, где a и c — целые числа. При этом при помощи выражения (2.1) в ряде случаев можно установить связь функции $\mathfrak{Э}_\alpha(\beta;\, t)$ с табулированными неполной гамма-функцией $\Gamma(m;\; x)$ и интегралом вероятности $\Phi(x)$

$$\Gamma(m;\; x) = \int_0^x s^{m-1}e^{-s}ds, \qquad \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-s^2}ds$$

Так, обращение

$$L\,[\mathfrak{Э}_{-1/2}(\beta;\; t)] = \frac{1}{\sqrt{p} - \beta} = \frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{\beta^2}{\sqrt{p}\,(p - \beta^2)} + \frac{\beta}{p - \beta^2}$$

по известным правилам дает приведенное в работе [1] соотношение

$$\mathfrak{Э}_{-1/2}(\beta;\; t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} + \beta e^{\beta^2 t}\,[1 + \Phi(\beta\sqrt{t})] \tag{2.2}$$

Аналогично имеем

$$\mathfrak{Э}^*_{-1/2}(\beta)\cdot 1 = -\frac{1}{\beta}\,\{1 - e^{\beta^2 t}\,[1 + \Phi(\beta\sqrt{t})]\} \tag{2.3}$$

$$\mathfrak{Э}_{-2/3}(\beta;\; t) = \frac{t^{-2/3}}{\Gamma(1/3)} + \frac{\beta t^{-1/3}}{\Gamma(2/3)} + \beta^2 e^{\beta^3 t}\left[1 + \frac{\Gamma(1/3;\; \beta^3 t)}{\Gamma(1/3)} + \frac{\Gamma(2/3;\; \beta^3 t)}{\Gamma(2/3)}\right] \tag{2.4}$$

$$\mathfrak{Э}_{-2/3}{}^*(\beta)\cdot 1 = -\frac{1}{\beta}\left\{1 - e^{\beta^3 t}\left[1 + \frac{\Gamma(1/3;\; \beta^3 t)}{\Gamma(1/3)} + \frac{\Gamma(2/3;\; \beta^3 t)}{\Gamma(2/3)}\right]\right\} \tag{2.5}$$

$$\mathfrak{Э}_{-1/2}{}^*(\beta)\,e^{\lambda t} = \frac{\beta}{\beta^2 - \lambda}\,e^{\beta^2 t}[1 + \Phi(\beta\sqrt{t})] - \frac{e^{\lambda t}}{\beta^2 - \lambda}\,[\sqrt{\lambda}\Phi(\sqrt{\lambda t}) + \beta] \tag{2.6}$$

Для произвольного $-1 < \alpha < 0$ удобно пользоваться аппроксимациями, справедливыми для любых β (в общем случае — комплексных)

$$\mathfrak{Э}_\alpha(\beta;\; t) \sim -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{-nr-1}}{\beta^{n+1}\Gamma(-nr)} + \operatorname{res}\frac{e^{pt}}{p^r - \beta} \tag{2.7}$$

Здесь и в дальнейшем вычет вычисляется в полюсах, расположенных на той ветви комплексного переменного p, где $-\pi \leqslant \arg p < \pi$ (точка разветвления $p = 0$ исключается). Погрешность оценивается по формуле

$$|\,r_N(t)\,| \leqslant \frac{\Gamma(rN + r + 1)}{\pi g\,|\,\beta\,|^{N+1}}\,t^{-rN-r-1} \tag{2.8}$$

$$g = \begin{cases} |\,\beta\,|\sin\theta & (0 < \theta \leqslant 1/2\pi), \\ |\,\beta\,| & (1/2\pi \leqslant \theta), \end{cases} \qquad \theta = |\,\pi r - |\arg\beta\,|\,|$$

$$\mathfrak{Э}_\alpha{}^*(\beta)\cdot 1 \sim -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{-nr}}{\beta^{n+1}\,\Gamma(1 - nr)} + \operatorname{res}\frac{e^{pt}}{p\,(p^r - \beta)} \tag{2.9}$$

$$|\,r_N(t)\,| \leqslant \frac{\Gamma(rN + r)}{\pi g\,|\,\beta\,|^{N+1}}\,t^{-rN-r} \tag{2.10}$$

Для действительного β формулы (2.7) и (2.9) совпадают с приведенными в работе [7], оценки погрешности получены тем же способом, что и в работе [6]

$$L\,[\mathfrak{Э}_\alpha{}^*(\beta)\,e^{\lambda t}] = \frac{1}{(p^r - \beta)(p - \lambda)} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\beta^{-l-1}\lambda^{-m-1}p^{\frac{al}{c}+m} = \sum_{k=0}^{\infty}b_k p^{\frac{k}{c}}$$

Здесь

$$r=\frac{a}{c}, \qquad b_k=\sum_{m=0}^{M}\beta^{\frac{mc-k}{a}-1}\lambda^{-m-1}\delta(mc+al-k)$$

$$\delta(mc+al-k)=\begin{cases}0 & (mc+al\neq k)\\ 1 & (mc+al=k)\end{cases}$$

По теореме 11 работы [8] (стр. 218) имеем

$$\mathcal{Э}_\alpha^*(\beta)e^{\lambda t}\sim\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k}{\Gamma(-k/c)}t^{-\frac{k}{c}-1}+\sum\operatorname{res}\frac{e^{pt}}{(p-\lambda)(p^r-\beta)} \tag{2.11}$$

Для любого комплексного λ или действительного $\lambda>0$ погрешность оценивается по формуле

$$|r_K(t)|\leqslant\frac{1}{\pi gf}\left[\frac{\Gamma(rL+r+1)}{|\beta|^{L+1}}t^{-rL-r-1}+\frac{\Gamma(M+2)}{|\lambda|^{M+1}}t^{-M-2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\Gamma(rL+M+r+2)}{|\beta|^{L+1}|\lambda|^{M+1}}t^{-rL-M-r-2}\right] \tag{2.12}$$

Здесь

$$f=\begin{cases}|\lambda|\sin\psi & (0<\psi\leqslant{}^1/_2\pi),\\ |\lambda| & ({}^1/_2\pi\leqslant\psi),\end{cases}\qquad \psi=|\pi-|\arg\lambda||,\qquad K=Mc+aL$$

3. Вернемся к уравнению (1.4). Используя преобразование Лапласа, получим при $h=0$

$$L[x]=\frac{px(0)+x^{\cdot}(0)}{p^2+\omega_0^2[1-\varkappa(p^r-\beta)^{-1}]} \tag{3.1}$$

Подстановка $p=z^c\,(r=a/c)$ позволяет рационализировать выражение (3.1) и разложить на элементарные дроби

$$L[x]=\sum_k A_k[p^{1/c}-\beta_k]^{-1} \tag{3.2}$$

Ввиду (2.1), решение уравнения свободных колебаний осциллятора, обладающего наследственной ползучестью, имеет вид

$$x=\sum_k A_k\mathcal{Э}_{1/c-1}(\beta_k;\ t) \tag{3.3}$$

Сингулярность в начальный момент $t=0$ функции $\mathcal{Э}_\alpha(\beta;t)$ не приводит к сингулярности решения (3.3), в чем легко убедиться, используя предельные теоремы операционного исчисления. Аппроксимация (2.7) позволяет решение (3.3) довести до численного результата. Применение формулы (2.7) приводит к тому, что в решении (3.3) появляются слагаемые вида $A\exp\beta_k{}^ct$, соответствующие тем корням $p_k=\beta_k{}^c$ знаменателя выражения (3.1), для которых $|\arg\beta_k|<\pi/c$.

Комплексный корень p_k уравнения

$$p^2+\omega_0^2=\frac{\varkappa\omega_0^2}{p^r-\beta} \tag{3.4}$$

представим в показательной форме $p_k=R_ke^{i\varphi_k}$, $0<|\varphi_k|<\pi$. Ввиду (3.4) имеем

$$R_k^2e^{2i\varphi_k}+\omega_0^2=\varkappa\omega_0^2\,|R_k^r e^{ir\varphi_k}-\beta|^{-2}(R_k^r e^{-ir\varphi_k}-\beta)$$

Сравнивая мнимые части левой и правой сторон тождества, убеждаемся, что $\sin 2\varphi_k$ при $\varkappa>0$ имеет знак, противоположный знаку $\sin r\varphi_k$. Это возможно, если ${}^1/_2\pi<|\varphi_k|<\pi$. Таким образом, действительная часть комплексного корня $p_k=\beta_k{}^c$ отрицательна. Среди действительных корней уравнения (3.4), ввиду $\varkappa+\beta<0$, $\varkappa>0$, могут быть лишь отрицательные корни. Этим обеспечивается асимптотическая устойчивость решения (3.3).

В предположении, что ползучесть слабо меняет частоту колебания, примем в качестве нулевого приближения $p_{k0}=i\omega_0$, что соответствует случаю $\varkappa=0$. Подставляя значение p_{k0} в правую часть уравнения (3.4), найдем первое приближение

$$p_{k1} = i\omega_0 \left(1 - \frac{\varkappa}{(i\omega_0)^r - \beta}\right)^{1/2}$$

Так как $|\beta| > \varkappa$ и $\beta < 0$, то $\arg [(i\omega_0)^r - \beta] < {}^1/_2\,\pi r$ и $\varkappa\,|(i\omega_0)^r - \beta|^{-1} < 1$. Отсюда следует, что $|1 - \varkappa\,[(i\omega_0)^r - \beta]^{-1}| < 1$. Таким образом, частота свободных колебаний с учетом наследственных свойств материала $\omega = \operatorname{Im} p_k < \omega_0$.

В случае вынужденных колебаний имеем

$$x = y + Y, \qquad L[x] = L[y] + \left[p^2 + \omega_0^2 \left(1 - \frac{\varkappa}{p^r - \beta}\right)\right]^{-1} L[f(t)]$$

Здесь y — свободные колебания в форме (3.3), Y — вынужденные колебания, $f(t)$ — вынуждающая сила.

При начальных условиях $x(0) = 0$, $x^{\cdot}(0) \neq 0$, привлекая теорему о свертке и имея в виду (3.2), получим

$$x = \sum_k A_k x^{\cdot}(0)\, \vartheta_{1/c-1}(\beta_k;\ t) + \sum_k A_k \vartheta^{*}_{1/c-1}(\beta_k) f(t) \tag{3.5}$$

Случай $f(t) = A \sin \omega_1 t$ приводит к тому, что вынужденные колебания Y содержат выражения вида

$$\vartheta^{*}_{1/c-1}(\beta_k) \sin \omega_1 t \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{\Gamma(-k/c)}\, t^{-\frac{k}{c}-1} + \frac{e^{i\omega_1 t}}{2i\,[(i\omega_1)^{1/c} - \beta_k]} - $$
$$- \frac{e^{-i\omega_1 t}}{2i\,[(i\omega_1)^{1/c} - \beta_k]} + \frac{c\beta_k^{\,c-1}\omega_1}{\beta_k^{\,2c} + \omega_1^2} \exp \beta_k^{\,c} t \tag{3.6}$$

Вывод аппроксимации (3.6) аналогичен выводу (2.11). Лишь второе и третье слагаемые (3.6) не затухают со временем. Поэтому решение (3.5) через достаточно большой промежуток времени примет вид

$$x = \frac{1}{2i}\left[\omega_0^2 - \omega_1^2 - \frac{\varkappa\omega_0^2}{(i\omega_1)^r - \beta}\right]^{-1} e^{i\omega_1 t} - \frac{1}{2i}\left[\omega_0^2 - \omega_1^2 - \frac{\varkappa\omega_0^2}{(-i\omega_1)^r - \beta}\right]^{-1} e^{-i\omega_1 t} \tag{3.7}$$

Так как среди корней p_k уравнения (3.4) нет чисто мнимых, то $p_k \neq i\omega_1$, а значит, амплитуда гармонического колебания в выражении (3.7) конечна. Если предположить, что в состоянии резонанса ω_1 мало отличается от ω_0, то приближенным условием резонанса можно считать следующее:

$$\omega_1^2 = \omega_0^2\,[1 - \varkappa\,|(i\omega_0)^r - \beta|^{-2} (\omega_0^r \cos {}^1/_2\,\pi r - \beta)] \tag{3.8}$$

Так как имеется лишь одно значение резонансной частоты, то следует ожидать, что среди гармонических слагаемых выражения (3.5) найдется не более двух, соответствующих паре сопряженных корней β_k, которые в момент резонанса значительно превосходят другие по амплитуде. Тогда, ввиду (3.6), при

$$\omega_1^{1/c} = u_k \cos \frac{\pi}{2c} + v_k \sin \frac{\pi}{2c} \tag{3.9}$$

максимум амплитуды таких слагаемых достигает значения

$$\left| u_k \sin \frac{\pi}{2c} - v_k \cos \frac{\pi}{2c} \right|^{-1} \tag{3.10}$$

Здесь u_k и v_k — соответственно действительная и мнимая части корня β_k, для которого выполнено (3.9).

Как показано выше, ${}^1/_2\,\pi / c < |\arg \beta_k| \leqslant \pi / c$. Из (3.10) следует, что при стремлении $|\arg \beta_k|$ к ${}^1/_2\pi/c$ максимум амплитуды неограниченно возрастает.

Предельный случай резонанса наступает лишь при $|\arg \beta_k| = {}^1/_2\,\pi/c$, что соответствует отсутствию ползучести ($\varkappa = 0$).

Уравнение свободных колебаний осциллятора в условиях, отвечающих нелинейной зависимости (1.2), имеет вид

$$x^{\cdot\cdot} + \omega_0^2 [1 - \varkappa Э_\alpha^* (\beta)] [1 - \gamma q (x)] x = 0 \qquad (3.11)$$

Пренебрегая эффектом второго порядка малости и полагая, в частности, $q(x) = x^2$, перепишем (3.11) так:

$$x^{\cdot\cdot} + \omega_0^2 x - \varkappa\omega_0^2 Э_\alpha^* (\beta) x = \gamma\omega_0^2 x^3 \qquad (3.12)$$

Применим метод последовательных приближений. В качестве нулевого приближения возьмем решение (3.3) уравнения (3.12) при $\gamma = 0$. Как отмечалось выше, использование экспоненциального ядра приводит к качественно верному решению в виде линейной комбинации трех экспонент. Естественно предположить, что нулевое приближение x_0 может быть с достаточной точностью аппроксимировано экспонентами.

Подставляя аппроксимированное x_0 в правую часть уравнения (3.12), найдем

$$L[x] = L[x_0] + \sum_l \frac{B_l \gamma\omega_0^2}{(p - \lambda_l)[p^2 + \omega_0^2 - \varkappa\omega_0^2 (p^\gamma - \beta)^{-1}]}$$

В частности, при $x(0) = 0$, $x^{\cdot}(0) \neq 0$ получим первое приближение

$$x_1 = \sum_k A_k x^{\cdot}(0) Э_{1/c-1}(\beta_k;\ t) + \sum_l \sum_k A_k B_l \gamma\omega_0^2 Э_{1/c-1}^* (\beta_k) e^{\lambda_l t} \qquad (3.13)$$

Аппроксимации, приведенные выше, позволяют привести решение к численному результату. Аппроксимируя x_1 экспонентами и подставляя в правую часть (3.12), можно найти второе приближение и т. д.

4. Рассмотрим в качестве иллюстрации следующие примеры. Кривая релаксации [9] для армко-железа при $T = 500°$ С и начальном напряжении $\sigma_0 = 10.78 \cdot 10^7$ *н/м*^{2} с ошибкой не более 7% описывается соотношением (1.2) при $\gamma = 0$, $\alpha = -0.5$, $\beta = -0.0183$ *сек*$^{-0.5}$, $\varkappa = 0.0146$ *сек*$^{-0.5}$.

Задача о колебаниях груза $W = 49 \cdot 10^3$ *н*, расположенного на середине такой упруго-наследственной балки длиной $l = 4$ *м* с моментом инерции $I = 2.45 \cdot 10^{-6}$ *м*^{4} при $E_0 = 1.764 \cdot 10^{11}$ *н/м*^{2}, приводится к уравнению (массой балки пренебрегаем)

$$x^{\cdot\cdot} + 649.7x - 9.473 Э_{-1/2}^* (-0.0183) x = 0 \qquad (4.1)$$

Согласно (3.1)—(3.3), при $x(0) = 0$, $x^{\cdot}(0) \neq 0$ имеем

$$x = x^{\cdot}(0) \sum_{k=0}^{4} A_k Э_{-1/2}(\beta_k;\ t) \qquad (4.2)$$

Здесь

$$A_0 = 2.24 \cdot 10^{-5},\quad A_1 = (1.368 - 1.374i)\, 10^{-3},\quad A_2 = (1.368 + 1.374i)\, 10^{-3}$$

$$A_3 = (-1.379 - 1.374i)\, 10^{-3},\quad A_4 = (-1.379 + 1.374i)\, 10^{-3}$$

$$\beta_0 = -3.749 \cdot 10^{-3},\quad \beta_1 = -3.574 + 3.570i,\quad \beta_2 = -3.574 - 3.570i$$

$$\beta_3 = 3.566 + 3.570i,\quad \beta_4 = 3.566 - 3.570i$$

Используя соотношения (2.2) и (2.7), получим

$$x = 0.03928\, x^{\cdot}(0)\, e^{-0.0285 t} \sin 25.46 t \qquad (4.3)$$

Погрешность за счет аппроксимации не превышает 0.5% амплитуды.

Если использованную кривую релаксации обработать при экспоненциальном ядре (это возможно сделать, лишь пренебрегая сингулярным поведением кривой в начальный момент), то получим параметры $\varkappa = 0.94 \cdot 10^{-6}$ *сек*$^{-1}$, $\beta = -2.6 \cdot 10^{-6}$ *сек*$^{-1}$, $\alpha = 0$. Решение уравнения (4.1) в этом случае имеет вид

$$x = 0.0392 e^{x^{\cdot}(0) - 0.47 \cdot 10^{-6} t} \sin 25.49t \qquad (4.4)$$

Таким образом, экспоненциальное ядро приводит к заниженному примерно в $6 \cdot 10^4$ раз значению декремента затухания.

Выполняя программу последовательных приближений, описанную выше для уравнения (3.12), при начальных условиях $x(0) = 0$, $x^{\cdot}(0) \neq 0$ получим первое приближение

$$x_1 = 0.03928 x^{\cdot}(0)\, e^{-0.0235\, t} \sin 25.46t + 5.67 \cdot 10^{-4} x^{\cdot 3}(0)\, \gamma e^{-0.0855\, t} (0.14 \sin 25.46\, t - \\ - t \cos 25.46t) \qquad (4.5)$$

Требование малости нелинейной добавки при определенном $x^{\cdot}(0)$ накладывает конкретные ограничения на параметр γ.

Отмеченное выше уменьшение частоты свободных колебаний при учете ползучести становится особенно заметным, если значения параметров β и $\varkappa$ достаточно велики. Для материалов типа резины с реологическими параметрами $\alpha = -{}^1/_3$, $\beta = -1.95$ *сек*$^{-2/3}$, $\varkappa = 0.75$ *сек*$^{-2/3}$ получим при $\omega_0 = 10$ *сек*$^{-1}$, $x(0) = 0$, $x^{\cdot}(0) \neq 0$ уравнение свободных колебаний

$$x^{\cdot\cdot} + 100x - 75 Э_{-1/3}^{*}(-1.95)\, x = 0 \qquad (4.6)$$

Его решение уже через 2 *сек* с погрешностью не более 0.25% амплитуды имеет вид

$$x = 0.14\, x^{\cdot}(0)\, e^{-0.44\, t} \sin 9.52\, t \qquad (4.7)$$

Таким образом, уменьшение частоты достигает 4.8%.

Поступила 10 V 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последействием. ПММ, 1948, т. 12, вып. 1.
2. Работнов Ю. Н. Некоторые вопросы теории ползучести. Вестн. Моск. ун-та, 1948, № 10.
3. Ржаницын А. Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. М.— Л., Гостехиздат, 1949.
4. Розовский М. И. О некоторых особенностях упруго-наследственных сред. Изв. АН СССР, ОНТ, Механика и машиностроение, 1961, № 2.
5. Бронский А. П. Явление последействия в твердом теле. ПММ, 1941, т. 5, вып. 1.
6. Синайский Е. С. Об асимптотическом представлении оператора для описания поведения упруго-наследственных сред, воздействующего на степенную функцию. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 1.
7. Аннин Б. Д. Асимптотическое разложение экспоненциальной функции дробного порядка. ПММ, 1961, т. 25, вып. 4.
8. Фукс Б. А., Левин В. И. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. Специальные главы. М.— Л., Гостехиздат, 1951.
9. Одинг И. А., Алешкин Ф. И. Влияние температуры на критерий релаксации напряжений в металлах. Изв. АН СССР, Металлургия и горное дело, 1963, № 5.

РЕГУЛЯРНАЯ ПРЕЦЕССИЯ СВОБОДНОГО ГИРОСТАТА

Н. Н. Колесников (Москва)

В настоящей заметке рассматриваются вопросы, связанные с некоторыми движениями свободного гиростата в центральном ньютоновском поле сил.

Выберем начало O неподвижной декартовой системы координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 в гравитирующем центре. С гиростатом, движущимся в этом центральном поле сил, жестко свяжем подвижную систему координат x_1, x_2, x_3 с единичными ортами $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$, оси которой совпадают с главными центральными осями инерции гиростата. Кроме того, в дальнейшем понадобится орбитальная система координат — трехгранник, образованный радиусом-вектором центра масс системы, трансверсалью и бинормалью к орбите. Единичные орты этой системы: $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3$. И, наконец, всегда при рассмотрении движения механической системы относительно центра масс будет использоваться кенигова система осей ξ_1', ξ_2', ξ_3'.