К СУЩЕСТВОВАНИЮ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСИИ КРУГЛОЙ МЕМБРАНЫ

Л. С. Срубщик (Ростов-на-Дону)

Доказывается существование решения задачи о равновесии круглой симметрично загруженной мембраны, контур которой свободен от напряжений. Для доказательства применяется метод Чаплыгина. Одновременно строится численный способ решения.

Рассмотрим задачу о равновесии круглой симметрично загруженной мембраны, контур которой свободен от напряжений [1]

$$Lv \equiv -\frac{d}{d\rho}\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\rho v = \frac{\varphi^2}{2\rho v^2}, \qquad \varphi(\rho) = \int_0^\rho q(t)\,t\,dt \tag{1}$$

$$\frac{v}{\rho}\Big|_{\rho=0} < \infty, \qquad v\,|_{\rho=1} = 0 \tag{2}$$

Здесь функция v соответствует радиальному усилию, а $q(\rho)$ — интенсивность нормальной нагрузки. Для случая, когда $\varphi(\rho)$ удовлетворяет условию $\varphi(1) = 0$, теорема существования без доказательства была сформулирована в [2], а в случае равномерно распределенной по поверхности нагрузки $\varphi(\rho) = q\rho^2$ ($q = \mathrm{const}$) существование доказано в [3]. Метод Чаплыгина [4, 5] позволяет одновременно с доказательством существования решения дать эффективный способ его построения (см. ниже формулы (5) — (8)). Заметим, что в отличие от применявшегося ранее метода степенных рядов [1], при этом не требуется аналитичность функции $\varphi(\rho)$, что позволяет рассчитывать мембраны под действием разрывных нагрузок.

Теорема. Пусть функция $\varphi(\rho)$ — кусочно-непрерывна. Тогда задача (1), (2) имеет непрерывное решение, при этом для производных v' и v'' справедливы оценки:

$$|v'(\rho)| \leqslant m_1(1-\rho)^{-1/3}, \qquad |v''(\rho)| \leqslant m_2(1-\rho)^{-4/3} \tag{3}$$

(здесь и всюду в дальнейшем m_i — некоторые постоянные, не зависящие от ρ).

Доказательство. Задача (1), (2) эквивалентна интегральному уравнению

$$v = L^{-1}\left(\frac{\varphi^2}{2\rho v^2}\right) \qquad \left(L^{-1}f = \rho\int_\rho^1 t^{-3}\,dt \int_0^t f(\tau)\,\tau^2\,d\tau\right) \tag{4}$$

Покажем, что решение задачи будет пределом последовательности функций $\{v_n\}$, определяемой соотношениями

$$v_{n+1} = v_n - \delta_n \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

$$v_1 = \frac{1}{2C^2}L^{-1}\left(\frac{\varphi^2}{\rho^2(1-\rho)^{4/3}}\right), \qquad C = \max_{0\leqslant\rho\leqslant1}\left[\frac{15}{4}\frac{\varphi^2}{\rho^4}\right]^{1/3} \tag{6}$$

$$L\delta_n + \frac{M}{(1-\rho)^2}\delta_n - \alpha_n = 0, \qquad \frac{\delta_n}{\rho}\Big|_{\rho=0} < \infty, \qquad \delta_n(1) = 0 \tag{7}$$

$$\alpha_n = L\delta_n - \frac{\varphi^2}{2\rho v_n^2}, \qquad M = \max_{0\leqslant\rho\leqslant1}\left|\frac{\varphi^2(\rho)(1-\rho)^2}{\rho v_1^3}\right| \tag{8}$$

Величина M конечна, так как по условию $|\varphi(\rho)| \leqslant m_3\rho^2$, а из (4), (6) следует, что

$$C\rho(1-\rho)^{1/3} \geqslant v_1 \geqslant m_4\rho(1-\rho)^{2/3} \qquad (m_4 > 0) \tag{9}$$

если $\varphi(\rho) \not\equiv 0$ при $0 \leqslant \rho \leqslant 1$.

Действительно, пусть найдется такой промежуток $[a, b] \subset [0, 1]$, в котором $\min \varphi^2/\rho^4 = m_1 > 0$, и пусть для определенности $b = 1$. Тогда из (4), (6) имеем

$$v_1 \geqslant \frac{1}{2C^2}\rho\int_\rho^1 dt\int_a^t \frac{\varphi^2}{\tau^4(1-\tau)^{4/3}}d\tau \geqslant m_5\rho J(\rho), \qquad J(\rho) = \int_\rho^1 f(t)\,dt$$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leqslant t \leqslant a) \\ [(1-t)^{-1/3} - (1-a)^{-1/3}] & (a \leqslant t \leqslant 1)\end{cases} \tag{10}$$

Отсюда легко получаем

$$v_1(\rho) \geqslant J(\rho) = \begin{cases} m_5\rho(1-a)^{2/3} & (\rho \leqslant a) \\ m_5\rho(1-\rho)^{2/3}\left[\dfrac{3}{2} - \left(\dfrac{1-\rho}{1-a}\right)^{1/3}\right] \geqslant \dfrac{m_5}{4}\rho(1-\rho)^{2/3} & (\rho \geqslant a) \end{cases}$$

Из (8), (9) устанавливаем, что

$$\alpha_1 = Lv_1 - \frac{\varphi^2}{2\rho v_1^2} = \frac{\varphi^2[v_1^2 - C^2\rho^2(1-\rho)^{4/3}]}{2C^2\rho^3(1-\rho)^{4/3}v_1^2} \leqslant 0 \tag{11}$$

Теперь докажем, что $\delta_1(\rho) \leqslant 0$. Для этого (7) при $n = 1$ умножим на δ_1 и проинтегрируем по ρ от 0 до 1. В результате получим

$$\int_0^1 \left|\frac{d\delta_1}{d\rho}\right|^2 d\rho + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\delta_1^2}{\rho^2}d\rho + M\int_0^1 \frac{\delta_1^2}{(1-\rho)^2}d\rho = \int_0^1 \alpha_1\delta_1\, d\rho \tag{12}$$

Оценивая левую часть (12) при помощи неравенства

$$\delta^2(1) = \left(\int_0^1 \frac{d\delta}{d\rho}d\rho\right)^2 \leqslant \int_0^1 \left|\frac{d\delta}{d\rho}\right|^2 d\rho \tag{13}$$

примененного к δ_1, выводим

$$\int_0^1 \alpha_1\delta_1 d\rho \geqslant 0 \tag{14}$$

Если теперь допустить, что $\delta_1(\rho)$ принимает положительные значения, то можно указать такой отрезок $[\xi_1, \xi_2] \subset [0, 1]$, что $\delta_1(\rho) \geqslant 0$ для $\rho \in [\xi_1, \xi_2]$ и $\delta_1(\xi_1) = -\delta_1(\xi_2) = 0$. Но это приводит к противоречию, так как аналогично (14) получаем

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \alpha_1\delta_1\, d\rho \geqslant 0$$

Далее введем пространства функций:

1) состоящее из функций, удовлетворяющих условиям (.) и имеющих конечную норму

$$(L_{2,\rho}) \qquad \|\delta\|_{L_{2,\rho}}^2 = \int_0^1 \left(\frac{\delta}{1-\rho}\right)^2 d\rho \tag{15}$$

2) состоящее из функций с конечной нормой

$$(L_2^*) \qquad \|\alpha\|_{L_2^*}^2 = \int_0^1 (1-\rho)^2\alpha^2\, d\rho \tag{16}$$

3) полученное замыканием множества гладких функций, заданных на $[0, 1]$, по норме

$$\|f\|_{H_1}^2 = \int_0^1 \left|\frac{df}{d\rho}\right|^2 d\rho \tag{17}$$

Используя неравенство $\|\delta\|_{L_{2,\rho}} \leqslant 2\|\delta\|_{H_1}$, из (7) выводим

$$\|\delta_1\|_{L_{2,\rho}} \leqslant \frac{1}{M+{}^1/_4}\|\alpha_1\|_{L_2^*} \tag{18}$$

Покажем, что $\alpha_2 \leqslant 0$. Имеем

$$\alpha_2 = Lv_2 - \frac{\varphi^2}{2\rho v_2^2} = \frac{\varphi^2}{2\rho v_1^2} - \frac{\varphi^2}{2\rho(v_1-\delta_1)^2} + \frac{M}{(1-\rho)^2}\delta_1 \tag{19}$$

Применяя формулу Лагранжа, перепишем (19) в виде

$$\alpha_2 = \left[\frac{M}{(1-\rho)^2} - \frac{\varphi^2}{\rho(v_1-\tau\delta_1)^3}\right]\delta_1 \qquad (0 \leqslant \tau \leqslant 1) \tag{20}$$

Неположительность α_2 вытекает из (20) в силу определения (8) величины M и неравенств $v_1 \geqslant 0$ и $\delta_1 \leqslant 0$. Из (20) вытекает, кроме того, оценка $\|\alpha_2\|_{L_2^*} \leqslant M\|\delta_1\|_{L_{2,\rho}}$.

Из (7) при $n = 2$ получаем

$$\| \delta_2 \|_{L_2, \rho} \leqslant \frac{1}{M + {}^1/_4} \| \alpha_1 \|_{L_2^*} \tag{21}$$

Аналогично выводятся оценки

$$\| \delta_k \|_{L_2, \rho} \leqslant \frac{1}{M + {}^1/_4} \| \alpha_k \|_{L_2^*}, \qquad \| \alpha_k \|_{L_2^*} \leqslant M \| \delta_{k-1} \|_{L_2, \rho} \tag{22}$$

Отсюда для любого $k \geqslant 1$ получаем

$$\| \alpha_k \|_{L_2^*} \leqslant q^{k-1} \| \alpha_1 \|_{L_2^*}, \quad \| \delta_k \|_{L_2, \rho} \leqslant \frac{q^{k-1}}{M + {}^1/_4} \| \alpha_1 \|_{L_2^*}, \quad q = \frac{M}{M + {}^1/_4} \tag{23}$$

Докажем, что ряд $v_1 - (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots)$, а значит, и последовательность v_k равномерно на $[0, 1]$ сходится к некоторой функции v. От (7) перейдем к уравнению

$$\delta_k = L^{-1}\alpha_k - ML^{-1}\left(\frac{\delta_k}{(1-\rho)^2}\right) \tag{24}$$

Оценим $L^{-1}\alpha_k$. Применяя неравенство Буняковского, имеем

$$| L^{-1}\alpha_k | \leqslant \frac{1}{2} \rho \| \alpha_k \|_{L_2^*} \int_{\rho}^{1} t^{-3}\, dt \left[\int_0^t \frac{\tau^4}{(1-\tau)^2}\, d\tau \right]^{1/2} \tag{25}$$

Применив к внутреннему интегралу оценку $\tau < t$ и вычислив получившийся в результате интеграл, из (27) получаем:

$$| L^{-1}\alpha_k | \leqslant \frac{1}{2} \rho \| \alpha_k \|_{L_2^*} \int_{\rho}^{1} t^{-1/2} (1-t)^{-1/2}\, dt \leqslant m_6 \| \alpha_k \|_{L_2^*} \tag{26}$$

Аналогично выводим

$$\left| L^{-1}\left(\frac{\delta_k}{(1-\rho)^2}\right) \right| \leqslant m_7 \| \delta_k \|_{L_2, \rho} \tag{27}$$

Теперь, используя (24), из (26), (27) получаем оценку

$$\max_{0 \leqslant \rho \leqslant 1} | \delta_k \| \leqslant m_8 (\| \alpha_k \|_{L_2^*} + \| \delta_k \|_{L_2, \rho}) \leqslant m_9 q^{k-1} \| \alpha_1 \|_{L_2, \rho} \tag{28}$$

Отсюда и вытекает сходимость последовательности v_k к v_0. Остается установить, что v будет решением (4). Из (8) вытекает следующее соотношение:

$$v_k = L^{-1}\left(\frac{\varphi^2}{2\rho v_k^2}\right) + L^{-1}\alpha_k \tag{29}$$

Последний член в (29) стремится к нулю при $k \to \infty$ в силу (26). Далее заметим:

$$m_{10}\rho (1-\rho)^{2/3} \geqslant v \geqslant v_k \geqslant v_1 \geqslant m_3 \rho (1-\rho)^{2/3} \tag{30}$$

Правая часть этого неравенства уже доказана, а левая часть следует из того что

$$w \geqslant v \quad \text{при} \quad Lw - \frac{\varphi^2}{2\rho w^2} \geqslant 0$$

При этом w можно взять в виде

$$w = [{}^9/_2 \max \varphi^2(\rho)]^{1/3} \rho (1-\rho)^{2/3} \qquad (0 \leqslant \rho \leqslant 1)$$

Применяя (30), легко видеть, что

$$\left| \frac{\varphi^2\rho}{v_k^2} - \frac{\varphi^2\rho}{v^2} \right| \leqslant \frac{m_{11}\rho^2}{(1-\rho)^2} \sum_{s=k}^{\infty} \delta_s \tag{31}$$

Тогда при помощи (31), аналогично (26), выводим

$$\left| L^{-1}\left(\frac{\varphi^2}{2\rho v_k^2} - \frac{\varphi^2}{2\rho v^2}\right) \right| \leqslant m_{12} \left\| \sum_{s=k}^{\infty} \delta_s \right\|_{L_2, \rho} \leqslant m q^{k-1} \| \alpha_1 \|_{L_2^*} \tag{32}$$

т. е. уравнение (4) получается предельным переходом при $k \to \infty$ из (29).

Оценки (3) для v' и v'' находим из (4) при помощи (30). Теорема доказана.

Пусть $\varphi(1) \neq 0$. Тогда, для функции $u = dw / d\rho$, где w — прогиб, имеем

$$u = -\frac{\varphi(\rho)}{v} = O\left((1-\rho)^{-2/3}\right)$$

Механически это означает, что в данном случае равновесие мембраны невозможно. Поэтому естественно было рассмотреть случай [2], когда равнодействующая системы сил, действующих на мембрану, равна 0, т. е. $\varphi(1) = 0$.

При этом условии решение оказывается более гладким и имеет две непрерывные производные. Соответствующая теорема была сформулирована в [2]. Ее доказательство почти дословно совпадает с предыдущим. Разница заключается во введенных формулами (15), (16) нормах, где вес $(1-\rho)^2$ и $(1-\rho)^{-2}$ надо взять соответственно в виде $1-\rho)$ и $(1-\rho)^{-1}$.

Поступила 7 XII 1965

ЛИТЕРАТУРА

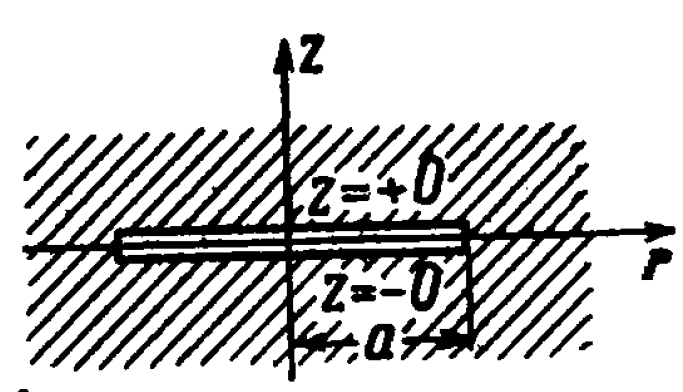
1. Вольмир А. С. Гибкие пластины и оболочки. Гостехиздат, 1956.
2. Срубщик Л. С. и Юдович В. И. Асимптотика уравнений большого прогиба круглой симметрично загруженной пластины. Сибирск. матем. ж., 1963, т. 4, № 3.
3. Морозов Н. Ф., Срубщик Л. С. Применение метода С. А. Чаплыгина к исследованию уравнения мембраны. Дифференциальные уравнения, 1966, № 3.
4. Бабкин Б. Н. Решение одной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка методом Чаплыгина. ПММ, 1954, т. 18, вып. 2
5. Срубщик Л. С., Юдович В. И. Асимптотическое интегрирование системы уравнений большого прогиба симметрично загруженных оболочек вращения. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.

УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ НЕОГРАНИЧЕННОГО ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ТЕЛА, ОСЛАБЛЕННОГО ВНУТРЕННИМ ПЛОСКИМ КРУГОВЫМ РАЗРЕЗОМ

Р. Я. Сунчелеев (Ташкент)

Изучается симметричная относительно плоскости $z = 0$ деформация неограниченного трансверсально-изотропного тела, ослабленного внутренней плоской круговой щелью. Для изотропной среды та же задача исследована другим методом в [1].

1. Допустим, что в неограниченном трансверсально-изотропном пространстве помещена бесконечно тонкая плоская круглая щель $z = 0$, $r \leqslant a$ с центрами в начале координат (см. фигуру). Предположим, что к поверхности щели приложена внешняя нагрузка. При таких предположениях краевые условия задачи имеют вид



$$\sigma_z|_{z=+0} = \sigma_z|_{z=-0} = \sigma(r, \varphi) \qquad (r < a) \qquad (1.1)$$

$$(\tau_{rz} + \tau_{\varphi z})_{z=+0} = -(\tau_{rz} + i\tau_{\varphi z})_{z=-0} = \tau_1(r, \varphi)(r < a)$$

$$(\tau_{rz} - i\tau_{\varphi z})_{z=+0} = -(\tau_{rz} - i\tau_{\varphi z})_{z=-0} = \tau_2(r, \varphi) \qquad (r < a)$$

Соображения симметрии в сечении $z = 0$ приводят к дополнительным условиям:

$$U_3|_{z=0} = 0 \quad (r > a), \quad (\tau_{rz} \pm i\tau_{\varphi z})_{z=0} = 0 \qquad (r > a) \qquad (1.2)$$

Целесообразность введения комплексных компонент напряжений будет выяснена в дальнейшем; она связана с предлагаемым методом решения задачи.

Представим, что плоскостью $z = 0$ все пространство разделено на два полупространства, тогда сформулированную задачу можно свести к двум краевым задачам.