5. В качестве $K(x, t)$ возьмем отрезок ряда многочленов Якоби функции $k(x, t)$

$$k(x, t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} N_k(t) P_k^{(-\alpha, -\beta)}(x), \qquad N_k(t) = \frac{1}{h_k^{(-\alpha, -\beta)}} \int_{-1}^{1} k(x, t) \frac{P^{(-\alpha, -\beta)}(x)}{w(x)} dx$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Из (3.13) получим

$$c_{ik} = \frac{(-1)^{\lambda+\varkappa} 2^{\varkappa}}{h_i^{(-\alpha, -\beta)}} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} k(x, t) \frac{P_i^{(-\alpha, -\beta)}(x)}{w(x)} P_{k+\varkappa}^{(\alpha, \beta)}(t) w(t)\, dx\, dt \tag{5.1}$$

$$b_i = \frac{1}{h_i^{(-\alpha, -\beta)}} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} k(x, t) \frac{P_i^{(-\alpha, -\beta)}(x)}{w(x)} Rf(t) w(t)\, dx\, dt \quad (i, k = -\varkappa, -\varkappa+1, \ldots, n)$$

Если a — вещественное число, b — чисто мнимое, то в (1.3) имеем $\rho = 1$, следовательно, α, β вещественны и $w(x)$ неотрицательна. В этом случае все корни многочленов $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, $P_n^{(-\alpha,-\beta)}(x)$ вещественные, простые и лежат на интервале $(-1, +1)$, и при вычислении интегралов (5.1) можно воспользоваться формулой Гаусса—Якоби [6].

Автор благодарит Г. Н. Пыхтеева за обсуждение настоящей работы.

Поступила 3 V 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер Н. И. О некоторых формулах обращения сингулярных интегралов. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1945, т. 9, № 4.
2. Иванов В. В. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений в случае разомкнутых контуров интегрирования. Докл. АН СССР, 1956, т. 111, № 5.
3. Каландия А. И. О приближенном решении одного класса сингулярных интегральных уравнений. Докл. АН СССР, 1959, т. 125, № 4.
4. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз, 1962.
5. Erdélyi A. ed. Higher. Transcendental functions, vol. 2, McGraw-Hill, 1953.
6. Сегё Г. Ортогональные многочлены. Физметгиз, 1962.

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОГО ПРЯМОУГОЛЬНИКА

П. О. Галфаян, К. С. Чобанян

(Ереван)

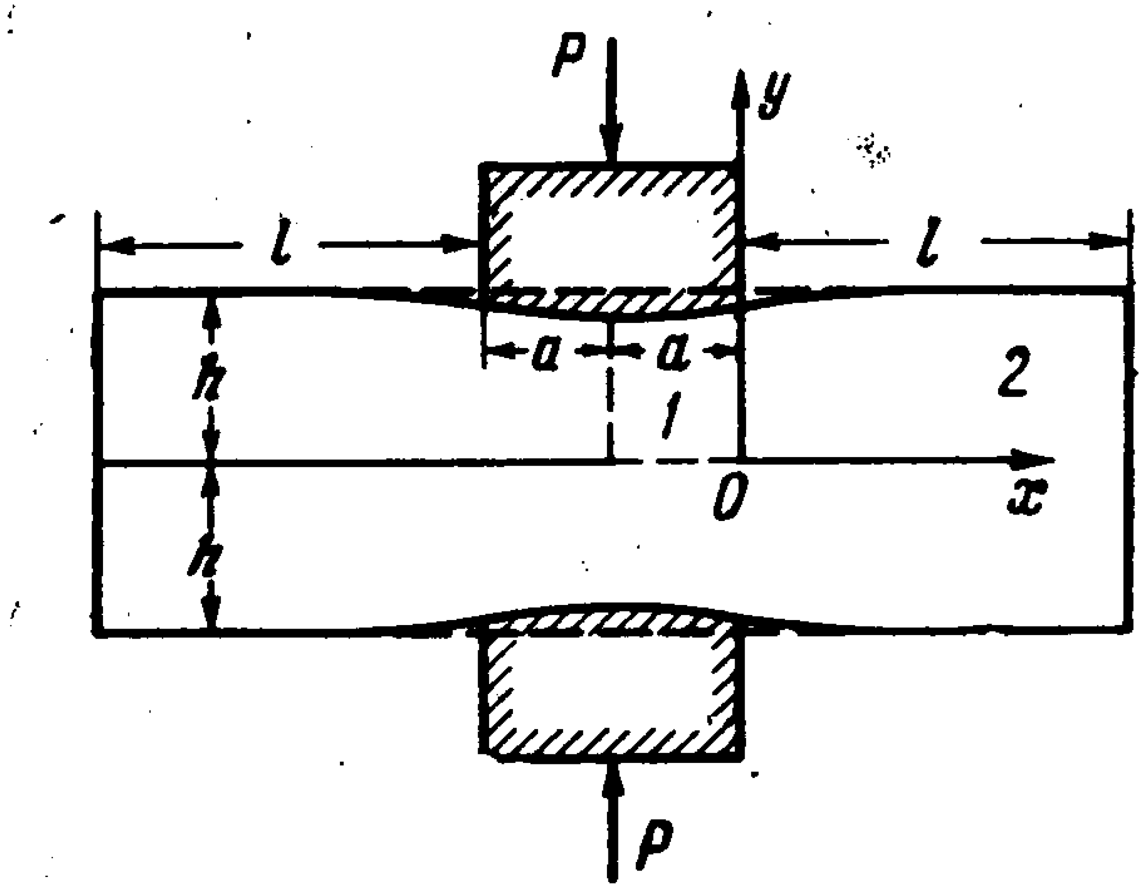
Плоская контактная задача теории упругости для полуплоскости, полосы и четверти плоскости была рассмотрена в работах [1-9] и др.

В настоящей работе решение одной контактной задачи для упругого прямоугольника сводится к квазивполне регулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений с ограниченными свободными членами.

Теория бесконечных систем линейных алгебраических уравнений успешно применялась к решению задач теории упругости в работах Б. М. Кояловича [10], Л. В. Канторовича [11], Н. Х. Арутюняна [12] и др.

1. Рассмотрим плоскую задачу теории упругости для прямоугольника (фиг. 1) при симметричных граничных условиях, когда на части продольных сторон прямоугольника $(-2a - l \leqslant x \leqslant -2a,\ 0 \leqslant x \leqslant l)$ задана внешняя нагрузка, а на остальной части тех же сторон (т. е. под штампом) заданы нормальные перемещения и касательные напряжения. На сторонах же $x = -2a - l$ и $x = l$ заданы касательные напряжения и нормальные перемещения. В частном случае, когда эти напряжения и деформации на поперечных сторонах и касательные напряжения на продольных сторонах прямоугольника, равны нулю, имеем периодическую контактную задачу для полосы.

Решение рассматриваемой задачи ищем при помощи функции напряжений Эри, которая в случае отсутствия массовых сил удовлетворяет бигармоническому уравнению внутри прямоугольника $-(2a + l) \leqslant x \leqslant l,\ -h \leqslant y \leqslant h$.



Напряжения и перемещения через функцию напряжений Φ выражаются так:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \tag{1.1}$$

$$u = \frac{1}{E}\left\{\int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\,dx - \nu \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right\} - a^* y + b^*$$

$$v = \frac{1}{E}\left\{\int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\,dy - \nu \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right\} + a^* x + c^* \tag{1.2}$$

Здесь E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, a^*, b^* и c^* — постоянные, которые определяют перемещение упругого тела как жесткого целого. На основании симметрии контурных условий относительно осей симметрии рассматриваемого прямоугольника функцию $\Phi(x, y)$ можно определить только для первой четверти области прямоугольника.

Обозначим через Φ_1 и Φ_2 функцию Φ в областях 1 и 2 соответственно

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} \Phi_1(x, y) & \text{в области } 1 \\ \Phi_2(x, y) & \text{в области } 2 \end{cases} \tag{1.3}$$

Бигармонические функции Φ_1 и Φ_2 ищем в виде [13, 14]

$$\Phi_1(x, y) = \frac{1}{2}(A_1 x^2 + B_1 y^2) + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k^{(1)} \operatorname{ch} \alpha_k y + B_k^{(1)} \alpha_k y \operatorname{sh} \alpha_k y] \cos \alpha_k x +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} [C_k^{(1)} \operatorname{ch} \beta_k x + D_k^{(1)} \operatorname{sh} \beta_k x + \beta_k x (E_k^{(1)} \operatorname{ch} \beta_k x + F_k^{(1)} \operatorname{sh} \beta_k x)] \cos \beta_k y$$

$$(-a < x < 0,\ 0 < y < h) \tag{1.4}$$

$$\Phi_2(x, y) = \frac{1}{2}(A_2 x^2 + B_2 y^2) + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k^{(2)} \operatorname{ch} \gamma_k y + B_k^{(2)} \gamma_k y \operatorname{sh} \gamma_k y] \cos \gamma_k x +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} [C_k^{(2)} \operatorname{ch} \beta_k x + D_k^{(2)} \operatorname{sh} \beta_k x + \beta_k x (E_k^{(2)} \operatorname{ch} \beta_k x + F_k^{(2)} \operatorname{sh} \beta_k x)] \cos \beta_k y$$

$$(0 < x < l,\ 0 < y < h) \tag{1.5}$$

где

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{a}, \qquad \beta_k = \frac{k\pi}{h}, \qquad \gamma_k = \frac{k\pi}{l} \tag{1.6}$$

В силу симметричности граничных условий имеем

$$\tau_{xy}(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = 0 \qquad (-a < x < l) \tag{1.7}$$

$$\tau_{xy}(-a, y) = 0, \quad u(-a, y) = 0 \qquad (0 < y < h) \tag{1.8}$$

На контуре прямоугольника выполняются следующие условия:

$$\tau_{xy}(l, y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin \beta_k y, \qquad u(l, y) = \frac{d_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \cos \beta_k y \qquad (0 < y < h) \tag{1.9}$$

$$v(x, h) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos \alpha_k x, \qquad \tau_{xy}(x, h) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \alpha_k x \qquad (-a < x < 0) \tag{1.10}$$

$$\sigma_y(x, h) = \frac{f_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cos \gamma_k x, \quad \tau_{xy}(x, h) = \sum_{k=1}^{\infty} e_k \sin \gamma_k x \qquad (0 < x < l) \tag{1.11}$$

Кроме того, на смежной стороне областей 1 и 2 должны быть выполнены условия непрерывности напряжений τ_{xy}, σ_x и перемещений u, v

$$\tau_{xy}^1(0, y) = \tau_{xy}^2(0, y), \qquad u^1(0, y) = u^2(0, y) \qquad (0 < y < h) \tag{1.12}$$

$$\sigma_x^1(0, y) = \sigma_x^2(0, y), \qquad v^1(0, y) = v^2(0, y) \tag{1.13}$$

Индекс сверху показывает: со стороны какой области вычисляются величины.

2. Подставляя (1.4) и (1.5) в (1.7), замечаем, что первое условие (1.7) удовлетворяется тождественно. Согласно второму условию (1.7), имеем

$$a^* = c^* = 0 \tag{2.1}$$

Удовлетворяя условиям (1.8) — (1.11), согласно (1.4) — (1.6) и (2.1) получаем

$$A_1 = \frac{Eb_0}{2h} + \nu B_1, \qquad b_1^* = \frac{a}{E}(B_1 - \nu A_1), \qquad b_2^* = \frac{d_0}{2} - \frac{l}{E}(B_2 - \nu A_2) \tag{2.2}$$

$$\begin{gathered}(A_k^{(1)} + B_k^{(1)}) \operatorname{sh} \alpha_k h + B_k^{(1)} \alpha_k h \operatorname{ch} \alpha_k h = \frac{a_k}{\alpha_k^2} \\ (A_k^{(1)} - B_k^{(1)}) \operatorname{sh} \alpha_k h + B_k^{(1)} \alpha_k h \operatorname{ch} \alpha_k \mathrm{ch} = -\frac{\nu a_k}{\alpha_k^2} - \frac{Eb_k}{\alpha_k}\end{gathered} \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered}-(C_k^{(1)} + F_k^{(1)}) \operatorname{sh} \beta_k a + (D_k^{(1)} + E_k^{(1)}) \operatorname{ch} \beta_k a + \beta_k a (E_k^{(1)} \operatorname{sh} \beta_k a - F_k^{(1)} \operatorname{ch} \beta_k a) = 0 \\ -(C_k^{(1)} - F_k^{(1)}) \operatorname{sh} \beta_k a + (D_k^{(1)} - E_k^{(1)}) \operatorname{ch} \beta_k a + \beta_k a (E_k^{(1)} \operatorname{sh} \beta_k a - F_k^{(1)} \operatorname{ch} \beta_k a) = 0\end{gathered} \tag{2.4}$$

$$\begin{gathered}(C_k^{(2)} + F_k^{(2)}) \operatorname{sh} \beta_k l + (D_k^{(2)} + E_k^{(2)}) \operatorname{ch} \beta_k l + \beta_k l (E_k^{(2)} \operatorname{sh} \beta_k l + F_k^{(2)} \operatorname{ch} \beta_k l) = \frac{c_k}{\beta_k^2} \\ (C_k^{(2)} - F_k^{(2)}) \operatorname{sh} \beta_k l + (D_k^{(2)} - E_k^{(2)}) \operatorname{ch} \beta_k l + \beta_k l (E_k^{(2)} \operatorname{sh} \beta_k l + F_k^{(2)} \operatorname{ch} \beta_k l) = \\ = -\frac{\nu c_k}{\beta_k^2} - \frac{Ed_k}{\beta_k}\end{gathered} \tag{2.5}$$

$$(A_k^{(2)} + B_k^{(2)}) \operatorname{sh} \gamma_k h + B_k^{(2)} \gamma_k h \operatorname{ch} \gamma_k h = \frac{e_k}{\gamma_k^2} \tag{2.6}$$

Из (1.4), (1.5) и условий (1.12) получаем

$$D_k^{(1)} + E_k^{(1)} = D_k^{(2)} + E_k^{(2)}, \qquad D_k^{(1)} - E_k^{(1)} = D_k^{(2)} - E_k^{(2)}, \qquad b_1^* = b_2^* \tag{2.7}$$

Здесь b_1^* и b_2^* — значения b^* в областях *1* и *2*. Введем обозначения

$$B_k^{(2)} = \frac{h}{\gamma_k} \frac{X_k}{\operatorname{sh} \gamma_k h}, \quad D_k^{(2)} = \frac{(-1)^k l}{\beta_k} Y_k, \quad E_k^{(2)} = \frac{(-1)^k l}{\beta_k} Z_k \tag{2.8}$$

Используя (1.4), (1.5), (1.11), (1.13), а также (2.1) — (2.7), после преобразований получаем совокупность трех бесконечных систем

$$X_p = \sum_{k=1}^{\infty} a_{pk} Y_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_{pk} Z_k + m_p \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2.9}$$

$$Y_p = \sum_{k=1}^{\infty} c_{pk} X_k + n_p, \qquad Z_p = \sum_{k=1}^{\infty} d_{pk} X_k + r_p \tag{2.10}$$

где

$$a_{pk} = -\frac{2\gamma_p}{h\zeta_p} \frac{1}{\beta_k^2 + \gamma_p^2}, \qquad b_{pk} = \frac{2\gamma_p}{h\zeta_p} \frac{\beta_k^2 - \gamma_p^2}{(\beta_k^2 + \gamma_p^2)^2} \tag{2.11}$$

$$c_{pk} = -\frac{4\beta_p}{l\xi_p}\left(\frac{\gamma_k^2}{\gamma_k^2 + \beta_p^2} + \frac{\eta_p}{2\xi_p}\right)\frac{1}{\gamma_k^2 + \beta_p^2}, \qquad d_{pk} = -\frac{2\beta_p}{l\xi_p} \frac{1}{\gamma_k^2 + \beta_p^2} \tag{2.12}$$

$$\begin{gathered}m_p = \frac{2}{\nu h^2 \gamma_p \zeta_p} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{\alpha_k} - \frac{e_k}{\gamma_k}\right) + \frac{2}{hl\gamma_p\zeta_p} \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{(-1)^k}{\beta_k} \times \\ \times \left\{1 - (-1)^p \frac{\beta_k^2 [\beta_k^2 + (2+\nu)\gamma_p^2]}{(\beta_k^2 + \gamma_p^2)^2}\right\} - \frac{2E}{hl} \frac{(-1)^p \gamma_p}{\zeta_p} \sum_{k=1}^{\infty} d_k \frac{(-1)^k \beta_k^2}{(\beta_k^2 + \gamma_p^2)^2} + \\ + \frac{1}{h\gamma_p\zeta_p}\left[f_p + e_p \operatorname{cth} \gamma_p h - f_0 - \frac{E}{l}\left(\frac{a}{h} b_0 + \frac{d_0}{\nu}\right)\right] + \frac{2}{\gamma_p\zeta_p} \frac{l + (1-\nu^2) a}{\nu h l} B_1\end{gathered} \tag{2.13}$$

$$n_p = \frac{2}{hl\beta_p\xi_p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k\alpha_k}{\alpha_k^2+\beta_p^2}\left[\frac{\alpha_k^2+(2+\nu)\beta_p^2}{\alpha_k^2+\beta_p^2} - \frac{1+\nu}{2\nu}\frac{\eta_p}{\xi_p}\frac{\alpha_k^2+(1-\nu)\beta_p^2}{\alpha_k^2}\right] +$$

$$+\frac{2E}{hl}\frac{\beta_p}{\xi_p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{\alpha_k^2+\beta_p^2}\left(\frac{\alpha_k^2}{\alpha_k^2+\beta_p^2}+\frac{\eta_p}{2\xi_p}\right) - \frac{2}{hl\beta_p\xi_p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e_k}{\gamma_k}\left(\frac{\gamma_k^2}{\gamma_k^2+\beta_p^2} - \frac{1+\nu}{2\nu}\frac{\eta_p}{\xi_p}\right) +$$

$$+\frac{(-1)^p(1-\nu)}{2l\beta_p\,\xi_p \operatorname{sh}\beta_p l}\left[\left(1-\frac{1+\nu}{1-\nu}\beta_p l \operatorname{cth}\beta_p l\right)c_p - \frac{E\beta_p}{1-\nu}(1+\beta_p l\operatorname{cth}\beta_p l)\,d_p\right] +$$

$$+\frac{(-1)^p(1+\nu)}{2l\beta_p \operatorname{sh}\beta_p l}\frac{\eta_p}{\xi_p^2}\left(c_p+\frac{E\beta_p}{1+\nu}d_p\right) + \frac{E}{2l^2\beta_p}\frac{\eta_p}{\xi_p^2}\left(\frac{a+l}{h}b_0+\frac{d_0}{\nu}\right) -$$

$$-\frac{(1-\nu^2)(a+l)}{\nu l^2\beta_p}\frac{\eta_p}{\xi_p^2}B_1 \qquad (2.14)$$

$$r_p = -\frac{1+\nu}{\nu hl\beta_p\xi_p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{\alpha_k}\frac{\alpha_k^2+(1-\nu)\beta_p^2}{\alpha_k^2+\beta_p^2} + \frac{E}{hl}\frac{\beta_p}{\xi_p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{\alpha_k^2+\beta_p^2} +$$

$$+\frac{1+\nu}{\nu hl\beta_p\xi_p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e_k}{\gamma_k} + \frac{(-1)^p(1+\nu)}{2l\beta_p\xi_p\operatorname{sh}\beta_p l}\left(c_p+\frac{E\beta_p}{1+\nu}d_p\right) + \frac{E}{2l^2\beta_p\xi_p}\left(\frac{a+l}{h}b_0+\frac{d_0}{\nu}\right) -$$

$$-\frac{(1-\nu^2)(a+l)}{\nu l^2\beta_p\xi_p}B_1 \qquad (2.15)$$

$$\xi_p = \operatorname{cth}\beta_p a + \operatorname{cth}\beta_p l, \qquad \eta_p = \frac{\beta_p a}{\operatorname{sh}^2\beta_p a} + \frac{\beta_p l}{\operatorname{sh}^2\beta_p l}, \qquad \zeta_p = \operatorname{cth}\gamma_p h + \frac{\gamma_p h}{\operatorname{sh}^2\gamma_p h} \qquad (2.16)$$

и соотношения

$$\frac{l+(1-\nu^2)a}{\nu l}B_1 = \sum_{k=1}^{\infty}(Y_k+Z_k) - \frac{1}{\nu h}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k}{\alpha_k}-\frac{e_k}{\gamma_k}\right) - \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k c_k}{\beta_k} +$$

$$+\frac{E}{2l}\left(\frac{a}{h}b_0+\frac{d_0}{\nu}+\frac{l}{E}f_0\right), \qquad B_2 = \frac{1}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k}{\alpha_k}-\frac{e_k}{\gamma_k}\right)+B_1 \qquad (2.17)$$

Из (2.2) согласно (2.7), будем иметь

$$b_1^* = b_2^* = -\frac{\nu a}{2h}b_0 + (1-\nu^2)\frac{a}{E}B_1 \qquad (2.18)$$

Подставляя (2.17) и (2.18) в третье равенство (2.2), находим

$$A_2 = \frac{1}{\nu h}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k}{\alpha_k}-\frac{e_k}{\gamma_k}\right) - \frac{E}{2l}\left(\frac{a}{h}b_0+\frac{d_0}{\nu}\right) + \frac{l+(1-\nu^2)a}{\nu l}B_1 \qquad (2.19)$$

Таким образом, коэффициенты $A_k^{(1)}$ и $B_k^{(1)}$ определяются непосредственно из (2.3). Постоянные b_1^*, b_2^*, A_1, A_2 и B_2, согласно (2.2) и (2.17) — (2.19), выражаются через B_1. Коэффициенты $C_k^{(1)}, D_k^{(1)}, E_k^{(1)}, F_k^{(1)}, A_k^{(2)}, C_k^{(2)}$ и $F_k^{(2)}$ на основании (2.4)—(2.7) и (2.8) выражаются через X_k, Y_k и Z_k, для определения которых имеем бесконечные системы линейных уравнений (2.9), (2.10) со свободными членами, зависящими от B_1. Коэффициент B_1 определяется из (2.17) при помощи решения (2.9), (2.10).

3. Докажем, что совокупность бесконечных систем (2.9), (2.10) квазивполне регулярна. Для суммы абсолютных значений коэффициентов уравнений (2.9) имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_{pk}| + \sum_{k=1}^{\infty}|b_{pk}| = \frac{2\gamma_p}{h\zeta_p}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\beta_k^2+\gamma_p^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\beta_k^2-\gamma_p^2|}{(\beta_k^2+\gamma_p^2)^2}\right] =$$

$$= \frac{2x_p}{\pi\zeta_p(x_p)}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+x_p^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|k^2-x_p^2|}{(k^2+x_p^2)^2}\right] \qquad (p=1,2,\ldots) \qquad (3.1)$$

где

$$x_p = \frac{\gamma_p h}{\pi} = p\frac{h}{l} \qquad \zeta_p(x_p) = \operatorname{cth} x_p\pi + \frac{x_p\pi}{\operatorname{sh}^2 x_p\pi} \tag{3.2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{pk}| + \sum_{k=1}^{\infty} |b_{pk}| =$$

$$= \frac{2x_p}{\pi\zeta_p(x_p)}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+x_p^2} \mp \sum_{k=1}^{k_p^\circ}\frac{k^2-x_p^2}{(k^2+x_p^2)^2} + \sum_{k_p^\circ+1}^{\infty}\frac{k^2-x_p^2}{(k^2+x_p^2)^2}\right] \tag{3.3}$$

Здесь k_p° — целое число, определяемое при целых $k \leqslant k_p^\circ$ из неравенства

$$k^2 - x_p^2 \leqslant 0 \tag{3.4}$$

Из (3.4) получим

$$k_p^\circ \leqslant x_p \tag{3.5}$$

В силу (3.5), для выражения (3.3) будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{pk}| + \sum_{k=1}^{\infty} |b_{pk}| = \frac{2x_p}{\pi\zeta_p(x_p)}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+x_p^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2-x_p^2}{(k^2+x_p^2)^2} - 2\sum_{k=1}^{k_p^\circ}\frac{k^2-x_p^2}{(k^2+x_p^2)^2}\right] =$$

$$= \frac{2x_p}{\pi\zeta_p(x_p)}\left[\frac{\pi}{2x_p}\left(\operatorname{cth} x_p\pi - \frac{1}{x_p\pi}\right) + \frac{\pi}{2x_p}\left(1 - \frac{x_p^2\pi^2}{\operatorname{sh}^2 x_p\pi}\right)\frac{1}{x_p\pi} + 2x_p^2\sum_{k=1}^{k_p^\circ}\frac{1}{(k^2+x_p^2)^2} -\right.$$

$$\left. - 2\sum_{k=1}^{k_p^\circ}\frac{k^2}{(k^2+x_p^2)^2}\right] \leqslant \frac{1}{\zeta_p(x_p)}\left[\operatorname{cth} x_p\pi - \frac{x_p\pi}{\operatorname{sh}^2 x_p\pi} + \frac{1}{x_p\pi}\,\frac{1-x_p^2}{1+x_p^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\pi}\left(1 + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x_p}\right)\right] = f(x_p) \tag{3.6}$$

Здесь использованы следующие суммы и оценки [15]:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+x_p^2} = \frac{\pi}{2x_p}\left(\operatorname{cth} x_p\pi - \frac{1}{x_p\pi}\right) \tag{3.7}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k^2+x_p^2)^2} = \frac{\pi}{4x_p^3}\left(\operatorname{cth} x_p\pi + \frac{x_p\pi}{\operatorname{sh}^2 x_p\pi} - \frac{2}{x_p\pi}\right) \tag{3.8}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{(k^2+x_p^2)^2} = \frac{\pi}{4x_p}\left(\operatorname{cth} x_p\pi - \frac{x_p\pi}{\operatorname{sh}^2 x_p\pi}\right) \tag{3.9}$$

$$\sum_{k=1}^{k_p^\circ}\frac{1}{(k^2+x_p^2)^2} \leqslant \int_0^{k_p^\circ}\frac{dk}{(k^2+x_p^2)^2} < \frac{1}{4x_p^3}\left(1+\frac{\pi}{2}\right) \tag{3.10}$$

$$\sum_{k=1}^{k_p^\circ}\frac{k^2}{(k^2+x_p^2)^2} \geqslant \int_1^{k_p^\circ}\frac{k^2dk}{(k^2+x_p^2)^2} \geqslant \int_1^{x_p}\frac{k^2dk}{(k^2+x_p^2)^2} - \frac{1}{4x_p^2} =$$

$$= \frac{1}{4x_p}\left(\frac{\pi}{2} - 1 - \frac{1}{x_p}\,\frac{1-x_p^2}{1+x_p^2} - 2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x_p}\right) \tag{3.11}$$

Из (3.2) и (3.6) получаем

$$\lim_{x_p\to\infty} f(x_p) = 1 + \frac{2}{\pi} \tag{3.12}$$

Для второй системы (2.10) получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_{pk}| = \frac{4\beta_p}{l\xi_p}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k^2}{(\gamma_k^2+\beta_p^2)^2} + \frac{\eta_p}{2\xi_p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_k^2+\beta_p^2}\right] = \frac{4y_p}{\pi\xi_p(y_p)}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{(k^2+y_p^2)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\,\frac{\eta_p(y_p)}{\xi_p(y_p)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+y_p^2}\right] = \frac{1}{\xi_p(y_p)}\left[\operatorname{cth} y_p\pi - \frac{y_p\pi}{\operatorname{sh}^2 y_p\pi} + \frac{\eta_p(y_p)}{\xi_p(y_p)}\left(\operatorname{cth} y_p\pi - \frac{1}{y_p\pi}\right)\right] =$$

$$= \varphi(y_p) \tag{3.13}$$

где

$$y_p=\frac{\beta_p l}{\pi}=p\frac{l}{h}, \qquad \xi_p(y_p)=\operatorname{cth} y_p\pi+\operatorname{cth}\frac{y_p\pi a}{l}, \qquad \eta_p(y_p)=\frac{y_p\pi}{\operatorname{sh}^2 y_p\pi}+\frac{y_p\pi a/l}{\operatorname{sh}^2(y_p\pi a/l)} \tag{3.14}$$

Из (3.13) и (3.14) получаем

$$\lim \varphi(y_p)={}^1/_2 \qquad (y_p\to\infty) \tag{3.15}$$

Для суммы абсолютных значений коэффициентов третьего уравнения (2.10) имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}|d_{pk}|=\frac{2\beta_p}{l\xi_p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_k^2+\beta_p^2}=\frac{2y_p}{\pi\xi_p(y_p)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+y_p^2}=$$

$$=\frac{1}{\xi_p(y_p)}\left(\operatorname{cth} y_p\pi-\frac{1}{y_p\pi}\right)=\psi(y_p) \tag{3.16}$$

В силу неравенств

$$\operatorname{cth} y_p\pi-\frac{1}{y_p\pi}\leqslant 1, \qquad \operatorname{cth} y_p\pi+\operatorname{cth}\frac{y_p\pi a}{l}\geqslant 2 \quad \text{при } 0\leqslant y_p\pi\leqslant\infty \tag{3.17}$$

и формулы (3.16) получим

$$\psi(y_p)\leqslant {}^1/_2 \quad \text{при } 0\leqslant y_p\leqslant\infty \tag{3.18}$$

Таким образом, согласно (3.12), (3.15) и (3.18), для суммы модулей коэффициентов каждой строки бесконечной системы (2.10) имеем следующие оценки при $0\leqslant y_p\leqslant\infty$

$$\lim_{x_p\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|a_{pk}|+\sum_{k=1}^{\infty}|b_{pk}|\right\}\leqslant 1+\frac{2}{\pi}, \qquad \lim_{y_p\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|c_{pk}|=\frac{1}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}|d_{pk}|\leqslant\frac{1}{2} \tag{3.19}$$

Подставляя Y_p и Z_p из второй и третьей систем (2.10) в первую, а X_p — из первой в следующие, получаем бесконечную систему относительно неизвестных X_p, Y_p и Z_p

$$X_p=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(a_{pk}c_{kn}+b_{pk}d_{kn})X_n+\sum_{k=1}^{\infty}(a_{pk}n_k+b_{pk}r_k)+m_p$$

$$Y_p=\sum_{k=1}^{\infty}c_{pk}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_{kn}Y_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_{nk}Z_n\right)+\sum_{k=1}^{\infty}c_{pk}m_k+n_p$$

$$Z_p=\sum_{k=1}^{\infty}d_{pk}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_{kn}Y_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_{kn}Z_n\right)+\sum_{k=1}^{\infty}d_{pk}m_k+r_p \qquad (p=1,2,\ldots) \tag{3.20}$$

Для сумм абсолютных значений коэффициентов систем (3.20), согласно (3.19), будем иметь оценки

$$\lim_{\substack{x_p\to\infty\\ y_p\to\infty}}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|a_{pk}c_{kn}+b_{pk}d_{kn}|\leqslant\lim_{\substack{x_p\to\infty\\ y_p\to\infty}}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{pk}|\sum_{n=1}^{\infty}|c_{kn}|+\lim_{\substack{x_p\to\infty\\ y_p\to\infty}}\sum_{k=1}^{\infty}|b_{pk}|\sum_{n=1}^{\infty}|d_{kn}|=$$

$$=\lim_{\substack{x_p\to\infty\\ y_p\to\infty}}\sum_{n=1}^{\infty}|c_{kn}|\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_{pk}|+\sum_{k=1}^{\infty}|b_{pk}|\right)=\lim_{\substack{x_p\to\infty\\ y_p\to\infty}}\sum_{n=1}^{\infty}|d_{kn}|\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_{pk}|+\sum_{k=1}^{\infty}|b_{pk}|\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{\pi}\right)=0.5\cdot 1{,}6366=1-\theta \tag{3.21}$$

$$\lim_{\substack{x_p\to\infty\\ y_p\to\infty}}\sum_{k=1}^{\infty}|c_{pk}|\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_{kn}|+\sum_{n=1}^{\infty}|b_{kn}|\right)\leqslant\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{\pi}\right)=0.5\cdot 1.6366=1-\theta$$

$$\lim_{\substack{x_p\to\infty\\ y_p\to\infty}}\sum_{k=1}^{\infty}|d_{pk}|\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_{kn}|+\sum_{n=1}^{\infty}|b_{kn}|\right)\leqslant\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{\pi}\right)=0.5\cdot 1.6366=1-\theta$$

$$(\theta=0.1817)$$

Отметим, что оценки (3.19), которые получены при $x_p\to\infty$ и $y_p\to\infty$, справедливы уже при $x_p\geqslant 5$ и $y_p\geqslant 5$.

Кроме того, из (3.6), (3.13) и (3.16) легко заметить, что

$$\lim f(x_p) = {}^1/_2 \quad \text{при } x_p \to 0, \qquad \lim \varphi(y_p) = \lim \psi(y_p) = 0 \quad \text{при } y_p \to 0$$

и суммы абсолютных значений коэффициентов систем (3.20) стремятся к нулю. Это позволяет определить приближенное решение бесконечных систем с высокой точностью.

Таким образом, на основании (3.21) бесконечная система (2.10) при произвольном отношении a, l и h и любом возможном значении коэффициента Пуассона квазивполне регулярна [11]. Как видно из (2.11) — (2.15) и (3.20), свободные члены бесконечных систем (2.10) и (3.20) имеют порядок коэффициентов Фурье разложений (1.9) — (1.11). Следовательно, они ограничены и имеют порядок не ниже p^{-1}, если внешняя нагрузка и первые производные перемещений $v^{-1}(x, h)$ и $u^2(l, y)$ в данном интервале кусочно непрерывны.

Квазивполне регулярность бесконечной системы (2.10) вместе с ограниченностью свободных членов (2.13) — (2.15) позволяет оценить искомые коэффициенты разложения $\Phi(x, y)$ (1.4) и (1.5) с любой степенью точности [14]. При помощи этих оценок определяются верхняя и нижняя границы для напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy} и перемещений u и v.

Заметим, что ряды, определяющие искомые напряжения и перемещения, на сторонах прямоугольника расходятся. Поэтому для определения характера изменения этих величин (в том числе — и давления под штампом) необходимо их вычислить во внутренних, весьма близки к границе точках области [14], где эти ряды сходятся как геометрические прогрессии.

Решение симметричной контактной задачи для прямоугольника, когда на границе вне контакта всюду заданы только напряжения, вместе с численными примерами, выявляющими влияние внешней нагрузки и отношений размеров прямоугольника в длине контакта, будет предметом следующего сообщения авторов.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 16 XII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, 1954.
2. Абрамов В. М. Проблема контакта упругой полуплоскости с абсолютно жестким фундаментом при учете сил трения. Докл. АН СССР, 1937, т. 17, № 4.
3. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. Гостехиздат, 1949.
4. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. Гостехиздат, 1953.
5. Шерман Д. И. Плоская задача теории упругости со смешанными условиями. Тр. Сейсмолог. ин-та АН СССР, 1938, № 88.
6. Беленький М. Я. Смешанная задача теории упругости для бесконечно длинной полосы. ПММ, 1952, т. 16, вып. 3, стр. 283—292.
7. Бородачев Н. М. Плоская контактная задача для упругого тела конечной ширины. Изв. АН СССР. ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 6.
8. Попов Г. Я. К решению плоской контактной задачи теории упругости при наличии сил сцепления или трения. Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-матем. н., 1963, т. 16, № 2, стр. 15—32.
9. Тоноян В. С. Плоская контактная задача для упругой четвертьплоскости с неподвижной вертикальной кромкой. Докл. АН АрмССР, 1963, т. 37, № 5, стр. 249—258.
10. Коялович Б. М. Исследования о бесконечных системах линейных уравнений. Тр. физ.-матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1930, т. 3, стр. 41—167.
11. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, 1962.
12. Арутюнян Н. Х. Решение задачи о кручении стержней полигонального поперечного сечения. ПММ, 1949, т. 13, вып. 1, стр. 107—112.
13. Абрамян Б. Л. К плоской задаче теории упругости для прямоугольника. ПММ, 1957, т. 21, вып. 1, стр. 89—100.
14. Галфаян П. О. Решение одной смешанной задачи теории упругости для прямоугольника. Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-матем. н., 1964, т. 17, № 1, стр. 39—61.
15. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962.