ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ МНОГОЧЛЕНОВ ЯКОБИ

Л. Н. Карпенко (Новосибирск)

К одномерным сингулярным интегральным уравнениям с постоянными коэффициентами на разомкнутой кривой сводятся многие важные в прикладном отношении задачи. Это задача об обтекании дужки плоским потоком, о распространении трещины в упругой пластинке, однородной или склеенной из различных материалов, контактные задачи плоской теории упругости, некоторые задачи механики горных пород и др.

Характерным для каждой такой задачи является поведение искомой функции вблизи концов кривой. Для приближенного решения таких сингулярных уравнений удобно использовать ортогональные многочлены, для которых каноническая функция уравнения, определяющая поведение решения вблизи концов, будет весом. Если коэффициенты уравнения постоянны, то эти многочлены будут многочленами Якоби.

Примеры применения ортогональных многочленов для решения сингулярных интегральных уравнений даны в [1, 2]. В статье [3] фактически также используются многочлены Чебышева и аналогичные им, но в тригонометрическом представлении. В настоящей статье рассматривается основанный на свойствах многочленов Якоби способ решения сингулярного интегрального уравнения с постоянными коэффициентами на отрезке $(-1, +1)$ вещественной оси с различными условиями на концах отрезка.

1. Прежде всего приведем некоторые известные данные (см., например, [4]), относящиеся к решению характеристического уравнения

$$a\varphi(x) + \frac{b}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt = f(x) \qquad (-1<x<1) \tag{1.1}$$

с постоянными коэффициентами a, b и правой частью $f(x)$, удовлетворяющей условию Гёльдера (условию H или $H(\mu)$)

$$|f(t) - f(x)| \leqslant A\,|t-x|^{\mu} \qquad (0<\mu\leqslant 1) \qquad (t, x \in [-1, +1]) \tag{1.2}$$

Интеграл в (1.1) понимается в смысле главного значения по Коши. Предположим, кроме того, что выполнены дополнительные условия

$$b \neq 0, \qquad a^2 - b^2 = 1, \qquad 0 \leqslant \theta = \arg(a-b) < \pi$$

Решение уравнения (1.1) разыскиваем в классе функций, удовлетворяющих условию H во внутренних точках и допускающих интегрируемую бесконечность на концах промежутка интегрирования (в классе H^* в обозначении Н. И. Мусхелишвили [4]). Положим $a - b = \rho e^{i\theta}$ и введем обозначения

$$\alpha = -\lambda - \varkappa + \frac{\theta}{\pi} + \frac{\ln\rho}{\pi i}, \qquad \beta = \lambda - \frac{\theta}{\pi} - \frac{\ln\rho}{\pi i} \tag{1.3}$$

Приведенными условиями λ и $\varkappa$ определяются неоднозначно (кроме случая $\theta = 0$, когда $\lambda = \varkappa = \operatorname{Re}\alpha = \operatorname{Re}\beta = 0$, при этом $\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Im}\beta \neq 0$); возможные случаи детально разобраны в [4]. В данной задаче $\varkappa = -\alpha-\beta$ (индекс уравнения) может принимать значения -1, 0, $+1$. В этих случаях решение уравнения (1.1)

$$\varphi(x) = af(x) - \frac{bw(x)}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)}{w(t)}\frac{dt}{t-x} + Cw(x) \qquad (-1<x<1) \tag{1.4}$$

Здесь C — произвольная постоянная, если $\varkappa = 1$; в других случаях $C = 0$. Ветвь функции

$$w(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} \qquad (-1<x<1) \tag{1.5}$$

для удобства определим условием $w(0) = 1$. Если $\varkappa = -1$, то к (1.4) добавляется условие

$$Uf \equiv \int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{w(x)}\,dx = 0 \tag{1.6}$$

выполнение которого необходимо для разрешимости (1.1).

2. Многочлены Якоби, соответствующие весовой функции $w(x)$ (1.5), определим формулой Родрига [5, 6]

$$w(x) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [w(x)(1-x^2)^n] \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.1}$$

Справедливы соотношения

$$\int_{-1}^{1} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_m^{(\alpha, \beta)}(x) w(x)\, dx = 0 \qquad (m \neq n) \tag{2.2}$$

$$\int_{-1}^{1} [P_n^{(\alpha, \beta)}(x)]^2 w(x)\, dx = h_n^{(\alpha, \beta)} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$$

В дальнейшем $\alpha + \beta = -\varkappa$ — целое число, $\varkappa \geqslant -1$ (хотя в (2.1) можно считать α, β любыми, а в (2.2) предполагается $\operatorname{Re}\alpha > -1$, $\operatorname{Re}\beta > -1$).

Пусть $w(z)$ — аналитическое продолжение функции (1.5) в плоскость комплексной переменной $z = x + iy$ с разрезом по вещественной оси от $z = -1$ до $z = 1$, так что $w(x) = w(x + i0)$. Используя формулу Родрига (или прямо формулы дифференцирования и интегрирования многочленов Якоби [5]), найдем асимптотическое разложение этой функции

$$w(z) = e^{-i\pi\alpha} 2^{-\varkappa} P_{-\varkappa}^{(-\alpha, -\beta)}(z) + e^{-i\pi\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-\varkappa} P_{k-\varkappa}^{(-\alpha-k, -\beta-k)}(0) \frac{1}{z^k} \tag{2.3}$$

Здесь и в дальнейшем $P_n^{(\alpha,\beta)}(z) \equiv 0$, если $n < 0$. Из разложения (2.3) имеем

$$(1-z^2)^n w(z) = (1-z)^{n+\alpha}(1+z)^{n+\beta} = (-1)^n e^{-i\pi\alpha} 2^{2n-\varkappa} P_{2n-\varkappa}^{(-\alpha-n, -\beta-n)}(z) + o(1) \tag{2.4}$$

Можно показать, что

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{w(t)}{t-z} dt = \frac{e^{i\pi\alpha}}{e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}} \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \qquad (z \overline{\in} [-1, +1])$$

Здесь в правой части интегрирование производится по любому контуру, охватывающему точки -1 и $+1$ и не охватывающему точку z. Тогда (2.3) позволяет получить интеграл

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{w(t)}{t-z} dt = \frac{1}{\sin \pi\alpha} [e^{i\pi\alpha} w(z) - 2^{-\varkappa} P_{-\varkappa}^{(-\alpha, -\beta)}(z)] \qquad (z \overline{\in} [-1, 1])$$

Эта формула вместе с (2.1) и (2.4) посредством n-кратного интегрирования по частям и последующего дифференцирования дает интеграл

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{P_n^{(\alpha, \beta)}(t)}{t-z} w(t)\, dt = \frac{1}{\sin \pi\alpha} [e^{i\pi\alpha} P_n^{(\alpha, \beta)}(z) w(z) - 2^{-\varkappa} P_{n-\varkappa}^{(-\alpha, -\beta)}(z)] \tag{2.5}$$

Получить (2.5) можно и другим путем, используя представление многочлена Якоби и функции Якоби второго рода через гипергеометрические функции.

Из (2.5) найдем главное значение интеграла (2.6)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{P_n^{(\alpha, \beta)}(t)}{t-x} w(t)\, dt = \operatorname{ctg} \pi\alpha P_n^{(\alpha, \beta)}(x) w(x) - \frac{2^{-\varkappa}}{\sin \pi\alpha} P_{n-\varkappa}^{(-\alpha, -\beta)}(x) \qquad (-1 < x < 1)$$

Отсюда, используя связь α и β (1.3) с коэффициентами уравнения (1.1), получим

$$a P_n^{(\alpha, \beta)}(x) w(x) + \frac{b}{\pi i} \int_{-1}^{1} \frac{P_n^{(\alpha, \beta)}(t)}{t-x} w(t)\, dt = (-1)^{\lambda+\varkappa} 2^{-\varkappa} P_{n-\varkappa}^{(-\alpha, -\beta)}(x) \tag{2.7}$$

$$a \frac{P_n^{(-\alpha, -\beta)}(x)}{w(x)} - \frac{b}{\pi i} \int_{-1}^{1} \frac{P_n^{(-\alpha, -\beta)}(t)}{t-x} \frac{dt}{w(t)} = (-1)^{\lambda+\varkappa} 2^{\varkappa} P_{n+\varkappa}^{(\alpha, \beta)}(x) \tag{2.8}$$

$$(-1 < x < 1)$$

3. Продолжим рассмотрение уравнения (1.1). Введем новую функцию $\psi(x)$ и оператор S посредством соотношений

$$\varphi(x) = w(x)\psi(x), \quad S\psi = aw(x)\psi(x) + \frac{b}{\pi i}\int_{-1}^{1}\psi(t)\frac{w(t)}{t-x}\,dt \tag{3.1}$$

Уравнение (1.1) запишем в виде

$$S\psi = f \tag{3.2}$$

Его решением, согласно (1.4), будет

$$\psi^* = Rf, \qquad Rf = a\frac{f(x)}{w(x)} - \frac{b}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)}{w(t)}\frac{dt}{t-x} \tag{3.3}$$

При этом произвольная постоянная, входящая в (1.4), если $\varkappa = 1$, фиксируется условием

$$\int_{-1}^{1}\psi^*(x)\,w(x)\,dx = 0 \tag{3.4}$$

Если $\varkappa = -1$, то требуется выполнение дополнительного условия (1.6).

Приступим к решению полного сингулярного интегрального уравнения

$$S\psi + k\psi = f, \qquad \psi k = \int_{-1}^{1}k(x, t)\,w(t)\,\psi(t)\,dt \tag{3.5}$$

Оператор S определен формулой (3.1), a, b, $f(x)$ удовлетворяют прежним условиям (п. 1); α, β, $w(x)$ определены равенствами (1.3), (1.5), ядро $k(x, t)$ удовлетворяет условию $H(\mu, \nu)$

$$|k(x, t) - k(y, s)| \leqslant A_1|x-y|^{\mu} + A_2|t-s|^{\nu} \qquad (\mu > \operatorname{Re}\alpha,\ \mu > \operatorname{Re}\beta) \tag{3.6}$$

На решение ψ^* этого уравнения при $\varkappa = 1$ для определенности наложим условие (3.4), при $\varkappa = -1$ предположим выполнение равенства

$$U(k\psi^* - f) = 0 \tag{3.7}$$

т. е. разрешимость уравнения (3.5).

Заменим точное уравнение (3.5) другим, которое рассматриваем как приближенное, с ядром специального вида

$$S\Psi + K\Psi = f + \alpha_\varkappa \tag{3.8}$$

$$K\psi = \int_{-1}^{1}K(x, t)\,w(t)\,\psi(t)\,dt, \quad K(x, t) = \sum_{k=0}^{n}N_k(t)\,P_k^{(-\alpha, -\beta)}(x) \tag{3.9}$$

Здесь $P_k^{(-\alpha, -\beta)}(x)$ — многочлены Якоби, $N_k(t)$ удовлетворяет условию H при $-1 \leqslant t \leqslant 1$; $\alpha_\varkappa$ — постоянная, $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$, величина α_{-1} подбирается так, чтобы уравнение (3.8) имело решение. Аналогично (3.7) имеем

$$\alpha_{-1} = \frac{1}{h_0^{(-\alpha, -\beta)}}\,U(K\Psi^* - f) \tag{3.10}$$

Здесь $h_0^{(-\alpha, -\beta)}$ определяется формулой (2.2). Так как ядро $K(x, t)$ — вырожденное, то (3.11)

$$K\Psi^* = \sum_{k=0}^{n}a_k P_k^{(-\alpha, -\beta)}(x), \qquad a_k = \int_{-1}^{1}N_k(t)\,w(t)\,\Psi^*(t)\,dt \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

Здесь Ψ^* — решение (3.8). Имея это в виду, применим к (3.8) формулу (3.3) и используем (2.8)

$$\Psi^*(x) = Rf - (-1)^{\lambda+\varkappa}\,2^{\varkappa}\sum_{k=-\varkappa}^{n}a_k P_{k+\varkappa}^{(\alpha, \beta)}(x) \tag{3.12}$$

При $\varkappa = 1$ положим $a_{-1} = 0$, это фиксирует решение Ψ^* условием

$$\int_{-1}^{1} \Psi^*(x) w(x) dx = 0$$

аналогичным (3.4), а при $\varkappa = -1$ выражение (3.12) будет решением уравнения (3.8), как следует из (3.10), только в том случае, когда

$$\alpha_{-1} = a_0 - \frac{Uf}{h_0^{(-\alpha,\,-\beta)}} \tag{3.13}$$

Введем обозначения

$$c_{ik} = (-1)^{\lambda+\varkappa} 2^{\varkappa} \int_{-1}^{1} N_i(t) P_{k+\varkappa}^{(\alpha,\,\beta)}(t) w(t)\, dt \qquad \left(\begin{matrix} i = 0, 1, 2, \ldots, n \\ k = -\varkappa, -\varkappa+1, \ldots, n \end{matrix}\right)$$

$$b_i = \int_{-1}^{1} N_i(t) w(t) Rf(t)\, dt \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n) \tag{3.14}$$

$$c_{-1k} = b_{-1} = 0 \qquad (k = -\varkappa, -\varkappa + 1, \ldots, n)$$

После подстановки (3.12) в (3.11) получаем систему для определения a_k

$$a_i + \sum_{k=-\varkappa}^{n} c_{ik} a_k = b_i \qquad (i = -\varkappa, \ldots, n) \tag{3.15}$$

и (при $\varkappa = -1$) дополнительное соотношение

$$a_0 = b_0 - \sum_{k=1}^{n} c_{0k} a_k$$

необходимое для вычисления α_{-1} по формуле (3.13).

После решения системы (3.15) величина Ψ^* найдется по формуле (3.12), которую можно представить в виде

$$\Psi^* = (E + \Gamma) Rf \tag{3.16}$$

$$\Gamma\psi = \int_{-1}^{1} \gamma(x, t) w(t) \psi(t)\, dt, \qquad \gamma(x, t) = -(-1)^{\lambda+\varkappa} 2^{\varkappa} \sum_{i,\,k=-\varkappa}^{n} \frac{\Delta_{ki}}{\Delta} N_i(t) P_{k+\varkappa}^{(\alpha,\,\beta)}(x)$$

Здесь E—тождественный оператор, Δ—определитель системы (3.15), Δ_{ki}—алгебраическое дополнение соответствующего элемента.

Отметим, что если функция $f(x)$ удовлетворяет условию (1.2) с $\mu > \operatorname{Re}\alpha$, $\mu > \operatorname{Re}\beta$, то Rf (а следовательно и Ψ^*) удовлетворяет условию H. Действительно, положим

$$f(x) = f_1(x) + {}^1/_2\, [(1 + x) f(1) + (1 - x) f(-1)]$$

Отношение $f_1(x) / w(x)$ удовлетворяет условию H и равно нулю на концах отрезка $[-1, +1]$. Результат действия R на второе слагаемое будет по (2.8) многочленом, а Rf_1 по теореме Племеля — Привалова [4] удовлетворяет условию H. В дальнейшем будем предполагать это выполненным.

4. Пусть H — пространство функций, удовлетворяющих на отрезке $[-1, +1]$ условию $H(\mu)$, $\mu > \operatorname{Re}\alpha$, $\mu > \operatorname{Re}\beta$, с нормой

$$\|\psi\|_H = \max|\psi| + \sup \frac{|\psi(t) - \psi(x)|}{|t - x|^{\mu}}$$

а C — пространство непрерывных функций. Будем считать, что

$$R \in [H \to C], \quad \Gamma \in [C \to C], \quad k, K \in [C \to H]$$

Пусть U — функционал, определенный (1.6) в пространстве H.

Решение уравнения (3.5) представим в виде

$$\psi^* = (E + \Gamma) R (f + K\psi^* - k\psi^*)$$

тогда разность решений точного (3.5) и приближенного (3.8) уравнений будет равна

$$\psi^* - \Psi^* = (E + \Gamma)R\,(K\psi^* - k\psi^*)$$

Пусть ядра $k\,(x,\,t)$ и $K\,(x,\,t)$ близки в том смысле, что для любой $\psi \in C$

$$\|k\psi - K\psi\|_H \leqslant \eta\,\|\psi\|_C \tag{4.1}$$

Тогда

$$\|\psi^* - \Psi^*\|_C \leqslant \eta\,\|E + \Gamma\|\,\|R\|\,\|\psi^*\|_C = p\,\|\psi^*\|_C \tag{4.2}$$

или иначе

$$\|\psi^* - \Psi^*\|_C \leqslant \frac{p}{1-p}\|\Psi^*\|_C \qquad \text{при} \quad p = \eta\,\|E + \Gamma\|\,\|R\| < 1 \tag{4.3}$$

Из (3.7) и (3.10) имеем

$$\alpha_{-1} = \frac{1}{h_0^{(-\alpha,\,-\beta)}}\,U\,(K\Psi^* - k\psi^*)$$

Отсюда и из (4.3) получаем оценку

$$|\alpha_{-1}| \leqslant \frac{\|U\|}{|h_0^{(-\alpha,\,-\beta)}|}\,\frac{\eta + p\,\|k\|}{1-p}\,\|\Psi^*\|_C \tag{4.4}$$

Оценим нормы операторов, входящих в эти соотношения. Используя (2.8), можем записать

$$Rf = (-1)^{\lambda+\varkappa}2^\varkappa P_\varkappa^{(\alpha,\,\beta)}(x)\,f(x) - \frac{b}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(t) - f(x)}{t - x}\,\frac{dt}{w(t)}$$

Отсюда следует

$$\|Rf\|_C \leqslant A\max|f(x)| + B\sup\frac{|f(t) - f(x)|}{|t - x|^\mu} \leqslant \max\{A,\,B\}\,\|f(x)\|_H$$

$$A = 2^\varkappa \max|P_\varkappa^{(\alpha,\,\beta)}(x)|, \quad B = \frac{|b|}{\pi}\max\int\limits_{-1}^{1}\frac{|t - x|^{\mu-1}}{|w(t)|}\,dt, \quad \|R\| \leqslant \max\{A,\,B\} \tag{4.5}$$

Далее, $\|E + \Gamma\| \leqslant 1 + \|\Gamma\|$, и можно показать, что

$$\|\Gamma\| = \max\int\limits_{-1}^{1}|\gamma(x,\,t)\,w(t)|\,dt \tag{4.6}$$

Обозначим

$$k\,(x,\,t) - K\,(x,\,t) = \delta\,(x,\,t) \in H\,(\mu,\,\nu)$$

Тогда

$$\|\delta(x,\,t)\|_H = \max|\delta(x,\,t)| + \max\sup_{x,\,y}\frac{|\delta(x,\,t) - \delta(y,\,t)|}{|x - y|^\mu} + \max\sup_{t,\,s}\frac{|\delta(x,\,t) - \delta(x,\,s)|}{|t - s|^\nu} \tag{4.7}$$

Тогда для любой функции $\psi \in C$

$$\|k\psi - K\psi\|_H \leqslant M\,\|\psi(x)\|_C\,\|\delta(x,\,t)\|_H$$

$$M = \max\left\{\int\limits_{-1}^{1}|w(t)|\,dt, \quad \max\int\limits_{-1}^{1}|t - s|^\nu\,|w(t)|\,dt\right\}$$

Следовательно, в (4.1) можно положить

$$\eta = M\,\|\delta\,(x,\,t)\|_H \tag{4.8}$$

Аналогично

$$\|k\| \leqslant M\,\|k\,(x,\,t)\|_H \tag{4.9}$$

Наконец, приведем оценку нормы функционала U; имеем

$$\|U\| \leqslant \max\left\{|h_0^{(-\alpha,\,-\beta)}|, \ \max\int\limits_{-1}^{1}\frac{|t - x|^\mu}{|w(t)|}\,dt\right\} \tag{4.10}$$

5. В качестве $K(x, t)$ возьмем отрезок ряда многочленов Якоби функции $k(x, t)$

$$k(x, t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} N_k(t) P_k^{(-\alpha, -\beta)}(x), \qquad N_k(t) = \frac{1}{h_k^{(-\alpha, -\beta)}} \int_{-1}^{1} k(x, t) \frac{P^{(-\alpha, -\beta)}(x)}{w(x)} dx$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Из (3.13) получим

$$c_{ik} = \frac{(-1)^{\lambda+\varkappa} 2^{\varkappa}}{h_i^{(-\alpha, -\beta)}} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} k(x, t) \frac{P_i^{(-\alpha, -\beta)}(x)}{w(x)} P_{k+\varkappa}^{(\alpha, \beta)}(t) w(t) \, dx \, dt \tag{5.1}$$

$$b_i = \frac{1}{h_i^{(-\alpha, -\beta)}} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} k(x, t) \frac{P_i^{(-\alpha, -\beta)}(x)}{w(x)} Rf(t) w(t) \, dx \, dt \quad (i, k = -\varkappa, -\varkappa+1, \ldots, n)$$

Если a — вещественное число, b — чисто мнимое, то в (1.3) имеем $\rho = 1$, следовательно, α, β вещественны и $w(x)$ неотрицательна. В этом случае все корни многочленов $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, $P_n^{(-\alpha,-\beta)}(x)$ вещественные, простые и лежат на интервале $(-1, +1)$, и при вычислении интегралов (5.1) можно воспользоваться формулой Гаусса—Якоби [6].

Автор благодарит Г. Н. Пыхтеева за обсуждение настоящей работы.

Поступила 3 V 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер Н. И. О некоторых формулах обращения сингулярных интегралов. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1945, т. 9, № 4.
2. Иванов В. В. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений в случае разомкнутых контуров интегрирования. Докл. АН СССР, 1956, т. 111, № 5.
3. Каландия А. И. О приближенном решении одного класса сингулярных интегральных уравнений. Докл. АН СССР, 1959, т. 125, № 4.
4. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз, 1962.
5. Erdélyi A. ed. Higher. Transcendental functions, vol. 2, McGraw-Hill, 1953.
6. Сегё Г. Ортогональные многочлены. Физметгиз, 1962.

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОГО ПРЯМОУГОЛЬНИКА

П. О. Галфаян, К. С. Чобанян

(Ереван)

Плоская контактная задача теории упругости для полуплоскости, полосы и четверти плоскости была рассмотрена в работах [1-9] и др.

В настоящей работе решение одной контактной задачи для упругого прямоугольника сводится к квазивполне регулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений с ограниченными свободными членами.

Теория бесконечных систем линейных алгебраических уравнений успешно применялась к решению задач теории упругости в работах Б. М. Кояловича [10], Л. В. Канторовича [11], Н. Х. Арутюняна [12] и др.

1. Рассмотрим плоскую задачу теории упругости для прямоугольника (фиг. 1) при симметричных граничных условиях, когда на части продольных сторон прямоугольника $(-2a - l \leqslant x \leqslant -2a,\ 0 \leqslant x \leqslant l)$ задана внешняя нагрузка, а на остальной части тех же сторон (т. е. под штампом) заданы нормальные перемещения и касательные напряжения. На сторонах же $x = -2a - l$ и $x = l$ заданы касательные напряжения и нормальные перемещения. В частном случае, когда эти напряжения и деформации на поперечных сторонах и касательные напряжения на продольных сторонах прямоугольника равны нулю, имеем периодическую контактную задачу для полосы.

Решение рассматриваемой задачи ищем при помощи функции напряжений Эри, которая в случае отсутствия массовых сил удовлетворяет бигармоническому уравнению внутри прямоугольника $-(2a + l) \leqslant x \leqslant l,\ -h \leqslant y \leqslant h$.