ПЛОСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С УЧЕТОМ СИЛ СЦЕПЛЕНИЯ ИЛИ ТРЕНИЯ

Г. Я. Попов

(Одесса)

В отличие от результатов работ [1-3], изложенные построения основаны на одном свойстве многочленов Якоби частного вида, доказательство которого дается в § 1. В § 2 рассматривается контактная задача для полуплоскости при наличии сил трения или сцепления в зоне контакта с учетом тепловых напряжений. В § 3 указываются формулы для вычисления поля напряжений в полуплоскости при вдавливании в нее сцепленного штампа. В § 4 рассматривается плоская контактная задача с учетом сил сцепления или трения применительно к упругому основанию общего типа. Все перечисленные контактные задачи решаются применительно к случаю одного участка контакта, и всюду имеется в виду плоская деформация.

§ 1. В этом параграфе докажем важное для всего дальнейшего соотношение (1.1)

$$\int_{-1}^{1}\left[\frac{\operatorname{sgn}(\xi-\tau)}{2}+\frac{\operatorname{ctg}\pi\gamma}{\pi}\ln\frac{1}{|\xi-\tau|}\right]\frac{P_m^{\gamma}(\tau)}{\varphi_\gamma(\tau)}\,d\tau=\mu_m P_m^{-\gamma}(\xi)\qquad\left(\begin{matrix}|\xi|\leqslant 1,\ |\operatorname{Re}\gamma|<{}^1\!/_2\\ m=0,1,2,\ldots\end{matrix}\right)$$

где

$$2\mu_0=\pi\sec\pi\gamma-2\csc\pi\gamma\,[\ln 2+\psi(0.5+\gamma)-\psi(1)],\qquad \mu_m=(m\sin\pi\gamma)^{-1}$$

$$(m=1,2\ldots)\tag{1.2}$$

$$P_m^{\gamma}(x)=P_m^{\gamma-1/2,\,-\gamma-1/2}(x),\qquad \varphi_\gamma(x)=(1-x)^{-\gamma+1/2}(1+x)^{\gamma+1/2}$$

Здесь $P_m^{\alpha,\beta}(x)$ — многочлен Якоби, $\psi(x)$ — пси-функция Эйлера [4]. Соотношение (1.1) при $m=0$ доказано в работе [5]. Остается рассмотреть случай $m\geqslant 1$. С этой целью займемся вычислением интеграла

$$L(z)=\int_{-1}^{1}\ln(z-t)\,\frac{P_m^{\alpha,\beta}(t)\,dt}{(1-t)^{-\alpha}(1+t)^{-\beta}}\qquad[\operatorname{Re}(\alpha,\beta)>-1,\ z\,\overline{\in}\,(-1,1)]\tag{1.3}$$

Воспользовавшись формулой [4]

$$P_m^{\alpha,\beta}(t)=\frac{(-1)^m}{2^m m!}(1-t)^{-\alpha}(1+t)^{-\beta}\frac{d^m}{dt^m}[(1-t)^{\alpha+m}(1+t)^{\beta+m}]\tag{1.4}$$

и проведя интегрирование по частям, будем иметь

$$L(z)=-\frac{1}{2^m m}\int_{-1}^{1}\frac{(1-t)^{\alpha+m}(1+t)^{\beta+m}}{(z-t)^m}\,dt$$

Разложив знаменатель в подынтегральном выражении в ряд по возрастающим степеням $(1-t)$ и проведя почленное интегрирование, получим

$$L(z)=\frac{(-1)^{m+1}2^{1+\alpha+\beta+m}\,\Gamma(1+\alpha+m)\,\Gamma(1+\beta+m)}{m(1-z)^m\,\Gamma(2+\alpha+\beta+2m)}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}m,1+\alpha+m;\\ \alpha+\beta+2m+2;\end{matrix}\ \frac{2}{1-z}\right)\tag{1.5}$$

Будем теперь устремлять z к отрезку вещественной оси $(-1, 1)$, приняв при этом

$$\begin{aligned} &\ln(z-s) \to \ln|x-s|, \qquad z \to x \pm i0,\ x > s \\ &\ln(z-s) \to \ln|x-s| \pm i\pi \qquad z \to x \pm i0,\ x < s \end{aligned} \tag{1.6}$$

Кроме того, следует учесть, что гипергеометрическая функция, фигурирующая в (1.5), многозначна. Чтобы выделить однозначную ветвь, следует провести разрез по отрезку $(-1, 1)$ вещественной оси. Значения же ее на берегах проведенного разреза легко найти, если воспользоваться формулой ([6], стр. 111).

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} m, 1+\alpha+m; \\ \alpha+\beta+2m+2; \end{matrix} \frac{2}{1-(x\pm i0)}\right) = \tag{1.7}$$

$$= \left(\frac{1-x}{2}\right)^m \left\{\frac{(\alpha+\beta+m+2)_m}{(1+\alpha)_m(-1)^m}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} m, -1-\alpha-\beta-m; \\ -\alpha; \end{matrix} \frac{1-x}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2m+2)\,\Gamma(-1-\alpha)}{\Gamma(m)\,\Gamma(1+\beta+m)(-1)^m}\left(e^{\mp i\pi}\frac{2}{1-x}\right)^{-1-\alpha} {}_2F_1\left(\begin{matrix} -\beta-m, 1+\alpha+m; \\ 2+\alpha; \end{matrix} \frac{1-x}{2}\right)\right.$$

Формулу (1.3) можем записать в виде

$$L(z) = \left(\int_{-1}^{x} + \int_{x}^{1}\right) \ln(z-t)(1-t)^\alpha (1+t)^\beta P_m^{\alpha,\beta}(t)\, dt \tag{1.8}$$

Отправляясь от (1.8) и принимая во внимание (1.6), нетрудно подсчитать

$$\frac{1}{2}[L(x+i0) + L(x-i0)] = \int_{-1}^{1} \ln|x-t|(1-t)^\alpha(1+t)^\beta P_m^{\alpha,\beta}(t)\, dt$$

С другой стороны, если исходить из (1.5) и воспользоваться (1.7), то будем иметь

$$\frac{1}{2}[L(x+i0) + L(x-i0)] =$$

$$= \frac{\Gamma(-1-\alpha)\,\Gamma(1+\alpha+m)\cos\pi\alpha}{2^{-\beta}\, m!\,(1-x)^{-1-\alpha}}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} \beta-m, 1+\alpha+m; \\ 2+\alpha; \end{matrix} \frac{1-x}{2}\right) -$$

$$- \frac{2^{1+\alpha+\beta}\,\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+\beta+m)}{m\Gamma(a+\beta+m+2)}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} m, -1-\alpha-\beta-m; \\ -\alpha; \end{matrix} \frac{1-x}{2}\right)$$

Таким образом, имеем

$$\int_{-1}^{1} \ln|x-t|(1-t)^\alpha(1+t)^\beta P_m^{\alpha,\beta}(t)\, dt =$$

$$= -\frac{2^{1+\alpha+\beta}\,\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+\beta+m)}{m\Gamma(\alpha+\beta+m+2)}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} m, -1-\alpha-\beta-m; \\ -\alpha; \end{matrix} \frac{1-x}{2}\right) +$$

$$+ \frac{\Gamma(1+\alpha+m)\operatorname{ctg}\pi\alpha}{2^{-\beta}\, m!\,(1-x)^{-1-\alpha}}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} \beta-m, 1+\alpha+m; \\ 2+\alpha; \end{matrix} \frac{1-x}{2}\right)\frac{\pi}{\Gamma(2+\alpha)} \tag{1.9}$$

Принимая во внимание (1.4), нетрудно убедиться, что

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{2} \operatorname{sign}(x-t)\,(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta} P_m^{\alpha,\beta}(t)\,dt =$$
$$= -(2m)^{-1}(1-x)^{1+\alpha}(1+x)^{1+\beta} P_{m-1}^{\alpha+1,\,\beta+1}(x)$$

Если же учесть, что [4]

$$n!\,P_n^{\alpha,\beta}(x) = (1+\alpha)_n\, {}_2F_1(1+\alpha+\beta+n,\ -n;\ 1+\alpha;\ {}^1/_2(1-x)) \quad (1.10)$$
$${}_2F_1(\alpha,\beta;\ \gamma;\ z) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}\, {}_2F_1(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta;\ \gamma;\ z)$$

то будем иметь

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{2} \operatorname{sign}(x-t)\, \frac{P_m^{\alpha,\beta}(t)\,dt}{(1-t)^{-\alpha}(1+t)^{-\beta}} =$$
$$= -\frac{2^{\beta}\,\Gamma(1+\alpha+m)}{m!\,\Gamma(2+\alpha)}(1-x)^{1+\alpha}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix}-\beta-m;\ 1+\alpha+m; \\ 2+\alpha;\end{matrix}\ \frac{1-x}{2}\right)$$

Наконец, прибавляя сюда соотношение (1.9), умноженное на $\pi^{-1}\operatorname{tg}\pi\alpha$, обнаружим

$$\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}\operatorname{sign}(x-t) - \frac{\operatorname{tg}\pi\alpha}{\pi}\ln\frac{1}{|x-t|}\right]\frac{P_m^{\alpha,\beta}(t)\,dt}{(1-t)^{-\alpha}(1+t)^{-\beta}} =$$
$$= -\frac{\operatorname{tg}\pi\alpha\,\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+\beta+m)}{2^{-1-\alpha-\beta}\pi m\Gamma(\alpha+\beta+m+2)}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix}m,\ -1-\alpha-\beta-m; \\ -\alpha\end{matrix}\ \frac{1-x}{2}\right)$$

Полагая здесь $\alpha = \gamma - {}^1/_2$, $\beta = -\gamma - {}^1/_2$ и учитывая (1.10), получим соотношение (1.1).

§ 2. Если на границе упругой полуплоскости ($-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$), находящейся в условиях стационарного температурного поля, заданы поверхностные напряжения ($p(x)$ — нормальное, $q(x)$ — касательное) и температура $t(x, 0) = g_1(x)$, исчезающие на бесконечности, то средствами операционного исчисления [7] можно получить следующие формулы для вертикальных (параллельных оси y) $u_1(x)$ и горизонтальных $u_2(x)$ смещений граничных ($y = 0$) точек полуплоскости: (2.1)

$$u_j(x) + C_j = \theta_2\left[\sum_{k=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty} K_{jk}(x-s)\,p_k(s)\,ds + \frac{\delta_{j2}\sigma}{1-2\nu}\int_{-\infty}^{\infty} K_{1j}(x-s)\,g_1(s)\,ds\right]$$
$$(j = 1, 2)$$

$$p_1 = p - \sigma g_1, \quad p_2 = q; \qquad \theta_1\sigma = (1+\nu)\,\alpha, \qquad E\theta_1 = 2(1-\nu^2)$$
$$E\theta_2 = (1+\nu)(1-2\nu)$$
$$K_{11} = K_{22} = -\frac{\varkappa\ln|x|}{\pi}, \qquad K_{12} = -K_{21}(x) = \frac{\operatorname{sgn} x}{2}, \qquad \varkappa = \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$$

Здесь δ_{jk} — символ Кронекера; E, ν, α — модуль упругости, коэффициент Пуассона, коэффициент линейного расширения; C_1, C_2 — произвольные постоянные. Располагая формулами (2.1), нетрудно сформулировать ряд контактных задач с учетом тепловых напряжений.

Пусть, например, имеем штамп с плоским прямолинейным основанием (длиной $2a$), который сцеплен с упругой полуплоскостью и подвергнут воздействию произвольной системы сил. При этом будем считать, что температура основания штампа описывается функцией $g_1(x)$, $-a \leqslant x \leqslant a$. На части же границы полуплоскости, не вступившей в контакт $t(x, 0) = g_2(x)$, $|x| > a$. Контакт штампа с полуплоскостью будем считать совершенным [7] и полагать $t(x, 0) = g_1(x)$, $|x| \leqslant a$. Тогда, в соответствии с (2.1), контактные напряжения $p(x)$ и $q(x)$ должны удовлетворять системе интегральных уравнений

$$\sum_{k=1}^{2} \int_{-a}^{a} K_{jk}(x-s)\, p_k(s)\, ds = \sigma\left[\delta_{j1} \int_{l} K_{j1}(x-s)\, g_2(s)\, ds + \right.$$

$$\left. + \frac{\delta_{j2}}{1-2\nu} \int_{-a}^{a} K_{j1}(x-s)\, g_1(s)\, ds + \delta_{j1}\theta_2^{-1}\Theta x + C_j \right] \qquad (j = 1, 2, \ -a < x < a)$$

Здесь Θ — угол наклона штампа, l — вещественная ось с выброшенным интервалом $(-a, a)$, C_j — произвольные постоянные, не равные таковым из формулы (2.1). Сделав замену $x = a\xi$, $s = a\tau$, умножим первое из полученных уравнений ($j = 1$) на i и вычтем из него второе ($j = 2$). В результате придем к одному интегральному уравнению

$$\int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{2}\operatorname{sign}(\xi-\tau) + \frac{\operatorname{ctg}\pi\gamma}{\pi} \ln\frac{1}{|\xi-\tau|}\right] \chi(\tau)\, d\tau = f(\xi) \qquad (-1 < \xi < 1) \tag{2.2}$$

для функции

$$\chi(\xi) = ap(a\xi) - \sigma a g_1(a\xi) + iaq(a\xi) \tag{2.3}$$

Здесь принято

$$i\varkappa = \operatorname{ctg}\pi\gamma; \ \gamma = -i\mu, \ 2\pi\mu = \ln\{[(\varkappa+1)/(\varkappa-1)] = 3-4\nu\} \operatorname{cth}\pi\mu = \varkappa \tag{2.4}$$

Правая часть в (2.4) имеет вид

$$f(\xi) = \sigma\left[\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{sign}(\xi-\tau)}{2(1-2\nu)}\, a g_1(a\tau)\, d\tau + \frac{i\varkappa\sigma}{\pi}\int_{l'} \ln\frac{1}{|\xi-\tau|}\, a g_2(a\tau)\, d\tau\right] +$$

$$+ iC_1 - C_2 + i\omega\xi \qquad (-1 \leqslant \xi \leqslant 1, \quad \omega = a\Theta\theta_2^{-1}) \tag{2.5}$$

где l' означает вещественную ось с выброшенным интервалом $(-1, 1)$.

Если же по контакту штампа с полуплоскостью вместо сил сцепления возникают силы кулоновского трения, причем имеет место предельное состояние [1, 2, 3], т. е. $q(x) = kp(x)$, то, отправляясь от первой ($j = 1$) формулы из (2.1), сведем и эту задачу к уравнению (2.2). При этом, в отличие от предыдущего случая, будем иметь

$$\chi(\xi) = ap(a\xi) - \sigma a q_1(a\xi), \qquad \pi\gamma = \operatorname{arc\,ctg}(\varkappa/k), \qquad k\omega^* = \omega$$

$$f(\xi) = \sigma\left[\frac{\varkappa}{k\pi}\int_{l'} \ln\frac{1}{|\xi-\tau|}\, a g_2(a\tau)\, d\tau - \int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{sign}(\xi-\tau)}{2}\, a g_1(a\tau)\, d\tau\right] + \omega^*\xi + C_1 \tag{2.6}$$

В настоящее время известны два способа точного решения уравнения (2.2). Первый заключается в том, что путем формального дифференцирования обеих частей уравнения переходят к простому сингулярному интегральному уравнению, разрешимому в явном виде. Такой способ был применен [1] И. Я. Штаерманом [2].

Другой способ решения уравнения (2.2) принадлежит М. Г. Крейну. Для получения решения этим способом следует уравнение (2.2) привести к интервалу $(-a, a)$, воспользоваться формулой для его решения, соответствующего правой части, тождественно равной единице (формулы (3.4) и (3.5) работы [5]) и, наконец, применить результат М. Г. Крейна [8]. Обоими способами решение дается в виде квадратур, использование которых для сложных правых частей затруднительно, поскольку в первом способе решение представлено в виде интеграла в смысле главного значения, а во втором, хотя таковые отсутствуют, приходится пользоваться двукратным интегралом довольно сложной структуры.

Полученное в предыдущем параграфе соотношение позволяет указать еще один способ решения интегрального уравнения (2.2), которым и будем пользоваться в настоящей работе.

Чтобы получить решение интегрального уравнения (2.2) по этому способу, в общем случае следует разложить правую часть в ряд

$$f(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m P_m^{-\gamma}(\xi) \tag{2.7}$$

Тогда, в соответствии с (1.1), решение будет иметь вид

$$\chi(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{\mu_m} \frac{P_m^{\gamma}(\xi)}{\varphi_\gamma(\xi)}$$

Во многих задачах правая часть представляет собой многочлен, либо хорошо аппроксимируется многочленом. В этих случаях следует знать решение $\chi_n(\xi)$ уравнения (2.2) с правой частью

$$f(\xi) = \xi^n = \sum_{m=0}^{n} C_m^n(-\gamma) P_m^{-\gamma}(\xi) \tag{2.8}$$

где

$$C_m^n(\gamma) = \frac{1}{\lambda_m} \int_{-1}^{1} \frac{\xi^n P_m^{\gamma}(\xi)}{\varphi_\gamma(\xi)} d\xi = \frac{1}{\lambda_m} \sum_{0=m}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} b_j^m(\gamma) \tag{2.9}$$

---

[1] Очевидно, к интегральному уравнению (2.2) приводятся соответствующие задачи без учета тепловых напряжений. Решая плоскую контактную задачу теории упругости с учетом сил трения, И. Я. Штаерман [2] пришел к уравнению, несколько отличному по структуре от (2.2). Однако за счет аддитивной постоянной его уравнение можно преобразовать к (2.2), но при этом нельзя будет добиться совпадения коэффициента при логарифме. Подобное нарушение эквивалентности произошло за счет того, что И. Я. Штаерман при выводе своего уравнения отбросил (это было замечено Я. Л. Нудельманом в 1955 г.) второй член в выражении $\tau_{xy} = G(\partial v / \partial x + \partial u / \partial y)$. Для того чтобы окончательные результаты И. Я. Штаермана были верными (и совпадали с формулами Н. И. Мусхелишвили [1]), необходимо фигурирующий в его формулах коэффициент ν вычислять по формуле

$$\nu = (\theta_1^{(1)} + \theta_1^{(2)})k^{-1}(\theta_2^{(1)} + \theta_2^{(2)}),\quad \theta_1^{(j)} = 2(1-\nu_j^2)(\pi E_j)^{-1},\quad \theta_2^{(j)} = E_j^{-1}(1+\nu_j)(1-2\nu_j) \qquad (j=1,\ 2)$$

где k — коэффициент трения, ν_j, E_j — соответственно коэффициент Пуассона и модуль упругости для первого ($j = 1$) и второго ($j = 2$) тела.

$$\lambda_m = \int_{-1}^{1} \frac{[P_m^{\gamma}(\xi)]^2}{\varphi_\gamma(\xi)}\, d\xi = \begin{cases} \pi \sec \pi\gamma, & m = 0 \\ (m!^2 2)^{-1}\Gamma(m+\gamma+{}^1/_2)\,\Gamma(m-\gamma+{}^1/_2), & m = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{2.10}$$

$$b_j^m(\gamma) = \int_{-1}^{1} \frac{P_m^{\gamma}(\xi)(1-\xi)^j\, d\xi}{\varphi_\gamma(\xi)} = \begin{cases} 0, & j < m \\ \dfrac{2^j j!\,\Gamma(m-\gamma+{}^1/_2)\,\Gamma(j+\gamma+{}^1/_2)}{(-1)^m m!\,(j-m)!\,(j+m)!}, & j \geqslant m \end{cases} \tag{2.11}$$

Здесь использованы формулы 7.391 из [4]. В соответствии с (1.1), будем иметь

$$\chi_n(\xi) = \sum_{m=0}^{n} \frac{C_m^{\,n}(-\gamma)}{\mu_m}\, \frac{P_m^{\gamma}(\xi)}{\varphi_\gamma(\xi)} \tag{2.12}$$

Проиллюстрируем применение полученных формул к следующей задаче. Пусть в упругую полуплоскость под действием произвольной системы сил (P, Q — вертикальная и горизонтальная составляющие главного вектора, M — главный момент) вдавливается штамп с плоским основанием шириной $2a$. Штамп сцеплен с основанием. Будем считать, что граница полуплоскости, не занятая штампом, поддерживается при нулевой температуре. Функцию, описывающую температуру основания штампа, будем аппроксимировать многочленом, т. е.

$$g_1(x) = \sum_{j=0}^{n-1} A_j^* x^j \qquad (g_2(x) \equiv 0) \tag{2.13}$$

В этом случае, в соответствии с (2.5), правая часть уравнения (2.2) приобретает вид

$$f(\xi) = iC_1 - C_2 + i\omega\xi + \frac{\sigma}{1-2\nu} \sum_{j=1}^{n} \frac{A_{j-1}^* a^j}{j}\, \xi^j \tag{2.14}$$

Используя формулу (2.12), легко найдем решение уравнения (2.2), соответствующее правой части (2.13)

$$\chi(\xi) = \frac{C + 2i\omega \sin \pi\gamma P_1^{\gamma}(\xi)}{\varphi_\gamma(\xi)} + \sum_{m=1}^{n} \frac{\sigma m A_m^{\,n} P_m^{\gamma}(\xi)}{(1-2\nu)\operatorname{cosec} \pi\gamma\varphi_\gamma(\xi)}$$

$$A_m^{\,n} = \sum_{j=m}^{n} \frac{A_{j-1}^* C_m^{\,j}(-\gamma)}{j a^{-j}} \tag{2.15}$$

где C — произвольная постоянная, которая будет определена ниже.

Условия равновесия штампа с учетом (2.3) можно записать в виде

$$\begin{gathered} P + iQ - \sigma \sum_{j=1}^{n} A_{j-1}^* \frac{1-(-1)^j}{j} a^j = \int_{-1}^{1} \chi(\xi)\, d\xi \\ \frac{M}{a} - \sigma \sum_{j=1}^{n} A_{j-1}^* \frac{1+(-1)^j}{j+1} a^j = \operatorname{Re} \int_{-0}^{1} \chi(\xi)\, \xi d\xi \end{gathered} \tag{2.16}$$

Подставив (2.15) под знак интеграла первой формулы (2.16) и проведя интегрирование с использованием ортогональности многочленов Якоби и

(2.10), (2.4), найдем

$$C = \frac{\operatorname{ch}\pi\mu}{\pi}\left(P + iQ - 2\sigma\sum_{j=1}^{(n+1)}\frac{a^{2j-1}A_{2j-2}^{*}}{2j-1}\right) \tag{2.17}$$

Под (n) здесь и всюду в дальнейшем будем понимать целое число $^1/_2 n$ или ближайшее меньшее к нему. При использовании второго условия равновесия потребуется отделять вещественную часть интеграла от $\chi(\xi)$. В связи с этим заметим, что числа, определяемые формулой (2.10), являются вещественными и при $\gamma = -i\mu$ ($\operatorname{Im}\mu = 0$). Из интегрального представления (2.9) для коэффициентов $C_m^n(\gamma)$ путем замены переменной интегрирования ξ на $-\xi$ с использованием известного ([4], стр. 1049) соотношения

$$P_n^{\alpha,\beta}(-x) = (-1)^n P_n^{\beta,\alpha}(x) \tag{2.18}$$

можно установить, что

$$C_m^n(\gamma) = (-1)^{n+m}\overline{C_m^n(\gamma)} \qquad (\operatorname{Re}\gamma = 0,\ C_m^m = m!\,2\,[(2m-1)!!]^{-1},\ m \geqslant 1,\ C_0^0 = 1)$$

Черта означает комплексно-сопряженное число. Формула в скобках следует из второго равенства формулы (2.9). На основании второй формулы (2.15) имеем

$$A_{2k}^{n} = \sum_{j=k}^{(n)} C_{2k}^{2j} a^{2j}\frac{A_{2j}^{*}-1}{2j} + i\sum_{j=k}^{(n-1)} C_{2k}^{[2j+1]} a^{2j+1}\frac{A_{2j}^{*}}{2j+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2.19}$$

$$A_{2k-1}^{n} = \sum_{j=k}^{(n+1)} C_{2k-1}^{2j-1} a^{2j-1}\frac{A_{2j-2}^{*}}{2j-1} + i\sum_{j=k}^{(n)} C_{2k-1}^{[2j]} a_{2j}\frac{A_{2j-1}^{*}}{2j}$$

Здесь принято

$$C_m^{[n]} = -iC_m^n$$

Подставим (2.15) под знак интеграла второй формулы (2.16) и выполним интегрирование с учетом (2.9), после чего отделим вещественную часть при помощи (2.19). В результате получим формулу

$$\omega = \frac{\varkappa}{2\pi(0.25+\mu^2)}\left\{\frac{M}{a} + 2\mu Q - \sigma\sum_{j=1}^{(n)}\frac{A_{2j-1}}{a^{-2j}}\left[\frac{2}{2j+1} + \frac{\pi(0.25+\mu^2)C_1^{[2j]}}{\varkappa(1-2\nu)2j}\right]\right\} = \frac{\Theta a}{\theta_2} \tag{2.20}$$

позволяющую определить угол поворота штампа Θ.

Формулы (2.3), (2.15), (2.17) и (2.20) полностью решают задачу. Для отделения вещественной части от мнимой в формуле (2.15) следует иметь в виду, что при $\gamma = -i\mu$ ($\operatorname{Im}\mu = 0$) на основании (1.4)

$$\frac{P_m^{\gamma}(\xi)}{\varphi_\gamma(\xi)} = \frac{(-1)^m}{2^m m!}\left\{\frac{d^m}{d\xi^m}\left[(1-\xi^2)^{m-1/2}\cos\mu\ln\frac{1+\xi}{1-\xi}\right] + i\frac{d^m}{d\xi^m}\left[(1-\xi^2)^{m-1/2}\sin\mu\ln\frac{1+\xi}{1-\xi}\right]\right\} \tag{2.21}$$

Пусть теперь температура основания штампа постоянна, т. е.

$$g_1(x) = t_0 \qquad (A_0^* = t_0,\ A_j^* = 0,\ j = 1, 2\ldots) \tag{2.22}$$

В этом частном случае на основании формул (2.3), (2.15), (2.17) и (2.20) для нормального контактного напряжения будем иметь формулу

$$p(x) = \sigma t_0 + \frac{\varkappa(\varkappa^2-1)^{-1/2}}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}\left\{\left[P + \frac{2\mu Q + a^{-1}M}{2(0.25+\mu^2)}\frac{x}{a} - 2a\sigma t_0\left(1 + \frac{\mu\pi}{\varkappa(1-2\nu)}\right)\right]\times\right.$$
$$\left.\times \cos\mu\ln\frac{a+x}{a-x} + \left[\frac{(\mu^2-0.25)Q + \mu a^{-1}M}{\mu^2+0.25} + \frac{x\sigma\pi t_0}{(1-2\nu)\varkappa}\right]\sin\mu\ln\frac{a+x}{a-x}\right\}$$

Для касательного контактного напряжения формула будет аналогичной структуры (без первого члена). В целях экономии места ее не приводим. Для угла поворота штампа имеем формулу (2.20), в которой следует удалить член, содержащий сумму. При $t_0 = M = Q = 0$ из последней формулы получаем формулу Н. И. Мусхелишвили [1], стр. 433), если предварительно ее разделить на 2 (опечатка).

Рассмотрим теперь случай (2.13), но при условии, что вместо сил сцепления имеют место силы трения. В этом случае правая часть интегрального уравнения (2.2), согласно (2.6), приобретает вид

$$f(\xi) = C_1 + \omega^*\xi - \sigma\sum_{j=1}^{n}\frac{\overset{*}{A}_{j-1}}{j}a^j\xi^j$$

Использование формулы (2.12) позволяет в этом случае получить решение уравнения (2.2) в виде

$$\chi(\xi) = \frac{C + 2\omega^*\sin\pi\gamma P_1^{\gamma}(\xi)}{\varphi_\gamma(\xi)} - \sigma\sum_{m=1}^{n}\frac{mA_m^{\,n}\sin\pi\gamma}{\varphi_\gamma(\xi)}P_m^{\gamma}(\xi) \qquad (2.23)$$

Здесь $A_m^{\,n}$ определяется второй формулой из (2.15), а γ — соответствующей формулой из (2.6) .

Из условий равновесия штампа, так же как и в случае сил сцепления, найдем

$$\omega^* = \frac{\operatorname{ctg}\pi\gamma}{2\pi(0.25-\gamma^2)}\left[\frac{M}{a} + \frac{2\pi\gamma C}{\cos\pi\gamma} - 2\sigma\sum_{j=1}^{(n)}\frac{\overset{*}{A}_{2j-1}a^{2j}}{2j+1}\right] + \frac{\sigma}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\overset{*}{A}_{j-1}}{ja^{-j}}C_1^{\,j}(-\gamma)$$

$$C = \frac{\cos\pi\gamma}{\pi}\left[P - 2\sigma\sum_{j=1}^{(n+1)}\frac{\overset{*}{A}_{2j-2}}{j}a^{2j-1}\right] \qquad (2.24)$$

Формулы (2.6), (2.23) и (2.24) решают рассматриваемую контактную задачу с учетом сил трения применительно к случаю (2.13). В частном случае, когда температура штампа постоянна, т. е. имеет место (2.22), формулы для нормального контактного напряжения и угла поворота штампа приобретают вид

$$p(x) = \frac{\cos\pi\gamma\,(a^2-x^2)^{\gamma-1/2}}{\pi(0.25-\gamma^2)(a^2+x^2)^{\gamma+1/2}}\left[(P - 2a\sigma t_0)\left(0.25 + \gamma^2 + \frac{\gamma x}{a}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{M}{a}\left(\gamma + \frac{x}{2a}\right) - a\pi\sigma t_0\sec\pi\gamma\,(1-\sin\pi\gamma)(0.25-\gamma^2)(2\gamma + a^{-1}x)\right] + \sigma t_0$$

$$\omega^* = \frac{a\Theta}{k\theta_2} = \frac{\operatorname{ctg}\pi\gamma}{2\pi(0.25-\gamma^2)}\left[\frac{M}{a} + 2\gamma P - 4a\gamma\sigma t_0\right] + \sigma t_0$$

При $t_0 = 0$ получаем формулы Н. И. Мусхелишвили ([1], стр. 452).

§ 3. Полученные в предыдущем параграфе решения контактных задач в форме рядов по многочленам Якоби удобны для вычисления поля напряжений и смещений внутри полуплоскости. Для иллюстрации этого ограничимся чисто упругими задачами (без тепловых напряжений).

В общем случае задачи с учетом сил сцепления контактные напряжения $p(x)$ и $q(x)$ в соответствии с изложенным в предыдущих параграфах, будут определяться формулой

$$\chi(\xi) = ap(a\xi) + iaq(a\xi) = \sum_m \frac{A_m}{\mu_m}\chi_m^*(\xi), \qquad \chi_m^*(\xi) = \frac{P_m^{\gamma}(\xi)}{\varphi_\gamma(\xi)} \tag{3.1}$$

Согласно [1], поле напряжений в полуплоскости можно найти, опираясь на соотношение

$$\sigma_x + \sigma_y = 2\,[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \quad \sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) - \Phi(\bar z) + (z - \bar z)\overline{\Phi'(z)} \tag{3.2}$$

где, применительно к рассматриваемому случаю,

$$\Phi(z) = \frac{1}{a}\Psi\left(\frac{z}{a}\right), \qquad \Psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{\chi(\xi)\,d\xi}{\xi - \zeta} \tag{3.3}$$

На основании (3.1) можем записать

$$\Psi(\zeta) = \sum_m \frac{A_m}{\mu_m}\Psi_m(\zeta), \qquad \Psi_m(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{P_m^{\gamma}(\xi)}{\varphi_\gamma(\xi)}\frac{d\xi}{\xi - \zeta} \tag{3.4}$$

Но последний интеграл представляет собой с точностью до множителя функцию Якоби второго рода, выражаемую через гипергеометрическую функцию Гаусса ([9], стр. 86), т. е.

$$\Psi_m(\zeta) = \frac{2^{m-1}\Gamma(m+\gamma+1/2)\,\Gamma(m-\gamma+1/2)\,i}{(2m)!\,\pi\,(\zeta-1)^{m+1}}\;{}_2F_1\left(\begin{matrix} m+\gamma+1/2, & m+1; \\ 2m+1; & \end{matrix}\;\frac{2}{1-\zeta}\right) \tag{3.5}$$

Далее, на основании формулы 9.132 (1) из [4] имеем

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(\begin{matrix} m+\gamma+1/2, m+1; \\ 2m+1; \end{matrix}\;\frac{2}{1-\gamma}\right) &= \frac{(2m)!\,(m!)^{-1}}{(-\gamma+1/2)_m}\left(\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right)^{m+\gamma+1/2}{}_2F_1\left(\begin{matrix} m, & m+\gamma+1/2; \\ & \gamma+1/2; \end{matrix}\;\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right) + \\ &+ \frac{(2m)!}{(m-1)!(\gamma-1/2)_{m+1}}\,\frac{(\zeta-1)^{m+1}}{(\zeta+1)^{m+1}}\;{}_2F_1\left(\begin{matrix} m+1, & m-\gamma+1/2; \\ & -\gamma+3/2; \end{matrix}\;\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right) \end{aligned} \tag{3.6}$$

Дальнейшее упрощение основано на соотношении

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, & b+m; \\ & b;\; x \end{matrix}\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(a)_j(b+m)_j}{j!\,(b)_j}x^j = \frac{m!}{(1-x)^a}\sum_{k=0}^{m}\frac{(a)_k x^k(1-x)^{-k}}{k!\,(m-k)!\,(b)_k} \tag{3.7}$$

Чтобы убедиться в справедливости второго равенства, следует под знак бесконечной суммы подставить выражение ([6], стр. 7)

$$\frac{(b+m)_j}{(b)_j} = \sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}\frac{(m+1-k)_k}{(b)_k} = m!\sum_{k=0}^{\infty}\frac{j!}{\Gamma(j-k+1)\,\Gamma(m-k+1)\,k!\,(b)_k}$$

и изменить порядок суммирования.

В результате использования (3.7) для преобразования правой части (3.6) вместо (3.5) будем иметь

$$\begin{aligned} \Psi_m(\zeta) &= \frac{i\Gamma(m+\gamma+1/2)}{2\pi\varphi_\gamma(\zeta)}\sum_{k=0}^{m}\frac{(m)_k\,\Gamma(-\gamma+1/2)\,(\zeta-1)^k}{k!\,(m-k)!\,(\gamma+1/2)_k\,2^k} - \\ &- \frac{\Gamma(\gamma-1/2)}{4\pi i}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(m+1)_k\,\Gamma(m-\gamma+1/2)\,(\zeta-1)^k}{k!\,(m-1-k)!\,(-\gamma+3/2)_k\,2^k} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Здесь при $m = 0$ вторую сумму следует удалить. Итак, последняя формула в сочетании с (3.2) — (3.4) определяет в элементарных функциях поле напряжений в полуплоскости в случае контактной задачи с учетом сил сцепления. При этом параметр γ определяется формулой (2.4).

В случае контактной задачи с учетом сил трения в общем случае имеем

$$ap(a\xi) = \sum_m \frac{A_m}{\mu_m} \frac{P_m^{\gamma}(\xi)}{\varphi_\gamma(\xi)}, \qquad q(x) = kp(x)$$

Поле напряжений будет определяться соотношениями (3.2) и (3.3), причем

$$\Psi(\zeta) = (1 + ik) \sum_m \frac{A_m}{\mu_m} \Psi_m(\zeta)$$

где для $\Psi_m(\zeta)$ справедлива формула (3.8), а для параметра γ—вторая формула (2.6).

Из формулы (3.8) при $\gamma = 0$ вытекает решение контактной задачи без учета касательных контактных напряжений.

§ 4. Рассмотрим упругое основание общего типа. Как и в [5], будем считать, что функции влияния определяются формулами

$$v_m^*(x) = \theta_1 v_m\left(\frac{x}{h}\right) \quad (m = 0, 2), \qquad v_1^*(x) = \theta_2 v_1\left(\frac{x}{h}\right)$$

$$v_{0,2}(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\psi_{0,2}(t) \cos ts}{t} dt \tag{4.1}$$

$$v_1(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\psi_1(t)}{t} \sin ts \, dt, \quad \psi_{0,2}(0) = 0; \quad \psi_m(t) = 1 + o(1), \quad t \to \infty \ (m = 0, 1, 2)$$

Здесь $v_0^*(x)$ описывает вертикальные смещения поверхностных точек основания от воздействия вертикальной единичной силы, приложенной в точке $(x = 0,\ y = 0)$ поверхности основания, $v_2^*(x)$ — горизонтальные смещения от горизонтальной силы, $v_1^*(x)$ — вертикальные смещения от горизонтальной силы, либо наоборот; θ_1, θ_2, h — некоторые положительные параметры, причем $\theta_1 > \theta_2$. В работе [5] приводятся выражения для $\psi_m(t)$ $(m = 0, 1, 2)$ в случае основания в виде слоя, одна из границ которого закреплена (в этом случае h — толщина слоя, а θ_1 и θ_2 определяются формулами, содержащимися в (2.1)).

Если длину участка контакта обозначить через $2a$, нормальное контактное напряжение — через $p(x)$, касательное — через $q(x)$, вертикальные и горизонтальные смещения поверхностных точек в зоне контакта — соответственно через $f_1(x)$ и $f_2(x)$, то рассматриваемую контактную задачу (без тепловых напряжений) легко свести к системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} &\varkappa \int_{-1}^{1} v_0\left(\frac{\xi - \tau}{\lambda}\right) ap(a\tau)\, d\tau + \int_{-1}^{1} v_1\left(\frac{\xi - \tau}{\lambda}\right) aq(a\tau)\, d\tau = \frac{f_1(a\xi)}{\theta_2} \quad \left(\varkappa = \frac{\theta_1}{\theta_2} > 1\right) \\ &- \int_{-1}^{1} v_1\left(\frac{\xi - \tau}{\lambda}\right) ap(a\tau)\, d\tau + \varkappa \int_{-1}^{1} v_2\left(\frac{\xi - \tau}{\lambda}\right) aq(a\tau)\, dt = \frac{f_2(a\xi)}{\theta_2} \quad \left(\lambda = \frac{h}{a}\right) \end{aligned} \tag{4.2}$$

С целью указать приближенный способ решения этой системы на основе соотношения (1.1) представим функции v_m в виде [5, 10]

$$v_m(s) = -\frac{\ln|s|}{\pi} - l_m(s),\ l_m(s) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{[1-\psi_m(t)]\cos ts - e^{-t}}{t}\,dt$$

$$v_1(s) = (^1/_2)\operatorname{sign} s - l_1(s),\ l_1(s) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\psi_1(t)}{t}\sin ts\,dt \quad (m=0,2) \tag{4.3}$$

В силу принятой асимптотики для $\psi_m(s)$, функции $l_m(s)$ будут непрерывны на вещественной оси.

Более того, например, в случае основания в виде упругого слоя они будут аналитическими внутри круга $|s| < 2$.

Стало быть, в интервале $(-2 < s < 2)$ можно аппроксимировать их отрезками соответствующих рядов Тэйлора

$$l_m(s) = \sum_{j=0}^n a_j^m s^{2j} \quad (m=0,2), \qquad l_1(s) = \sum_{j=0}^n a_j^1 s^{2j+1} \tag{4.4}$$

При этом на основании (4.3)

$$a_0^{0,2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\psi_{0,2}(t)-e^{-t}}{t}\,dt, \quad \begin{matrix} a_j^{0,2} \\ a_j^1 \end{matrix} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \begin{bmatrix} 1-\psi_{0,2}(t) \\ 1-\psi_1(t) \end{bmatrix} \begin{matrix} t^{2j-1} \\ t^{2j} \end{matrix}\,dt \quad (j=1,2\ldots)$$

В том же случае, когда либо s выходит за интервал сходимости, либо функции $l_m(s)$ не являются аналитическими, необходимо протабулировать значения функций $l_m(s)$ $(m=0,1,2)$, определяемых формулами из (4.3). Если такие таблицы будут составлены, то функции $l_m(s)$ по-прежнему можно аппроксимировать в виде (4.4), только коэффициенты a_j^m придется уже находить из условия наименьшего отклонения в том или ином смысле.

Подставим $v_m(s)$ $(m=0,1,2)$, взятые из (4.3), в систему (4.2). В результате совершения операций, подобных проделанным при получении (2.2), вместо (4.2) будем иметь (ср. [5])

$$\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}\operatorname{sign}(\xi-\tau) + \frac{\operatorname{ctg}\pi\gamma}{\pi}\ln\frac{1}{|\xi-\tau|}\right]\chi(\tau) - \tag{4.5}$$

$$-\int_{-1}^{1}\sum_{k=0}^{N}(\xi-\tau)^k\,[C_k^+\chi(\tau) + C_k^-\overline{\chi(\tau)}]\,d\tau = i\alpha(\xi) \qquad (-1<\xi<1,\ N=2n+1)$$

Здесь

$$\begin{matrix}\chi(\xi) = ap(a\xi) + iaq(a\xi), \\ \alpha(\xi) = a\theta_2^{-1}[f_1(a\xi) + if_2(a\xi)],\end{matrix} \qquad i\varkappa = \operatorname{ctg}\pi\gamma, \quad \gamma = -\frac{i}{2\pi}\ln\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1} \tag{4.6}$$

Коэффициенты $C_k^\pm$ выражаются через a_k^m по формулам

$$2\lambda^{2k}C_{2k}^+ = i\varkappa(a_k^0 - a_k^2), \quad \lambda^{2k+1}C_{2k+1}^+ = a_k^1; \qquad C_{2k+1}^- = 0 \qquad (k=0,1,2\ldots)$$

$$2C_0^- = \varkappa(a_0^0 + a_0^2 + 2\pi^{-1}\ln\lambda), \quad 2\lambda^{2j}C_{2j}^- = i\varkappa(a_j^0 + a_j^2) \qquad (j=1,2\ldots)$$

Будем предполагать функцию $\alpha(\xi)$ разложенной в ряд по многочленам Якоби

$$\alpha(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k P_k^{-\gamma}(\xi) \tag{4.7}$$

Будем искать решение уравнения (4.5) в виде

$$\chi(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_m P_m^{\gamma}(\tau)}{\varphi_\gamma(\tau)}, \qquad \overline{\chi(\tau)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\bar{z}_m P_m^{-\gamma}(\tau)}{\varphi_{\gamma-}(\tau)} \tag{4.8}$$

Здесь z_m — искомые комплекснозначные коэффициенты. Вторая формула в (4.8) справедлива в силу того, что, согласно (4.6), $\operatorname{Re}\gamma = 0$ (ибо $\varkappa > 1$). Введем в рассмотрение интегралы вида

$$B_{mk}^{l\pm} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{(\xi-\tau)^k P_l^{\gamma}(\xi) P_m^{\mp\gamma}(\tau)\,d\tau}{\varphi_\gamma(\xi)\varphi_{\mp\gamma}(\tau)} = \sum_{j=l}^{k-m} (-1)^j \binom{k}{j} b_j^{\,l}(-\gamma)\, b_{k-j}^{\,m}(\pm\gamma) \tag{4.9}$$

Чтобы убедиться в справедливости второго равенства, следует разложить $(\xi-\tau)^k$ в ряд по $(1-\xi)$ и воспользоваться (2.11).

Подставим теперь (4.7) и (4.8) в (4.5), после чего обе части полученного равенства проинтегрируем с весом $P_l^{\gamma}(\xi)\,/\,\varphi_\gamma(\xi)$ в интервале $(-1, 1)$. В результате для первых $N = 2n+1$ коэффициентов $z_m = x_m + iy_m$ получим систему алгебраических уравнений (4.10)

$$z_l = \frac{1}{\mu_l}\left[i\alpha_l + \frac{1}{\lambda_l}\sum_{m=0}^{N-l}\left(z_m \sum_{k=m+l}^{N} C_k^{+} B_{mk}^{l+} + \bar{z}_m \sum_{k=m+l}^{N} C_k^{-} B_{mk}^{l-}\right)\right] \qquad (l=0,1,\ldots,N)$$

а для остальных формулу

$$z_l = i\alpha_l / \mu_l, \qquad l > N$$

В системе (4.9) легко отделяется мнимая от вещественной части, благодаря тому, что

$$\overline{B_{mk}^{l\pm}} = (-1)^{m+k+l} B_{mk}^{l\pm}$$

Последнее следует из интегрального представления (4.8) и соотношения (2.18).

В результате отделения мнимой части от вещественной из (4.9) получаются, как и в [5], две независимо решаемые системы алгебраических уравнений: одна — для x_{2j}, y_{2j+1} $(j = 0, 1, \ldots, n)$, другая — для x_{2j+1}, y_{2j} $(j = 0, 1, \ldots, n)$, и, что весьма существенно, матрица коэффициентов обеих систем оказывается треугольной, в отличие от [5]. В остальном же дальнейший путь решения рассматриваемой задачи аналогичен изложенному в [5].

Если вместо сил сцепления рассматривать силы кулоновского трения, то приближенное интегральное уравнение вместо (4.5) приобретает вид

$$\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}\operatorname{sign}(\xi-\tau) + \frac{\operatorname{ctg}\pi\gamma}{\pi}\ln\frac{1}{|\xi-\tau|} - \sum_{k=0}^{N} C_k^{*}(\xi-\tau)^k\right]\chi(\tau)\,d\tau = \frac{f_1(a\xi)}{k\theta_\varkappa}$$

$$(C_0^{*} = \varkappa^{*}(a_0^{\circ} - \pi^{-1}\ln\lambda),\ \lambda^{2k}C_{2k}^{*} = \varkappa^{*}a_k^{\circ},\ k \geqslant 1;\ \lambda^{2k+1}C_{2k+1}^{*} = a_k^{1}) \tag{4.11}$$

$$(k = 0, 1, 2\ldots;\quad \varkappa^{*} = k^{-1}\varkappa)$$

При этом параметр γ следует брать по второй формуле (2.6), а искомое нормальное контактное напряжение — по формуле $\chi(\xi) = ap(a\xi)$.

Если функцию $f_1(x)$, описывающую осадки основания в зоне контакта, разложить в ряд по многочленам Якоби, а $\chi(\xi)$ искать в виде ряда, т. е

$$f_1(a\xi) = \sum_{l=0}^{\infty} \beta_l P_l^{-\gamma}(\xi), \qquad \chi(\xi) = \sum_{l=0}^{\infty} x_l \frac{P_l^{\gamma}(\xi)}{\varphi_\gamma(\xi)}$$

то также, как в предыдущем случае, получим (4.12)

$$x_l = \frac{1}{\mu_l}\left[\frac{\beta_l}{k\theta_2} + \frac{1}{\lambda_l}\sum_{m=0}^{N-l} x_m \sum_{k=m+l}^{N} C_k^* B_{mk}^{l+}\right] \quad (l \leqslant N), \qquad x_l = \frac{\beta_l}{\mu_l k\theta_2} \quad (l > N)$$

Если штамп имеет плоское основание, то $f_1(x) = \delta + \Theta x$. В этом случае $\beta_0 = \delta + 2a\Theta\gamma$, $\beta_1 = 2a\Theta$, $\beta_l = 0$ $(l = 2, 3, 4, \ldots)$, и контактное напряжение целесообразно искать в виде

$$ap(a\xi) = \chi(\xi) = \sum_{m=0}^{N} (\delta_* X_m^\circ + \Theta_* X_m^1)\frac{P_m^{\gamma}(\xi)}{\varphi_\gamma(\xi)} \qquad \left(\delta_* = \frac{\delta}{k\theta_2}, \quad \Theta_* = \frac{a\Theta}{k\theta_2}\right)$$

При этом, в силу (4.12), коэффициенты X_l^j следует находить из следующей системы алгебраических уравнений

$$X_l^j = \frac{1}{\mu_l}\left[\beta_l^j + \frac{1}{\lambda_l}\sum_{m=0}^{N-l} X_m^j \sum_{k=m+l}^{N} C_k^* B_{mk}^{l+}\right]\left(l \leqslant N; \begin{matrix}\beta_0^\circ = 1, & \beta_l^\circ = 0, & l \geqslant 1 \\ \beta_0^1 = 2\gamma, & \beta_1^1 = 2, & \beta_l^1 = 0, \ l \geqslant 2\end{matrix}\right)$$

имеющей треугольную матрицу коэффициентов. Наконец, использование условий равновесия штампа приводит к соотношениям

$$\pi(\delta_* X_0^\circ + \Theta_* X_0^1) = P\cos\pi\gamma$$

$$\pi a\{\delta_*[2\gamma X_0^\circ + (0.25 - \gamma^2)X_1^\circ + \Theta_*[2\gamma X_0^1 + (0.25 - \gamma^2)X_1^1]\} = M\cos\pi\gamma$$

которое определяют M и P по заданным осадке штампа δ и углу поворота Θ, и наоборот.

Поступила 9 XI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, 1954.
2. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. Гостехиздат, 1949.
3. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. Гостехиздат, 1953.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962.
5. Попов Г. Я. К решению плоской контактной задачи теории упругости при наличии сил сцепления или трения. Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-матем. н., 1963, т. 16, № 2.
6. Кратцер А., Франц В. Трасцендентные функции. Изд. иностр. лит., 1963.
7. Бородачев Н. М. Плоская задача термоупругости о вдавливании штампа. Инж. ж., 1963, т. 3, № 4.
8. Крейн М. Г. Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода. Докл. АН СССР, 1955, т. 100, № 3.
9. Сегё Г. Ортогональные многочлены. Физматгиз, 1962.
10. Александров В. М. О приближенном решении одного типа интегральных уравнений. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.