Прикладная математика и механика. Том 30, 1966

МОДЕЛЬ УПРУГОЙ СРЕДЫ ПРОСТОЙ СТРУКТУРЫ С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

И. А. Кунин

(Новосибирск)

В ряде работ (см., например, [1-7], где имеются также ссылки на другие работы) рассматривалась обобщенная модель упругой среды с асимметричным тензором напряжений — асимметричная теория упругости. По нашему мнению, наиболее существенным отличием этой модели является наличие характерного параметра, имеющего размерность длины, т. е. модель учитывает масштабные эффекты (микронеоднородность) и является в этом смысле следующим приближением по сравнению с обычной теорией упругости [1]. В то же время асимметрия тензора напряжений, по-видимому, не является характеристическим признаком модели и может быть устранена надлежащим определением напряжений.

Целью настоящей работы является развитие общей линейной модели макроскопически однородной упругой среды с простой микроструктурой. Последняя, в отличие от сложных структур, характеризуется тем, что для ее кинематического описания достаточно задания поля вектора смещения.

В качестве исходной микромодели принята Борновская модель простой решетки [9]. В § 1 рассматривается алгоритм, позволяющий взаимно однозначно сопоставить дискретной структуре некоторую аналитическую структуру. При помощи этого алгоритма в § 2 строится точное континуальное представление для Борновской модели, совпадающее по форме с обычной теорией упругости, но с операторным законом Гука.

Ядро соответствующего интегрального оператора явно выражается через силовые константы микромодели. При этом оказывается возможным такое построение теории, которое сохраняет симметрию тензора напряжений и обычное выражение для плотности упругой энергии. В связи с этим отпадает необходимость вводить тензор напряжений для моментов, как принято в асимметричной теории упругости.

С феноменологической точки зрения, данная модель соответствует общему случаю сильной дисперсии. В нулевом длинноволновом приближении осуществляется переход к обычной теории упругости. При этом, в частности, показывается, что, в отличие от общепринятого представления [9, 10], правильная симметрия тензора модулей упругости является исключительно следствием требования инвариантности энергии относительно вращения независимо от наличия начальных напряжений.

В § 3 рассматривается случай слабой дисперсии и модель изотропной среды с произвольной дисперсией. Устанавливается соответствие, согласно которому решение задачи теории упругости с дисперсией может быть получено из решения задачи обычной теории упругости заменой упругих констант операторами. Строится выражение для тензора Грина изотропной среды с сильной и слабой дисперсией.

1. Рассмотрим простую трехмерную решетку, характеризуемую заданием трех некомпланарных векторов e_α ($\alpha = 1, 2, 3$). Решетка инвариантна относительно смещения на любой из этих векторов. Элементарной ячейкой A будем, как обычно, называть параллелепипед, построен-

---

[1] Аналогичная ситуация рассматривается в электродинамике сплошной среды с микронеоднородностями, где соответствующий эффект получил название (слабой) пространственной дисперсии [8].

Предполагая, как обычно, что зависимость от времени задается множителем $\exp(-i\omega t)$ (или, что то же, по времени произведено преобразование Фурье), запишем лагранжиан системы в виде

$$2L = m\omega^2 g^{\alpha\beta} \sum_n \overline{u_\alpha(n)}\, u_\beta(n) - 2 \sum_n \overline{u_\alpha(n)}\, \Phi^\alpha(n) - \\ - \sum_{nn'} \overline{u_\alpha(n)}\, \Phi^{\alpha\beta}(n - n')\, u_\beta(n') + 2 \sum_n \overline{u_\alpha(n)}\, f^\alpha(n) \tag{2.2}$$

где последний член учитывает вклад внешних сил $f^\alpha(n)$.

Используя указанный выше алгоритм, натянем на решетку аналитическую структуру, положив

$$u_\alpha(n) \Rightarrow u_\alpha(x), \qquad f^\alpha(n) \Rightarrow v_A\, q^\alpha(x), \qquad m = v_A\, \rho \tag{2.3}$$

Здесь $q^\alpha(x)$ имеет смысл плотности объемных сил, а ρ — плотности массы. В то же время $\Phi^\alpha(n)$ и $\Phi^{\alpha\beta}(n)$ удобно заменить обобщенными функциями, Фурье-образы которых аналитически продолжены на все k-пространство

$$\Phi^\alpha(n) \to v_A \Psi^\alpha(k) = v_A \sum_n \Phi^\alpha(n)\, e^{in\cdot k} \\ \Phi^{\alpha\beta}(n) \to v_A{}^2 \Psi^{\alpha\beta}(k) = v_A \sum_n \Phi^{\alpha\beta}(n)\, e^{in\cdot k} \tag{2.4}$$

Вводя обозначения

$$\langle u \mid v\rangle = \int \overline{u(x)}\, v(x)\, dx = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \overline{u(k)}\, v(k)\, dk = \overline{\langle v \mid u\rangle} \\ \langle u \mid \Phi \mid v\rangle = \iint \overline{u(x)}\, \Phi(x - x')\, v(x')\, dx\, dx' = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \overline{u(k)}\, \Phi(k)\, v(k)\, dk \tag{2.5}$$

и используя (1.5), запишем лагранжиан (2.2) в виде

$$2L = \langle u_\alpha \mid \rho\omega^2 g^{\alpha\beta} \mid u_\beta\rangle - 2\langle u_\alpha \mid \Psi^\alpha\rangle - \langle u_\alpha \mid \Psi^{\alpha\beta} \mid u_\beta\rangle + 2\langle u_\alpha q^\alpha\rangle \tag{2.6}$$

Рассмотрим структуру $\Psi^{\alpha\beta}(k)$ и $\Psi^\alpha(k)$. Очевидно, тензор $\Psi^{\alpha\beta}(k)$ эрмитов [1]

$$\Psi^{\alpha\beta}(k) = \overline{\Psi^{\beta\alpha}}(k) = \Psi^{\beta\alpha}(-k) \tag{2.7}$$

Потребуем инвариантности упругой энергии

$$\Phi(u_\alpha) = \langle u_\alpha \mid \Psi^\alpha\rangle + {}^1/_2 \langle u_\alpha \mid \Psi^{\alpha\beta} \mid u_\beta\rangle \tag{2.8}$$

относительно трансляции и вращения. Пусть соответствующее смещение есть u_α^*. Тогда должно быть $\Phi(u_\alpha + u_\alpha^*) = \Phi(u_\alpha)$ для любого u_α.

Отсюда следует

$$\langle u_\alpha^* \mid \Psi^\alpha\rangle = 0, \quad \operatorname{Re} \langle u_\alpha^* \mid \Psi^{\alpha\beta} \mid u_\beta\rangle = 0, \quad \langle u_\alpha^* \mid \Psi^{\alpha\beta} \mid u_\beta^*\rangle = 0 \tag{2.9}$$

При этом в случае трансляции на вектор a_α смещение $u_\alpha^*(k) \sim a_\alpha \delta(k)$, а для инфинитезимального вращения, заданного антисимметричным тензором $a_{\alpha\beta}$, смещение $u_\alpha^*(k) \sim a_{\alpha\beta} \partial^\beta \delta(k)$ $(\partial^\beta = \partial / \partial k_\beta)$.

[1] В кристаллах простой структуры обычно предполагается инвариантность относительно инверсии, откуда следует симметрия $\Phi^{\alpha\beta}(n)$ и $\Psi^{\alpha\beta}(k)$ по $\alpha\beta$. Однако в феноменологических моделях это ограничение не обязательно.

Из первых двух условий (2.9) для случая трансляции находим (здесь и в дальнейшем индекс нуль обозначает значение функции при $k = 0$)

$$\Psi_0^{\alpha} = 0, \qquad \Psi_0^{\alpha\beta} = 0 \tag{2.10}$$

Отсюда, в частности, следует представление $\Psi^{\alpha}(k) = -ik_{\nu}\psi^{\nu\alpha}(k)$. Те же условия для вращения при учете (2.7) дают

$$\psi_0^{\nu\alpha} = \psi_0^{\alpha\nu}, \qquad [\partial^{\mu}\Psi^{\alpha\beta}(k)]_0 = 0 \tag{2.11}$$

Таким образом, $\Psi^{\alpha\beta}(k)$ можно представить в виде

$$\Psi^{\alpha\beta}(k) = \psi^{\alpha\beta\nu\mu}(k)\, k_{\nu}k_{\mu} \tag{2.12}$$

где тензор $\psi^{\alpha\beta\nu\mu}(k)$, симметричный по $\nu\mu$ и эрмитов по $\alpha\beta$, очевидным образом однозначно определяется заданием $\Psi^{\alpha\beta}(k)$.

При переходе к третьему из условий (2.9) прежде всего замечаем невозможность непосредственной подстановки в него значений u_{α}^*, так как произведение δ-функций не имеет смысла. Это связано с тем, что нелинейный функционал $\Phi(u_{\alpha})$, заданный в форме (2.1) или (2.8), вообще говоря, не определен для смещений, которые в x-пространстве постоянны или меняются по линейному закону. Для его доопределения необходимо построить соответствующую регуляризацию [1]. При этом будем руководствоваться следующим соображением. Как известно, плотность лагранжиана определена лишь с точностью до дивергентных членов. Однако истинная плотность энергии должна быть инвариантна относительно жесткого вращения. Последнее условие однозначно определяет регуляризацию. Введем тензор

$$c^{\nu\alpha\mu\beta} = S^{\nu\alpha\mu\beta}_{\varkappa\sigma\rho\tau}\psi^{\varkappa\sigma\rho\tau} = \psi^{\alpha\beta\nu\mu} + \psi^{\nu\beta\alpha\mu} - \psi^{\mu\beta\alpha\nu} \tag{2.13}$$

Здесь S — оператор симметрирования, компоненты которого очевидным образом выражаются через символы Кронекера. Легко проверяется, что на тензорах, симметричных по второй паре индексов (ψ удовлетворяет этому условию), оператор S имеет обратный

$$\psi^{\alpha\beta\nu\mu} = {}^1/_2\,(c^{\nu\alpha\mu\beta} + c^{\mu\alpha\nu\beta}) \tag{2.14}$$

а тензор $c^{\nu\alpha\mu\beta}$ симметричен по $\nu\alpha$. Из (2.14) следует

$$\Psi^{\alpha\beta}(k) = \psi^{\alpha\beta\nu\mu}(k)\, k_{\nu}k_{\mu} = c^{\nu\alpha\mu\beta}(k)\, k_{\nu}k_{\mu} \tag{2.15}$$

Полагая

$$\zeta_{\nu\alpha}(k) = -ik_{\nu}u_{\alpha}(k), \qquad \varepsilon_{\nu\alpha}(k) = \zeta_{(\nu\alpha)}(k), \qquad \sigma^{\nu\alpha}(k) = c^{\nu\alpha\mu\beta}(k)\,\zeta_{\mu\beta}(k) \tag{2.16}$$

или в прямых обозначениях в x-представлении

$$\zeta = \operatorname{grad} u, \qquad \varepsilon = \operatorname{def} u, \qquad \sigma = \int c(x - x')\,\zeta(x')\,dx' \tag{2.17}$$

---

[1] Можно показать, что в дискретном представлении она определяет способ суммирования расходящихся выражений.

запишем выражение для Φ в виде

$$\Phi = \langle \zeta_{\nu\alpha} | \psi^{\nu\alpha} \rangle + {}^1/_2 \langle \varepsilon_{\nu\alpha} | \sigma^{\nu\alpha} \rangle \tag{2.18}$$

с очевидным порядком действий. Этим определяется искомая регуляризация.

Для инвариантности Φ относительно вращения теперь необходимо и достаточно потребовать

$$c_0^{\nu\alpha\,[\mu\beta]} = 0 \tag{2.19}$$

Можно показать, что это эквивалентно условиям

$$c_0^{\nu\alpha\mu\beta} = c_0^{\nu\alpha\beta\mu} = c_0^{\mu\beta\nu\alpha} \tag{2.20}$$

Такой же симметрией обладает $\psi_0^{\alpha\beta\nu\mu}$. Соответствующим условиям должны также удовлетворять исходные силовые константы.

Для коэффициентов разложения аналитической функции

$$c^{\nu\alpha\mu\beta}(k) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p^{\nu\alpha\mu\beta\lambda_1\ldots\lambda_p} (-ik_{\lambda_1}) \cdots (-ik_{\lambda_p}) \tag{2.21}$$

учитывая (2.4), (2.12) и (2.13), находим

$$c_p^{\nu\alpha\mu\beta\lambda_1\ldots\lambda_p} = \frac{1}{v_A} \frac{(-1)^{p+1}}{(p+2)!} S^{\nu\alpha\mu\beta}_{\varkappa\sigma\rho\tau} \sum_n \Phi^{\varkappa\sigma}(n)\, n^\rho n^\tau n^{\lambda_1} \ldots n^{\lambda_p} \tag{2.22}$$

В нулевом длинноволновом приближении $c_0^{\nu\alpha\mu\beta}$ играет роль обычного тензора модулей упругости. Полученное для него выражение совпадает с известным [9].

Из приведенного вывода вытекает, что надлежащая симметрия $c_0^{\nu\alpha\mu\beta}$ следует исключительно из требования инвариантности энергии относительно трансляции и вращения. Этот результат не совпадает с общепринятым представлением, основанным на работе [10], о том, что для получения правильной симметрии $c_0^{\nu\alpha\mu\beta}$ необходимо потребовать отсутствия начальных напряжений. Расхождение связано с тем, что инвариантность энергии относительно вращения, согласно [10], приводит к некоторому соотношению между $\Phi^\alpha(n)$ и $\Phi^{\alpha\beta}(n)$ (или между $\psi_0^{\nu\alpha}$ и $\psi_0^{\alpha\beta\nu\mu}$ в терминах данной работы). Однако вывод соответствующей формулы в [10] не является корректным — не выполняется требование линейной суперпозиции, справедливое в гармоническом приближении. Таким образом, учитывая независимость $\psi^{\nu\alpha}(k)$ и $\psi^{\alpha\beta\nu\mu}(k)$, можно без ограничения общности считать, что начальные напряжения отсутствуют, и опустить в (2.6) и (2.18) соответствующие члены, что и предполагается в дальнейшем.

Легко показывается, что вещественная (мнимая) часть $\psi^{\alpha\beta\nu\mu}(k)$ — симметрична (антисимметрична) по $\alpha\beta$, симметрична по $\nu\mu$ и четная (нечетная) функция k. Соответственно вещественная (мнимая) часть $c^{\nu\alpha\mu\beta}(k)$ — четная (нечетная) функция k. Отсюда следует, что мнимые части $\psi^{\alpha\beta\nu\mu}(k)$ и $c^{\nu\alpha\mu\beta}(k)$ равны нулю для изотропной среды и среды с центральной симметрией.

Из лагранжиана (2.6) находим уравнения движения, которые при учете (2.15) в (k, ω)- и (x, t)-представлениях принимают вид

$$-\rho\omega^2 g^{\alpha\beta} u_\beta(k) + c^{\nu\alpha\mu\beta}(k) k_\nu k_\mu u_\beta(k) = q^\alpha(k) \tag{2.23}$$

$$\rho g^{\alpha\beta} u_\beta^{\cdot\cdot}(x) - \int c^{\nu\alpha\mu\beta}(x - x') \partial_\nu \partial_\mu u_\beta(x') dx' = q^\alpha(x) \tag{2.24}$$

Полагая в (2.23) объемные силы q^α равными нулю, можно обычным методом получить дисперсионное уравнение, связывающее ω и k, и найти скорость распространения волн, которая, вообще говоря, зависит от k (пространственная дисперсия). Требование устойчивости, т. е. неотрицательности $\omega^2(k)$ для $k \in B$, накладывает на $c^{\nu\alpha\mu\beta}(k)$ некоторые условия типа неравенств.

Выражение (2.18) для упругой энергии можно представить в виде

$$\Phi = \int \varphi(x) dx, \qquad \varphi(x) = \frac{1}{2}\sigma^{\nu\alpha}(x)\varepsilon_{\nu\alpha}(x) \tag{2.25}$$

Из (2.16) и (2.19) следует инвариантность $\sigma^{\nu\alpha}(x)$, а значит, и $\varphi(x)$, относительно инфинитезимального вращения. Таким образом, $\varphi(x)$ можно отождествить с плотностью упругой энергии.

Запишем (2.24) и последнее из уравнений (2.17) в виде

$$-\rho u^{\cdot\cdot} + \operatorname{div}\sigma = -q, \qquad \sigma = C\zeta = C \operatorname{grad} u \tag{2.26}$$

где оператор C определяется ядром $c^{\nu\alpha\mu\beta}(x)$. Сопоставляя (2.26) и (2.25), приходим к выводу, что симметричный тензор $\sigma^{\nu\alpha}$ можно трактовать как тензор напряжений, а соотношение $\sigma = C\zeta$ — как операторный закон Гука. В нулевом длинноволновом приближении они совпадают с обычными. Ввиду симметрии тензора напряжений отпадает необходимость вводить какие-либо дополнительные тензоры напряжений для моментов, как это принято в асимметричной теории упругости [1-7].

Следует подчеркнуть, что симметрия тензора напряжений и возможность представления плотности энергии в форме (2.25) — прямые следствия введенной выше регуляризации. Для других регуляризаций эти условия не выполняются.

Построенную модель можно рассматривать как точное (взаимно однозначное) континуальное представление исходной дискретной модели. При этом ядро оператора C определяется силовыми константами согласно (2.22). При феноменологическом подходе лагранжиан (2.6) и уравнения (2.23), (2.24) определяют наиболее общую модель макроскопически однородной упругой среды простой структуры с (сильной) пространственной дисперсией. Если при этом область допустимых значений k ограничена, то феноменологическая модель в точности эквивалентна некоторой дискретной модели, силовые константы которой определяются по (2.4).

3. Рассмотрим некоторые частные модели и, в первую очередь, случай слабой дисперсии. Переход к длинноволновым приближениям, строго говоря, означает, что допустимым является класс функций, спектр которых сосредоточен в области с характерным размером $\varkappa \ll 1$. В этом случае в разложении (2.21) или, что то же, в разложении финитной функции $c^{\nu\alpha\mu\beta}(x)$ в ряд по мультиполям можно ограничиться конечным числом членов (с оценкой погрешности). Тогда нулевое приближение дает обычную теорию упругости.

Для получения следующего приближения рассмотрим сначала случай, когда центральная симметрия отсутствует и, следовательно, коэффициент c_1 в (2.21), вообще говоря, отличен от нуля. Операторный закон Гука при этом имеет вид

$$\sigma^{\nu\alpha}(x) = c_0^{\nu\alpha\mu\beta}\varepsilon_{\mu\beta}(x) + c_1^{\nu\alpha\mu\beta\lambda}\partial_\lambda\zeta_{\mu\beta}(x) \tag{3.1}$$

и уравнения движения (2.24) будут третьего порядка по пространственным производным.

При наличии центральной симметрии $c_1 = 0$, и следующим приближением является второе с законом Гука

$$\sigma^{\nu\alpha}(x) = c_0^{\nu\alpha\mu\beta}\varepsilon_{\mu\beta}(x) + c_2^{\nu\alpha\mu\beta\lambda_1\lambda_2}\partial_{\lambda_1}\partial_{\lambda_2}\zeta_{\mu\beta}(x) \tag{3.2}$$

Уравнения (2.24) имеют четвертый порядок.

Рассмотрим теперь случай изотропной среды с произвольной дисперсией. Можно показать, что в декартовой системе координат справедливо общее представление

$$c^{\nu\alpha\mu\beta}(k) = \lambda(k)\,\delta^{\nu\alpha}\delta^{\mu\beta} + \mu(k)\,(\delta^{\alpha\beta}\delta^{\nu\mu} + \delta^{\mu\alpha}\delta^{\nu\beta}) \tag{3.3}$$

Здесь $\lambda(k)$, $\mu(k)$ — вещественные функции скалярного аргумента $k^2 = k_\alpha k^\alpha$. Отсюда следует, что в этом случае можно заменить в законе Гука ζ на ε. Уравнения движения (2.23) и (2.24) принимают вид

$$-\rho\omega^2 u^\alpha(k) + \mu(k)k^2u^\alpha(k) + [\lambda(k) + \mu(k)]k^\alpha k^\beta u_\beta(k) = q^\alpha(k) \tag{3.4}$$

$$\rho u^{\cdot\cdot} - \mathrm{M}\Delta u - (\Lambda + \mathrm{M})\,\mathrm{grad\,div}\,u = q \tag{3.5}$$

Здесь Λ, M — скалярные операторы с ядрами $\lambda(x)$, $\mu(x)$.

Из условий устойчивости следует, что

$$3\lambda(k) + 2\mu(k) > 0, \qquad \mu(k) > 0 \tag{3.6}$$

в допустимой области изменения k.

Следующим после нулевого является второе приближение

$$\lambda(k) = \lambda_0 - \lambda_2 k^2, \qquad \mu(k) = \mu_0 - \mu_2 k^2 \tag{3.7}$$

Если при этом среда дискретна и изотропна вплоть до второго приближения, то константы разложения можно выразить через микропараметры

$$\lambda_s = 3p_s - 4q_s, \qquad \mu_s = -2p_s + q_s \qquad (s = 0,2) \tag{3.8}$$

где введены обозначения ($n^2 = n_\alpha n^\alpha$)

$$p_s = \frac{1}{30\cdot 6^s v_A}\sum_n n^{2+s}\,\Phi^{\alpha}_{\cdot\alpha}(n), \qquad q_s = \frac{1}{30\cdot 6^s v_A}\sum_n n^s n_\alpha n_\beta \Phi^{\alpha\beta}(n) \tag{3.9}$$

Учитывая (3.6), отсюда, в частности, находим, что p_0, $q_0 < 0$.

Возвращаясь к уравнениям (3.5), замечаем, что операторы Λ и M коммутируют с пространственными и временными производными. Это позволяет сформулировать следующее утверждение: решение задачи теории упругости с пространственной дисперсией может быть получено из решения соответствующей задачи классической теории упругости заменой постоянных Ляме λ_0, μ_0 операторами Λ, M с последующей расшифровкой комбинаций операторов [1]. Последняя в общем случае сводится к нахождению одномерных Фурье-прообразов комбинаций $\lambda(k)$ и $\mu(k)$. Отметим, что сформулированное утверждение очевидным образом распространяется на анизотропные задачи, однако расшифровка операторов представляет в этом случае значительные трудности.

В качестве примера построим тензор Грина для смещений изотропной среды с пространственной дисперсией (статика). Используя известное выражение тензора Грина классической теории упругости [14], находим

$$U_{\alpha\beta}(k) = \frac{1}{k^2\mu(k)}\delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{k^4}\left[\frac{1}{\mu(k)} - \frac{1}{\lambda(k) + 2\mu(k)}\right]k_\alpha k_\beta \tag{3.10}$$

---

[1] Для сравнения обращаем внимание на аналогичную ситуацию в наследственной теории ползучести [13].

Отсюда следует возможность интегрального представления

$$U_{\alpha\beta}(x) = \delta_{\alpha\beta} \int \frac{\tau(x')}{r(x-x')} dx' - \int \chi(x') \partial_\alpha \partial_\beta r(x-x') dx' \qquad (3.11)$$

Ядра $\tau(x)$ и $\chi(x)$ определяются Фурье-образами

$$\tau(k) = \frac{1}{4\pi\mu(k)}, \qquad \chi(k) = \frac{\lambda(k)+\mu(k)}{8\pi\mu(k)[\lambda(k)+2\mu(k)]} \qquad (3.12)$$

Для конкретных вычислений более удобно явное представление $U_{\alpha\beta}(x)$ при помощи теоремы о вычетах. Так, для второго приближения в предположении, что $\mu_2 < 0$, $\lambda_2 + 2\mu_2 < 0$, находим

$$U_{\alpha\beta}(x) = \frac{1}{\mu_0 a} f\left(\frac{r}{a}\right) + \partial_\alpha \partial_\beta \left[\frac{b}{\lambda_0 + 2\mu_0} g\left(\frac{r}{b}\right) - \frac{a}{\mu_0} g\left(\frac{r}{a}\right)\right]$$

Здесь

$$f(r) = \frac{1-e^{-r}}{4\pi r}, \qquad g(r) = \frac{r}{8\pi} + f(r) \qquad \left(a^2 = -\frac{\mu_2}{\mu_0}, \quad b^2 = -\frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{\lambda_0 + 2\mu_0}\right) \qquad (3.13)$$

Таким образом, уже второе приближение устраняет расходимость тензора Грина при $r \to 0$. Аналогичная ситуация возникает в электродинамике с высшими производными [15]. Однако, строго говоря, рассмотрение волн с длинами порядка характерных размеров a, b допустимо лишь в рамках модели среды с сильной дисперсией (автор благодарен Г. И. Баренблатту за дискуссию по этому вопросу). В связи с этим устранение расходимости в теории второго приближения носит формальный характер и имеет значение лишь для феноменологических моделей.

Поступила 9 X 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Аэро Э. Л., Кувшинский Е. В. Основные уравнения теории упругости с вращательным взаимодействием частиц. Физ. твердого тела, 1960, т. 2, № 7, стр. 1399.
2. Grioli G. Elasticità asimmetrica. Ann. mat. pura ed appl., Ser. IV, 1960, vol. 50, p. 389.
3. Toupin R. A. Elastic materials with couple-stresses. Arch. Rat. Mech. Anal., 1962, vol. 11, No. 5, p. 385.
4. Mindlin R. D., Tiersten H. F. Effects of couple-stresses in linear elasticity. Arch. Rat. Mech. Anal., 1962, vol. 11, No. 5, p. 415.
5. Аэро Э. Л., Кувшинский Е. В. Континуальная теория асимметричной упругости. Физ. твердого тела, 1963, т. 5, № 12, стр. 2591.
6. Toupin R. A. Theories of Elasticity with Couple-stress. Arch. Rat. Mech. Anal., 1964, vol. 17, No. 2, p. 85.
7. Пальмов В. А. Основные уравнения несимметричной теории упругости. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3, стр. 401.
8. Агранович В. М., Гинзбург В. Л. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. М., Изд-во «Наука», 1965.
9. Борн М., Хуан Кунь. Динамическая теория кристаллических решеток. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
10. Huang K. On the atomic theory of elasticity. Proc. Roy. Soc. A, 1950, vol. 203, p. 178.
11. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции. М., Физматгиз, 1959, вып. 1.
12. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике. М., Физматгиз, 1962.
13. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последействием. ПММ, 1948, т. 12, стр. 53.
14. Схоутен И. А. Тензорный анализ для физиков. М., Изд-во «Наука», 1965.
15. Иваненко Д., Соколов А. Классическая теория поля. (Новые проблемы). М.— Л., Гостехиздат, 1949.