Прикладная математика и механика. Том 30, 1966

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ СПЛОШНЫХ СРЕД ПРИ ПОМОЩИ ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА

В. Л. Бердичевский

(Москва)

Излагается формализм построения моделей сплошных сред в рамках общей теории относительности. Исходя из вариационного принципа, сформулированного в [1], получены уравнения состояния, а также замкнутая система дифференциальных уравнений, описывающих сплошную среду, среди определяющих параметров которой присутствуют первые и вторые производные от закона движения и полевых функций. Отмечается, что сплошная среда характеризуется тремя, вообще говоря различными, тензорами энергии-импульса. Рассматривается ряд моделей. Указывается, как от выведенных формул перейти к соответствующим выражениям в ньютонианской механике.

1. Общий формализм построения моделей сплошных сред. Рассмотрим построение моделей сплошных сред при помощи вариационного принципа, взятого в виде [1]

$$\delta \int\limits_V \Lambda \, d\tau + \delta W + \delta W^* = 0 \tag{1.1}$$

Здесь V — произвольный объем четырехмерного риманова многообразия состояний G, Λ — лагранжиан, который будем считать четырехмерным скаляром, δW^* — задаваемый функционал. Величина δW представляется интегралом на границе объема V — трехмерной области Σ — от линейной комбинации вариаций определяющих параметров и их производных, и полностью определяется, если известны функция Λ и δW^*.

Модель сплошной среды будет задана, если задан лагранжиан Λ и δW^*. Например, для модели идеальной жидкости с обратимыми процессами в СТО (специальной теории относительности), как будет показано ниже, $\Lambda = -\rho U(\rho S)$, где ρ — плотность массы покоя среды, U — внутренняя энергия, S — энтропия.

Далее будет предполагаться, что в число аргументов Λ входят следующие величины:

$$g_{ij}, \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}, \quad \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \, \partial x^l}, \quad x^i{}_p = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^p}, \quad \nabla_k x^i{}_p, \quad \mu^A, \quad \nabla_j \mu^A, \quad \nabla_i \nabla_j \mu^A, \quad K^C, \quad \nabla_j K^C$$

Здесь [1] g_{ij} — компоненты метрического тензора многообразия пространства — времени G в системе отсчета наблюдателя, имеющей коор-

---

[1] Все малые латинские индексы i, j, k, p, q,... пробегают значения 1, 2, 3, 4, а большие A, B, C могут соответствовать одному или нескольким тензорным индексам (аналогичную теорию можно было бы построить и для спинорных индексов A, B, C). Малые греческие индексы α, β, γ,... будут пробегать значения 1, 2, 3 и отвечать пространственным координатам.

динаты x^i; ξ^p — координаты в сопутствующей системе отсчета, при этом координатные линии ξ^4 совпадают с мировыми линиями частиц среды с лангранжевыми координатами ξ^1, ξ^2, ξ^3. Функции $x^i(\xi^p)$, определенные в некоторой области многообразия G, полностью описывают движение среды [1]. При фиксированной сопутствующей системе координат ξ^p комплекс $x^i{}_p = \partial x^i / \partial \xi^p$ образует вектор по индексу i в системе отсчета наблюдателя. Все ковариантные производные, соответствующие символу ∇_k берутся в системе отсчета x^i, в частности

$$\nabla_k x^i{}_p = \partial x^i{}_p / \partial x^k + \Gamma_{ks}{}^i x^s{}_p$$

Переменные μ^A описывают либо поведение среды (температура, намагниченность, кривизна и кручение многообразия бездефектных состояний в континуальной теории дислокаций и т. п.), либо присутствующие поля (например, электромагнитное). Не варьируемые величины K^C характеризуют свойства среды (анизотропию, диэлектрическую проницаемость, метрический тензор многообразия начальных состояний и т. д.).

В работах Л. И. Седова [1,2] подробно рассмотрен случай, когда лагранжиан зависит от $x^i(\xi^p)$, $\mu^A(x^i)$ и их первых производных. Включение градиентов x^i_p и $\nabla_j \mu^A$ в число аргументов Λ позволит учесть некоторые новые эффекты (такие, как внутренний момент количества движения сплошной среды).

В уравнении (1.1) варьированию подвергаются наряду с μ^A метрика многообразия G

$$\partial g_{ij} = g_{ij}'(x) - g_{ij}(x)$$

и траектории частиц среды

$$x'^i(\xi^p) = x^i(\xi^p) + \varphi^i(\xi^p, \varepsilon), \qquad \varphi^i(\xi^p, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^i_{(n)}(\xi^p)\,\varepsilon^n.$$

Как обычно, вектор δx^i — главная, линейная по ε часть разности $x'^i - x^i$. При варьировании μ^A, которые предполагаются привязанными к точкам среды, необходимо различать полную вариацию $\delta\mu^A$ и вариацию μ^A в точке x — $\partial\mu^A$. По определению [2]

$$\delta\mu^A \equiv [\mu'^A(x'(\xi))]^{=} - \mu^A(x(\xi)) = \partial\mu^A + \delta x^i \nabla_i \mu^A$$

Здесь $[\mu'^A(x'(\xi))]^{=}$ обозначает результат параллельного переноса $\mu'^A(x)$ из точки x' в точку x, т. е.

$$[\mu'^A(x')]^{=} = \mu'^A(x) + \delta x^i \nabla_i \mu^A$$

[1] Отметим, что настоящее рассмотрение ограничено случаем однородных сред: Λ не зависит явно ни от x^i ни от ξ^p.

[2] Обычно определяют $\delta\mu^A$ иначе: $\delta_1\mu^A = \mu'^A(x') - \mu^A(x)$, причем $\delta_1\mu^A$ уже не будет тензором. Однако это привело бы к некоторым неудобствам, например, не варьируемые в первом определении величины K^C ($\delta K^C = 0$) во втором определении надо считать варьируемыми. Употребление в тексте вариаций $\delta\mu^A$ возможно в силу равенства

$$\delta\Lambda = \Lambda(\mu'^A(x')) - \Lambda(\mu^A(x)) = [\Lambda(\mu'^A(x'))]^{=} - \Lambda(\mu^A(x)) = \Lambda([\mu'^A(x')]^{=}) - \Lambda(\mu^A(x)).$$

Нетрудно проверить следующие формулы:

$$\delta x^i{}_p = [x'^i{}_p(x')]^{=} - x^i{}_p(x) = x'^i{}_p(x'(\xi)) + \Gamma_{sl}{}^i x^s{}_p \delta x^l - x_p{}^i(x(\xi)) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \xi^p}(x'^i(\xi) - x^i(\xi)) + \Gamma_{sl}{}^i x^s{}_p \delta x^l = \frac{\partial \delta x^i}{\partial x^s} x^s{}_p + \Gamma_{sl}{}^i \delta x^l x^s{}_p = x^s{}_p \nabla_s \delta x^i =$$

$$= \partial x^i{}_p + \delta x^l \nabla_l x^i{}_p$$

$$\delta \nabla_k x^i{}_p = \partial \nabla_k x^i{}_p + \delta x^l \nabla_l \nabla_k x^i{}_p = \nabla_k \partial x^i{}_p + \frac{\partial \nabla_k x^i{}_p}{\partial \Gamma_{lm}{}^n} \partial \Gamma_{lm}{}^n + \delta x^l \nabla_l \nabla_k x^i{}_p =$$

$$= \nabla_k (x^j{}_p \nabla_j \delta x^i - \delta x^l \nabla_l x^i{}_p) + \frac{\partial \nabla_k x^i{}_p}{\partial \Gamma_{lm}{}^n} \partial \Gamma_{lm}{}^n + \delta x^l \nabla_l \nabla_k x^i{}_p =$$

$$= \delta x^l (\nabla_l \nabla_k x^i{}_p - \nabla_k \nabla_l x^i{}_p) + \nabla_j \delta x^l (\delta_l{}^i \nabla_k x^j{}_p - \delta_k{}^j \nabla_l x^i{}_p) +$$

$$+ x^j{}_p \nabla_k \nabla_j \delta x^i + \frac{\partial \nabla_k x^i{}_p}{\partial \Gamma_{lm}{}^n} \partial \Gamma_{lm}{}^n$$

$$\delta \nabla_j \mu^A = \nabla_j \partial \mu^A + \frac{\partial \nabla_j \mu^A}{\partial \Gamma_{lm}{}^n} \partial \Gamma_{lm}{}^n + \delta x^i \nabla_i \nabla_j \mu^A =$$

$$= \nabla_j \delta \mu^A + \delta x^i (\nabla_i \nabla_j \mu^A - \nabla_j \nabla_i \mu^A) - (\nabla_j \delta x^i) \nabla_i \mu^A + \frac{\partial \nabla_j \mu^A}{\partial \Gamma_{lm}{}^n} \partial \Gamma_{lm}{}^n$$

$$\delta \nabla_s \nabla_j \mu^A = \nabla_s \partial \mu^A{}_j + \frac{\partial \nabla_s \mu^A{}_j}{\partial \Gamma_{lm}{}^n} \partial \Gamma_{lm}{}^n + \delta x^i \nabla_i \nabla_s \nabla_j \mu^A =$$

$$= \nabla_s \left(\nabla_j \partial \mu^A + \frac{\partial \nabla_j \mu^A}{\partial \Gamma_{lm}{}^n} \partial \Gamma_{lm}{}^n \right) + \frac{\partial \nabla_s \mu^A{}_j}{\partial \Gamma_{lm}{}^n} \partial \Gamma_{lm}{}^n + \delta x^i \nabla_i \nabla_s \nabla_j \mu^A = \nabla_s \nabla_j \delta \mu^A +$$

$$+ \delta x^i (\nabla_i \nabla_s \nabla_j \mu^A - \nabla_s \nabla_j \nabla_i \mu^A) - \nabla_k \delta x^i (\delta_j{}^k \nabla_s \nabla_i \mu^A + \delta_s{}^k \nabla_j \nabla_i \mu^A) -$$

$$- (\nabla_s \nabla_j \delta x^i) \cdot \nabla_i \mu^A + \partial \Gamma_{lm}{}^n \left(\frac{\partial \nabla_s \mu^A{}_j}{\partial \Gamma_{lm}{}^n} + \nabla_s \frac{\partial \nabla_j \mu^A}{\partial \Gamma_{lm}{}^n} \right) + \frac{\partial \nabla_j \mu^A}{\partial \Gamma_{lm}{}^n} \nabla_s \partial \Gamma_{lm}{}^n$$

Здесь через $\mu^A{}_j$ обозначен тензор $\nabla_j \mu^A$, а запись $\partial \nabla_s \mu^A{}_j \,/\, \partial \Gamma_{lm}{}^n$ показывает, что надо брать производную по $\Gamma_{lm}{}^n$ не от второй ковариантной производной тензора μ^A, а от первой ковариантной производной тензора $\mu^A{}_j$. Варация объекта связности $\partial \Gamma_{lm}{}^n$, входящая в последние формулы, есть тензор третьего ранга, который можно выразить через ковариантные производные вариаций метрики

$$\partial \Gamma_{lm}{}^n = B_{lm}{}^{nkij} \nabla_k \partial g_{ij}$$

$$B_{lm}{}^{nkij} = \frac{1}{4} [-g^{nk} (\delta_l{}^i \delta_m{}^j + \delta_m{}^i \delta_l{}^j) + g^{nj} (\delta_l{}^i \delta_m{}^k + \delta_m{}^i \delta_l{}^k) + g^{ni} (\delta_l{}^j \delta_m{}^k + \delta_m{}^j \delta_l{}^k)]$$

Вариацию метрики удобно представить в виде [2]

$$\partial g_{ij} = \partial^* g_{ij} + \nabla_i \eta_j + \nabla_i \eta_j$$

где η_i — произвольный малый ковектор. В СТО (тензор кривизны многообразия пространства-времени $R_{ijk}{}^l = 0$) по определению $\partial^* g_{ij} = 0$, а изменения метрики $\nabla_i\eta_j + \nabla_j\eta_i$, как легко видеть, оставляют тензор кривизны $R_{ijk}{}^l$ нулевым, т. е. не выводят за рамки евклидова пространства.

Пользуясь указанными выражениями для вариаций и равенством

$$\delta\Lambda = \partial\Lambda + \delta x^i \nabla_i \Lambda$$

можно написать [1]

$$\delta\int\limits_V \Lambda\, d\tau = \int\limits_V \left\{ -\frac{1}{2}\Theta^{ij}\partial^* g_{ij} + \eta_i \nabla_j \Theta^{ij} + M_A \delta\mu^A + X_i \delta x^i \right\} d\tau -$$

$$-\int\limits_\Sigma \{\Theta^{il}\eta_i + S^{ijl}\partial g_{ij} + S^{ijkl}\nabla_k \partial g_{ij} + P_A{}^l \delta\mu^A + P_A{}^{il}\nabla_i \delta\mu^A +$$

$$+ P_i{}^l \delta x^i + P_i{}^{jl}\nabla_j \delta x^i\} n_l\, d\sigma$$

Здесь n_l — вектор нормали к Σ, кроме того, введены обозначения [2]:

$$-\frac{1}{2}\Theta^{ij} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\frac{\partial\Lambda\sqrt{-g}}{\partial g_{ij}} - \frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial\Lambda\sqrt{-g}}{\partial(\partial g_{ij}/\partial x^k)} + \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l}\frac{\partial\Lambda\sqrt{-g}}{\partial(\partial^2 g_{ij}/\partial x^k\partial x^l)}\right) +$$

$$+ \nabla_l \psi^{ijl} + \frac{1}{2}\frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_s\nabla_p\mu^A}\frac{\partial\nabla_p\mu^A}{\partial\Gamma_{lm}{}^n} B_{lm}{}^{nkqr}(R_{skq}{}^i\delta_r{}^j + R_{skr}{}^j\delta_q{}^i) \tag{1.2}$$

$$M_A = \frac{\partial\Lambda}{\partial\mu^A} - \nabla_j\frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_j\mu^A} + \nabla_j\nabla_i\frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_i\nabla_j\mu^A} \tag{1.3}$$

$$X_i = \nabla_j(P_i{}^j + \Lambda\delta_i{}^j) - \frac{\partial\Lambda}{\partial x^j{}_s}\nabla_i x^j{}_s - \frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_j x^p{}_s}\nabla_j\nabla_i x^p{}_s - \frac{\partial\Lambda}{\partial\mu^A}\nabla_i\mu^A - \tag{1.4}$$

$$-\frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_j\mu^A}\nabla_j\nabla_i\mu^A - \frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_s\nabla_j\mu^A}\nabla_s\nabla_j\nabla_i\mu^A - \frac{\partial\Lambda}{\partial K^C}\nabla_i K^C - \frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_j K^C}\nabla_i\nabla_j K^C +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_k x^j{}_p}R_{kli}{}^j x^l{}_p - \frac{1}{2}\frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_s\nabla_j\mu^A}R_{sji}{}^l\nabla_l\mu^A$$

$$S^{ijl} = \Psi^{ijl} - \frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial g_{ij}/\partial x^l)} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial\Lambda\sqrt{-g}}{\partial(\partial^2 g_{ij}/\partial x^k\partial x^l)} - \tag{1.5}$$

$$-\frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial^2 g_{pq}/\partial x^k\partial x^l)}(\Gamma_{kp}{}^i\delta_q{}^j + \Gamma_{kq}{}^j\delta_p{}^i)$$

$$\Psi^{ijl} = -\left[\frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_q x^s{}_p}\frac{\partial\nabla_q x^s{}_p}{\partial\Gamma_{km}{}^n} + \frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_p\mu^A}\frac{\partial\nabla_p\mu^A}{\partial\Gamma_{km}{}^n} + \frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_p\nabla_q\mu^A}\left(\frac{\partial\nabla_p\mu^A{}_q}{\partial\Gamma_{km}{}^n} + \nabla_p\frac{\partial\nabla_q\mu^A}{\partial\Gamma_{km}{}^n}\right)\right]\times$$

$$\times B_{km}{}^{nlij} + \nabla_s\left[\frac{1}{2}\frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_s\nabla_p\mu^A}\frac{\partial\nabla_p\mu^A}{\partial\Gamma_{km}{}^n}B_{km}{}^{nlij} + (j\leftrightarrow s)\right] \tag{1.6}$$

$$S^{ijkl} = -\frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial^2 g_{ij}/\partial x^k\partial x^l)} - \left[\frac{1}{2}\frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_k\nabla_p\mu^A}\frac{\partial\nabla_p\mu^A}{\partial\Gamma_{qm}{}^n}B_{qm}{}^{nlij} + (k\leftrightarrow l)\right] \tag{1.7}$$

---

[1] Надо иметь в виду, что коэффициенты при вариациях δx^i в поверхностном интеграле будут получаться различными в зависимости от того, применяются вариации $\delta\mu^A$ или $\partial\mu^A$ в соответствующих членах. В силу этого возможны различные определения для тензора $P_i{}^j$.

[2] При получении уравнений (1.2)—(1.10) учтено, что, наряду с Λ варьированию подвергается и объем V многообразия пространства — времени G. Для вариации элемента объема имеет место формула

$$\delta(d\tau) = (\partial\sqrt{-g}\,/\,\sqrt{-g} + \nabla_i\delta x^i)\, d\tau, \qquad g = \det\|g_{ij}\|$$

$$P_A{}^j = -\frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_j\mu^A} - \nabla_l P_A{}^{jl}, \qquad P_A{}^{jl} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_l\nabla_j\mu^A} + (j \leftrightarrow l)\right] \tag{1.8}$$

$$P_i{}^j = \nabla_i\mu^A \frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_j\mu^A} + \frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_s\nabla_k\mu^A}(\delta_k{}^j\nabla_s\nabla_i\mu^A + \delta_s{}^j\nabla_k\nabla_i\mu^A) - x^j{}_s\frac{\partial\Lambda}{\partial x^i{}_s} -$$
$$- \frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_k x^l{}_s}(\delta_i{}^l\nabla_k x^j{}_s - \delta_l{}^j\nabla_i x^l{}_s) - \nabla_l P_i{}^{jl} - \Lambda\delta_i{}^j \tag{1.9}$$

$$P_i{}^{jl} = \frac{1}{2}\left[\nabla_i\mu^A\frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_j\nabla_l\mu^A} + (l \leftrightarrow j)\right] - \frac{1}{2}\left[x^l{}_s\frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_j x^i{}_s} + (l \leftrightarrow j)\right] \tag{1.10}$$

Символ $(k \to l)$ в (1.2)—(1.10) указывает на то, что к стоящему перед ним слагаемому надо прибавить точно такое же, но с заменой индексов k на l и l на k. Тензор $R_{ijk}{}^l$, входящий в (1.2) и (1.4), есть тензор кривизны многообразия пространства — времени.

Легко видеть, что определенные таким образом тензоры $P_i{}^j$, $P_i{}^{jl}$ и т. д., а также Λ в общем случае зависят от выбора сопутствующей системы отсчета, так как от последней зависит тензор $\nabla_k x^i{}_p$. Далее будет предполагаться, что функция Λ выбрана таким образом, что ни она сама, ни определяемые через нее компоненты тензоров $P_i{}^j$, $P_i{}^{jl}$ и т. д., взятые в системе отсчета наблюдателя, не зависят от выбора сопутствующей системы координат. Это предположение будет выполнено, например, если $\nabla_k x^i{}_p$ входят в Λ следующим образом: сначала $x^i{}_p$ свертывается по индексу p с некоторым тензором Q^{Bp}, а затем берется производная ∇_k. Именно такое положение имеет место в большинстве моделей, рассмотренных ранее.

Будем изучать далее такие процессы, когда

$$\delta W^* = 0$$

Вопрос о задании δW^* представляет собой отдельную задачу, которая здесь не рассматривается.

Из уравнения (1.1), полагая предварительно вариации переменных и их производных на Σ равными нулю и принимая во внимание, что δW представляется в виде интеграла по Σ от линейной комбинации вариаций переменных и их производных, получим

$$\Theta^{ij} = 0, \quad \text{если} \quad \partial^* g_{ij} \neq 0, \quad \nabla_j\Theta^{ij} = 0, \qquad M_A = 0, \qquad X_i = 0 \tag{1.11}$$

Дополнительно из уравнения (1.1) для вариаций, отличных от нуля на Σ, имеем

$$\delta W = \int_\Sigma \{\Theta^{il}\eta_i + S^{ijl}\partial g_{ij} + S^{ijkl}\nabla_k\partial g_{ij} + P_A{}^l\delta\mu^A +$$
$$+ P_A{}^{jl}\nabla_j\delta\mu^A + P_i{}^l\delta x^i + P_i{}^{jl}\nabla_j\delta x^i\} n_l d\sigma$$

Уравнение (1.1) представляет собой некоторое обобщение записи закона сохранения энергии. В уравнении (1.1) содержатся члены, описывающие работу при мысленном изменении (варьировании) метрики, полевых функций и траекторий частиц среды. Рассмотрим, с чем связаны вклады в баланс энергии отдельных членов, входящих в δW. Тензор $P_i{}^j$ «работает» на изменениях на границе области V мировых линий частиц среды, т. е. являются четырехмерным обобщением трехмерного тензора напряжений — тензором энергии-импульса. Помимо P_i^j совершают работу при изменении траекторий и некоторые «двусилы» P_i^{jl}, смысл которых будет уточнен ниже. Члены δW, содержащие тензоры Θ^{ij}, S^{ijl}, S^{ijkl}, определяют работу, производимую при изменении метрики, физический же смысл тензоров $P_A{}^j$, $P_A{}^{jl}$ зависит от природы величин μ^A.

Законы сохранения, в которых участвуют $P_i{}^j$, $P_i{}^{jl}$, $P_A{}^j$, $P_A{}^{jl}$, можно получить при помощи теоремы Неттер. Потребуем инвариантности интеграла по четырехмерной области V от лагранжиана Λ относительно r параметрической группы движений риманова многообразия G (т. е. группы, не меняющей метрики многообразия G). Пусть под действием группы переменные x^i и μ^A меняются следующим образом:

$$\delta x^i = X_a{}^i\delta\omega^a, \qquad \delta\mu^A = M_a^A\delta\omega^a$$

Здесь $\delta\omega^a$ — параметры группы (предполагается, что $\nabla_k\delta\omega^a = 0$). При этом меняется интеграл от Λ по области V

$$\delta\int\limits_V \Lambda\, d\tau = \int\limits_\Sigma F_a{}^l\delta\omega^a n_l d\sigma$$

где

$$F_a{}^l = P_i{}^l X_a{}^i + P_i{}^{jl}\nabla_j X_a{}^i + P_A{}^l M_a^A + P_A^{jl}\nabla_j M_a^A \tag{1.12}$$

Из требования инвариантности интеграла от функции Λ, вычисленного по области V, получаем

$$\nabla_l F_a{}^l = 0 \qquad (a = 1, 2, \dots r) \tag{1.13}$$

В частности, в рамках СТО в инерциальной прямолинейной системе отсчета для группы Лоренца, в которой в качестве параметров выбраны компоненты антисимметричного тензора $\delta\omega_{ij}$

$$\delta\mu^A = M^{Aij}\delta\omega_{ij}$$

уравнение (1.13) приобретает вид

$$\frac{\partial M^{ijk}}{\partial x^k} = P^{ij} - P^{ji}, \qquad M^{ijk} = P^{jik} - P^{ijk} + P_A{}^k M^{Aij} + P_A{}^{kl}\frac{\partial M^{Aij}}{\partial x^l} \tag{1.14}$$

Для того чтобы придать компонентам тензора M^{ijk} физический смысл, сравним уравнение (1.14) с трехмерным нерелятивистским уравнением баланса внутреннего момента количества движения, записанным в дивергентной форме

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho m^{\alpha\beta} + \frac{\partial}{\partial x^\gamma}(\rho m^{\alpha\beta}v^\gamma - Q^{\alpha\beta\gamma}) = p^{\beta\alpha} - p^{\alpha\beta} + \rho h^{\alpha\beta} \tag{1.15}$$

Здесь $m^{\alpha\beta}$ — тензор внутреннего момента количества движения, v^γ — трехмерная скорость, $Q^{\alpha\beta\gamma}$ — поверхностный внутренний момент, $p^{\alpha\beta}$ — тензор напряжений, $h^{\alpha\beta}$ — массовый внутренний момент. Будем считать в дальнейшем $h^{\alpha\beta} = 0$.

Можно предположить, что уравнения (1.14) и (1.15) описывают одинаковые физические явления (при $h^{\alpha\beta} = 0$) и отождествить

$$\frac{1}{c} M^{\alpha\beta 4} = \rho m^{\alpha\beta}, \qquad M^{\alpha\beta\gamma} = \rho m^{\alpha\beta} v^{\gamma} - Q^{\alpha\beta\gamma}$$

где c — скорость света.

Итак, «двусилы» P_i^{jl} связаны с наличием внутреннего момента количества движения. Возникновение P_i^{jl} в настоящих построениях вызвано тем, что в число аргументов Λ включены градиенты величин x^i_p и $\nabla_j \mu^A$; следовательно, модели сплошных сред, у которых в число определяющих параметров входят $\nabla_k x^{i}_{p}$ или вторые производные полевых функций обладают, вообще говоря, и внутренним моментом количества движения.

Рассмотрим теперь более подробно уравнения (1.2)—(1.10) в ОТО (общей теории относительности). В ОТО полагают [3]

$$\Lambda = R / 2\varkappa + \Lambda_m$$

где R скалярная кривизна многообразия G, Λ_m — лагранжиан материи, а $\varkappa = \mathrm{const}$ (без труда последующие выводы можно обобщить на случай переменной $\varkappa$). Тогда, поскольку $\partial^* g_{ij} \neq 0$ имеет место первое из уравнений [1] (1.11), которое принимает здесь вид уравнений Эйнштейна

$$\Theta^{ij} = \frac{1}{\varkappa} \left(R^{ij} - \frac{1}{2} R g^{ij}\right) + T^{ij} = 0$$

где R^{ij} — тензор Риччи, а через T^{ij} обозначено выражение

$$T^{ij} = -2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\frac{\partial \Lambda_m \sqrt{-g}}{\partial g_{ij}} - \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial \Lambda_m \sqrt{-g}}{\partial (\partial g_{ij} / \partial x^k)} + \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial \Lambda_m \sqrt{-g}}{\partial (\partial^2 g_{ij} / \partial x^k \partial x^l)} \right) + \right.$$
$$\left. + \nabla_k \Psi^{ijk} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Lambda}{\partial \nabla_s \nabla_p \mu^A} \frac{\partial \nabla_p \mu^A}{\partial \Gamma_{lm}{}^n} B_{lm}{}^{nkqr} \left(R_{skq}{}^i \delta_r{}^j + R_{skr}{}^j \delta_q{}^i\right) \right\} \qquad (1.18)$$

В силу уравнения $\nabla_j \Theta^{ij} = 0$ и тождеств Бьянки, тензор T^{ij} удовлетворяет соотношению,

$$\nabla_j T^{ij} = 0$$

Благодаря последнему обстоятельству в ОТО принимают, что T^{ij} есть тензор энергии-импульса. Как следует из (1.16), правая часть уравнений Эйнштейна, обозначенная через T^{ij}, в общем случае содержит также тензор кривизны многообразия пространства-времени R_{ijk}^{l}.

Предположим теперь, что лагранжиан материи Λ_m зависит от $\partial g_{ij} / \partial x^k$ и $\partial^2 g_{ij} / \partial x^k \partial x^l$ лишь через ковариантные производные ∇_i, $\nabla_i \nabla_j$.

---

[1] Заметим, что в СТО $\partial^* g_{ij} = 0$ и первого из уравнений (1.11) нет, для Θ^{ij} остается второе из уравнений (1.11). В СТО возможны лишь изменения метрики $\partial^{**} g_{ij} = \nabla_i \eta_j + \nabla_j \eta_i$, соответствующие переходу, вообще говоря, к неинерциальной системе отсчета, при этом в уравнении, характеризующем баланс энергии, появляются добавочные члены (1.1)

$$\int_\Sigma \Theta^{il} \eta_i n_l \, d\sigma, \qquad \int_\Sigma S^{ijl} \partial^{**} g_{ij} n_l \, d\sigma, \qquad \int_\Sigma S^{ijkl} \nabla_k \partial^{**} g_{ij} n_l \, d\sigma$$

Тогда последнее из уравнений (1.11) легко привести к виду (1.17)

$$\nabla_j P_{(m)i}{}^j + \frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla_j x^l{}_s} x^k{}_s R_{ijk}{}^l + \frac{1}{2}\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla_j x^l{}_s} x^k{}_s R_{jki}{}^l - \frac{1}{2}\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla_j\nabla_k\mu^A}\nabla_l\mu^A R_{jki}{}^l +$$

$$+ \frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla_j\mu^A}(\nabla_i\nabla_j\mu^A - \nabla_j\nabla_i\mu^A) + \frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla_j\nabla_k\mu^A}(\nabla_i\nabla_j\nabla_k\mu^A - \nabla_j\nabla_k\nabla_i\mu^A) = 0$$

где через $P_{(m)i}^{\ j}$ обозначен тензор, получающийся по формуле (1.9), в которой вместо Λ поставлено Λ_m. В СТО уравнение (1.17) приобретает обычный вид

$$\nabla_j P_{(m)i}^{\ j} = 0 \tag{1.18}$$

В ОТО дивергенция тензора $P^j_{(m)i}$, который является каноническим тензором энергии-импульса, в нуль, вообще говоря, уже не обращается, она будет линейно выражаться через тензор кривизны $R_{ijk}^{\ \ \ l}$, как следует из (1.17).

Итак, в общем случае имеются три различных тензора энергии-импульса: симметричный T^{ij}, канонический $P_{(m)i}^{\ j}$ и $P_i{}^j$, причем

$$P_i{}^j = P_{(m)\,i}{}^j - \frac{1}{2\varkappa}R\delta_i{}^j$$

Для некоторых моделей $P^{ij}_{(m)}$ и T^{ij} совпадают. Это будет иметь место, например, для сред, у которых $\Lambda_m = \Lambda_m\,(g^\wedge{}_{pq}, K^C)$, где $g^\wedge{}_{pq}$ — метрический тензор в сопутствующей системе отсчета. К таким средам относится, в частности, и идеальная жидкость, поскольку ее плотность ρ можно выразить через $g^\wedge{}_{pq}$ (см. формулы (3.3) и (2.3)).

2. Деформируемые упругие среды. Будем изучать далее модели сплошных сред, лагранжиан материи которых зависит от величин

$$g^\wedge{}_{pq}, \quad u^\wedge{}_p, \quad \nabla^\wedge{}_r u^\wedge{}_p, \quad g^{\circ pq}, \quad u^{\circ p}, \quad \nabla^\wedge{}_r g^\circ{}_{pq}, \quad \nabla^\wedge{}_r u^\circ{}_p \tag{2.1}$$

где $u^\wedge{}_r$ — компоненты ковектора *4* — скорости в сопутствующей системе отсчета, $g^{\circ pq}$ — контравариантные компоненты метрического тензора в начальном состоянии, $u^{\circ p}$ — компоненты вектора *4* — скорости в начальном состоянии, а символ $\nabla^\wedge$ указывает, что ковариантные производные вычисляются в сопутствующей системе координат [1].

Выберем для определенности метрику в многообразии пространства-времени, которую в каждой точке можно привести к виду

$$g_{11} = g_{22} = g_{23} = -g_{44} = -1, \qquad g_{\alpha 4} = 0$$

при этом дифференциал длины дуги ds вдоль мировой линии

$$ds^2 = g_{ij}\,dx^i dx^j = g^\wedge{}_{44} d\xi^{4^2}$$

будет действительной величиной ($g^\wedge{}_{44} > 0$), а элемент пространственного расстояния чисто мнимой. Длина вектора *4* — скорости при таком выборе знакоопределенности метрики положительна и равна $+1$. Для компо-

[1] Здесь и далее символ $^\wedge$ будет означать, что соответствующая величина берется в сопутствующей системе отсчета. Тензоры в системе отсчета наблюдателя при написании употребляются, как и ранее, без символа $^\wedge$.

нент вектора u^j в системе отсчета наблюдателя x^i верна формула

$$u^j = \frac{dx^j}{ds} = \left(g_{lm}\frac{\partial x^l}{\partial \xi^4}\frac{\partial x^m}{\partial \xi^4}\right)^{-1/2}\frac{\partial x^j}{\partial \xi^4} = \frac{x^j{}_4}{\sqrt{g^\wedge{}_{44}}} \tag{2.2}$$

В сопутствующей системе координат по определению имеем

$$u^{\wedge p} = \frac{\delta_4{}^p}{\sqrt{g^\wedge{}_{44}}}, \qquad u^\wedge{}_p = g^\wedge{}_{pq}u^{\wedge q} = \frac{g^\wedge{}_{p4}}{\sqrt{g^\wedge{}_{44}}} \tag{2.3}$$

Дальше, по предположению, пространство начальных состояний введем как риманово пространство с метрикой, определенной формулами

$$g^\circ{}_{pq}(\xi^\alpha, \xi^4) = g^\wedge{}_{pq}(\xi^\alpha, \xi_0{}^4), \qquad \xi_0{}^4 = \mathrm{const}, \qquad \nabla^\wedge{}_4 g^\circ{}_{pq} \neq 0$$

Вектор 4 — скорости в начальном состоянии определен равенством

$$u^\circ{}_p(\xi^\alpha, \xi^4) = u^\wedge{}_p(\xi^\alpha, \xi_0{}^4), \qquad \xi_0{}^4 = \mathrm{const}, \qquad \nabla^\wedge{}_4 u^\circ{}_p \neq 0$$

По определению под тензорами $g^{\circ pq}$ и $u^{\circ p}$ будем понимать

$$g^{\circ pq} = \frac{1}{g^\circ}\frac{\partial g^\circ}{\partial g^\circ{}_{pq}}, \qquad g^\circ = \det\|g^\circ{}_{pq}\|, \qquad u^{\circ p} = g^{\circ pq}u^\circ{}_q$$

Легко видеть, что определенные таким образом тензорные поля зависят от того, в какой сопутствующей системе координат производилось их построение. Это обстоятельство не будет иметь места, если ограничиться такими сопутствующими системами отсчета, что от одной из них к другой можно перейти при помощи соотношения вида

$$\eta^\alpha = \eta^\alpha(\xi^\beta), \qquad \eta^4 = \xi^4 + \varphi(\xi^\alpha) \tag{2.4}$$

Ниже будут допускаться сопутствующие системы отсчета, для которых формулы перехода имеют вид (2.4). Последнее предположение выделяет весьма широкий класс сопутствующих систем отсчета, поскольку в общем случае две сопутствующие системы отсчета ξ^i и η^j (т. е. системы отсчета, координатные линии ξ^4 и η^4 которых совпадают с мировыми линиями частиц среды) связаны преобразованием

$$\eta^\alpha = \eta^\alpha(\xi^\beta), \qquad \eta^4 = \eta^4(\xi^\alpha, \xi^4) \tag{2.5}$$

Покажем, что для системы аргументов (2.1) тензор энергии-импульса $P_i{}^j$ и «двусилы» $P_i{}^{jk}$, определяющие по формулам (1.9), (1.10), не зависят от выбора сопутствующей системы отсчета (напомним, что в формулы (1.9), (1.10) входит тензор $\nabla_k x^i{}_p$, зависящий от выбора последней).

Для этого потребуется найти выражения

$$\frac{\partial g^\wedge{}_{pq}}{\partial x^i{}_s}x^j{}_s, \quad \frac{\partial g^\wedge{}_{pq}}{\partial \nabla_k x^l{}_s}, \quad \frac{\partial u^\wedge{}_p}{\partial x^i{}_s}x^j{}_s, \quad \frac{\partial u^\wedge{}_p}{\partial \nabla_k x^l{}_s}, \quad \frac{\partial \nabla^\wedge{}_r u^\wedge{}_p}{\partial x^i{}_s}, \quad \frac{\partial \nabla^\wedge{}_r u^\wedge{}_p}{\partial \nabla_k x^l{}_s}, \quad \frac{\partial \nabla^\wedge{}_r u^\wedge{}_p}{\partial \nabla_k x^i{}_s}x^j{}_s$$

$$\frac{\partial \nabla^\wedge{}_r g^\circ{}_{pq}}{\partial x^i{}_s}x^j{}_s, \quad \frac{\partial \nabla^\wedge{}_r g^\circ{}_{pq}}{\partial \nabla_k x^l{}_s}, \quad \frac{\partial \nabla^\wedge{}_r g^\circ{}_{pq}}{\partial \nabla_k x^i{}_s}x^j{}_s$$

$$\frac{\partial \nabla^\wedge{}_r u^\circ{}_p}{\partial x^i{}_s}x^j{}_s, \quad \frac{\partial \nabla^\wedge{}_r u^\circ{}_p}{\partial \nabla_k x^l{}_s}, \quad \frac{\partial \nabla^\wedge{}_r u^\circ{}_p}{\partial \nabla_k x^i{}_s}x^j{}_s$$

Учитывая (2.3), получаем

$$\frac{\partial g^\wedge{}_{pq}}{\partial x^i{}_s}x^j{}_s = x^j{}_s\frac{\partial}{\partial x^i{}_s}(g_{lm}x^l{}_p x^m{}_q) = g_{lm}(\delta_i{}^l x^j{}_p x^m{}_q + \delta_i{}^m x^j{}_q x^l{}_p)$$

$$\frac{\partial u^\wedge{}_p}{\partial x^i{}_s}x^j{}_s = x^j{}_s\frac{\partial}{\partial x^i{}_s}\left(\frac{g^\wedge{}_{p4}}{\sqrt{g^\wedge{}_{44}}}\right) = g_{li}(x^l{}_p u^j + x^j{}_p u^l) - u^\wedge{}_p u_i u^j \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial g^\wedge{}_{pq}}{\partial \nabla_k x^l{}_s} = \frac{\partial u^\wedge{}_p}{\partial \nabla_k x^l{}_s} = 0$$

Дальше, для упрощения окончательных уравнений, примем, что ξ^4 является длиной дуги вдоль соответствующей мировой линии [1], при этом $u^j = x^j{}_4$, $\hat g_{44} = +1$.

При определении производных по $x^i{}_s$ и $\nabla_k x^l{}_s$ от $\hat\nabla_r \hat u_p$, $\hat\nabla_r g^\circ{}_{pq}$, $\hat\nabla_r u^\circ{}_p$ надо воспользоваться формулой

$$\hat\nabla_r \hat u_p = \nabla_{mi}\, u_n\, x^m{}_r\, x^n{}_p$$

и учесть, что $\hat\nabla_r g^\circ{}_{pq}$, $\hat\nabla_r u^\circ{}_p$ зависят от $x^i{}_s$ и $\nabla_k x^l{}_s$ лишь через объект связности $\hat\Gamma_{lm}{}^h$, причем для $\hat\Gamma_{lm}{}^h$ имеет место соотношение

$$\hat\Gamma_{lm}{}^h = \Gamma_{pk}{}^n x^p{}_l x^k{}_m \xi^h{}_n + \frac{\partial^2 x^n}{\partial\xi^l \partial\xi^m}\xi^h{}_n = \xi^h{}_n x^k{}_m\left(\frac{\partial}{\partial x^k} x^n{}_l + \Gamma_{pk}{}^n x^p{}_l\right) =$$
$$= \xi^h{}_n x^k{}_m \nabla_k x^n{}_l = \xi^h{}_n x^k{}_l \nabla_k x^n{}_m \tag{2.7}$$

где через $\xi^h{}_n$ обозначены частные производные ξ^h по x^n: $\xi^h{}_n = \partial\xi^h / \partial x^n$. Используя (2.7) и формулы [2]

$$\frac{\partial\nabla_m u_n}{\partial x^i{}_s} x^j{}_s = u^j \nabla_m \gamma_{ni}, \qquad \frac{\partial\nabla_m u_n}{\partial\nabla_k x^l{}_s} = \delta_m{}^k \hat u^s \gamma_{nl}$$
$$\frac{\partial\nabla_m u_n}{\partial\nabla_k x^i{}_s} x^j{}_s = \delta_m{}^k u^j \gamma_{nl} \quad (\gamma_{nl} = g_{nl} - u_n u_l) \tag{2.8}$$

находим [3]

$$\frac{\partial\hat\nabla_r \hat u_p}{\partial x^i{}_s} x^j{}_s = u^j \nabla_m \gamma_{ni} x^m{}_r x^n{}_p + \nabla_m u_n (\delta_i{}^m x^j{}_r x^n{}_p + \delta_i{}^n x^j{}_p x^m{}_r)$$
$$\frac{\partial\hat\nabla_r \hat u_p}{\partial\nabla_k x^l{}_s} = \hat u^s \gamma_{nl} x^k{}_r x^n{}_p, \qquad \frac{\partial\hat\nabla_r \hat u_p}{\partial\nabla_k x^i{}_s} x^j{}_s = u^j \gamma_{ni} x^k{}_r x^n{}_p$$
$$\frac{\partial\hat\nabla_r g^\circ{}_{pq}}{\partial x^i{}_s} x^j{}_s = \frac{\partial\hat\nabla_r g^\circ{}_{pq}}{\partial\hat\Gamma_{lm}{}^h}\frac{\partial\hat\Gamma_{lm}{}^h}{\partial x^i{}_s} x^j{}_s =$$
$$= -(g^\circ{}_{mq}\delta_p{}^s + g^\circ{}_{mp}\delta_q{}^s)(x^j{}_r \xi^m{}_l \delta_i{}^k - x^k{}_r \xi^m{}_i \delta_l{}^j)\nabla_k x^l{}_s \tag{2.9}$$

---

[1] Несмотря на то, что при таком ограничении на ξ^4 верно соотношение $u^j = x^j{}_4$ имеют место неравенства

$$\delta u^j \neq \delta x^j{}_4, \qquad \frac{\partial u^k}{\partial x^i{}_s} x^j{}_s \neq \frac{\partial x^k{}_4}{\partial x^i{}_s} x^j{}_s$$

Это связано с тем, что для проварьированных мировых линий ξ^4 уже не будет являться длиной дуги. Если потребовать, чтобы и для проварьированных мировых линий координата ξ^4 представляла собой длину дуги, то получилось бы нежелательное ограничение для вариаций

$$u^i u^j \nabla_i \delta x_j = 0$$

[2] Отметим, что формулы (2.8) и, следовательно, первые три соотношения из равенств (2.9) будут иметь тот же вид в метрике со знакоопределением $(+++-)$, если положить в них

$$\gamma_{nl} = g_{nl} + u_n u_l$$

[3] Здесь учтено также, что

$$(\partial\xi^h{}_n / \partial x^i{}_s)\, x^j{}_s = -\xi^h{}_i \delta_n{}^j$$

Действительно, если через x обозначить детерминант матрицы $||x^i{}_j||$, то

$$\frac{\partial\xi^h{}_n}{\partial x^i{}_s} x^j{}_s = x^j{}_s \frac{\partial}{\partial x^i{}_s}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial x}{\partial x^n{}_h}\right) = \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x^n{}_h}\left(\frac{\partial x}{\partial x^i{}_s} x^j{}_s\right) - \frac{1}{x}\frac{\partial x}{\partial x^i{}_s}\frac{\partial x^j{}_s}{\partial x^n{}_h} -$$
$$-\frac{1}{x^2}\frac{\partial x}{\partial x^n{}_h} x^j{}_s \frac{\partial x}{\partial x^i{}_s} = \frac{1}{x}\delta_i{}^j \frac{\partial x}{\partial x^n{}_h} - \xi^h{}_i \delta_n{}^j - \xi^h{}_n x^j{}_s \xi^s{}_i = -\xi^h{}_i \delta_n{}^j$$

$$\frac{\partial\nabla^{\wedge}{}_r g^\circ{}_{pq}}{\partial\nabla_k x^l{}_s}=\frac{\partial\nabla^{\wedge}{}_r g^\circ{}_{pq}}{\partial\Gamma^{\wedge}{}_{nm}{}^h}\frac{\partial\Gamma^{\wedge}{}_{nm}{}^h}{\partial\nabla_k x^l{}_s}=-(g^\circ{}_{mq}\delta_p{}^s+g^\circ{}_{mp}\delta_q{}^s)\,x^k{}_r\xi^m{}_l$$

$$\frac{\partial\nabla^{\wedge}{}_r g^\circ{}_{pq}}{\partial\nabla_k x^i{}_s}x^j{}_s=-(g^\circ{}_{mq}\delta_p{}^s+g^\circ{}_{mp}\delta_q{}^s)\,x^k{}_r\xi^m{}_l$$

$$\frac{\partial\nabla^{\wedge}{}_r u^\circ{}_p}{\partial x^i{}_s}x^j{}_s=\frac{\partial\nabla^{\wedge}{}_r u^\circ{}_p}{\partial\Gamma^{\wedge}{}_{lm}{}^h}\frac{\partial\Gamma^{\wedge}{}_{lm}{}^h}{\partial x^i{}_s}x^j{}_s=-u^\circ{}_m\delta_p{}^s\,(x^j{}_r\xi^m{}_l\delta_i{}^k-x^k{}_r\xi^m{}_i\delta_l{}^j)\,\nabla_k x^l{}_s$$

$$\frac{\partial\nabla^{\wedge}{}_r u^\circ{}_p}{\partial\nabla_k x^l{}_s}=\frac{\partial\nabla^{\wedge}{}_r u^\circ{}_p}{\partial\Gamma^{\wedge}{}_{nm}{}^h}\frac{\partial\Gamma^{\wedge}{}_{nm}{}^h}{\partial\nabla_k x^l{}_s}=-u^\circ{}_m\delta_p{}^s x^k{}_r\xi^m{}_l,\qquad \frac{\partial\nabla^{\wedge}{}_r u^\circ{}_p}{\partial\nabla_k x^i{}_s}x^j{}_s=-u^\circ{}_m\xi^m{}_i x^k{}_r x^j{}_p$$

Подставляем (2.6), (2.8) и (2.9) в (1.9), (1.10)

$$P_{(m)i}{}^j=-x^j{}_s\frac{\partial\Lambda_m}{\partial x^i{}_s}-\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla_k x^l{}_s}(\delta_i{}^l\nabla_k x^j{}_s-\delta_k{}^j\nabla_i x^l{}_s)-\nabla_k P_i{}^{jk}-\Lambda_m\delta_i{}^j= \tag{2.10}$$

$$=-\frac{\partial\Lambda_m}{\partial g^{\wedge}{}_{pq}}\frac{\partial g^{\wedge}{}_{pq}}{\partial x^i{}_s}x^j{}_s-\frac{\partial\Lambda_m}{\partial u^{\wedge}{}_p}\frac{\partial u^{\wedge}{}_p}{\partial x^i{}_s}x^j{}_s-\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla^{\wedge}{}_r u^{\wedge}{}_p}\frac{\partial\nabla^{\wedge}{}_r u^{\wedge}{}_p}{\partial x^i{}_s}x^j{}_s-$$

$$-\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla^{\wedge}{}_r g^\circ{}_{pq}}\frac{\partial\nabla^{\wedge}{}_r g^\circ{}_{pq}}{\partial x^i{}_s}x^j{}_s-\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla^{\wedge}{}_r u^\circ{}_p}\frac{\partial\nabla^{\wedge}{}_r u^\circ{}_p}{\partial x^i{}_s}x^j{}_s-\left(\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla^{\wedge}{}_r u^{\wedge}{}_p}\frac{\partial\nabla^{\wedge}{}_r u^{\wedge}{}_p}{\partial\nabla_k x^l{}_s}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla^{\wedge}{}_r g^\circ{}_{pq}}\frac{\partial\nabla^{\wedge}{}_r g^\circ{}_{pq}}{\partial\nabla_k x^l{}_s}+\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla^{\wedge}{}_r u^\circ{}_p}\frac{\partial\nabla^{\wedge}{}_r u^\circ{}_p}{\partial\nabla_k x^l{}_s}\right)(\delta_i{}^l\nabla_k x^j{}_s-\delta_k{}^j\nabla_i x^l{}_s)-$$

$$-\nabla_k P_i{}^{jk}-\Lambda_m\delta_i{}^j=-\frac{\partial\Lambda_m}{\partial g^{\wedge}{}_{pq}}g_{lm}(\delta_i{}^l x^j{}_p x^m{}_q+\delta_i{}^m x^j{}_q x^l{}_p)-$$

$$-\frac{\partial\Lambda_m}{\partial u^{\wedge}{}_p}[g_{li}(x^l{}_p u^j+x^j{}_p u^l)-u^{\wedge}{}_p u_i\,u^j]-\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla^{\wedge}{}_r u^{\wedge}{}_p}[u^j\nabla_m\Upsilon_{ni}\,x^m{}_r x^n{}_p+$$

$$+\nabla_m u_n(\delta_i{}^m x^j{}_r x^n{}_p+\delta_i{}^n x^j{}_p x^m{}_r)]+\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla^{\wedge}{}_r g^\circ{}_{pq}}(g^\circ{}_{mq}\delta_p{}^s+g^\circ{}_{mp}\delta_q{}^s)(x^j{}_r\xi^m{}_l\delta_i{}^k-$$

$$-x^k{}_r\xi^m{}_i\delta_l{}^j)\nabla_k x^l{}_s+\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla^{\wedge}{}_r u^\circ{}_p}u^\circ{}_m\delta_p{}^s(x^j{}_r\xi^m{}_l\delta_i{}^k-x^k{}_r\xi^m{}_i\delta_l{}^j)\nabla_k x^l{}_s-$$

$$-\left[\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla^{\wedge}{}_r u^{\wedge}{}_p}u^{\wedge s}\Upsilon_{nl}x^k{}_r x^n{}_p-\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla^{\wedge}{}_r g^\circ{}_{pq}}(g^\circ{}_{mq}\delta_p{}^s+g^\circ{}_{mp}\delta_q{}^s)x^k{}_r\xi^m{}_l-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla^{\wedge}{}_r u^\circ{}_p}u^\circ{}_m\xi^m{}_l x^k{}_r\delta_p{}^s\right](\delta_i{}^l\nabla_k x^j{}_s-\delta_k{}^j\nabla_i x^l{}_s)-\nabla_k P_i{}^{jk}-\Lambda_m\delta_i{}^j$$

$$P_i{}^{jk}=-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla_k x^i{}_s}x^j{}_s+(j\leftrightarrow k)\right]=-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla^{\wedge}{}_r u^{\wedge}{}_p}\frac{\partial\nabla^{\wedge}{}_r u^{\wedge}{}_p}{\partial\nabla_k x^i{}_s}x^j{}_s+\right.\right. \tag{2.11}$$

$$\left.\left.+\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla^{\wedge}{}_r g^\circ{}_{pq}}\frac{\partial\nabla^{\wedge}{}_r g^\circ{}_{pq}}{\partial\nabla_k x^i{}_s}x^j{}_s+\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla^{\wedge}{}_r u^\circ{}_p}\frac{\partial\nabla^{\wedge}{}_r u^\circ{}_p}{\partial\nabla_k x^i{}_s}x^j{}_s\right)+(j\leftrightarrow k)\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla^{\wedge}{}_r u^{\wedge}{}_p}u^q\Upsilon_{ln}\xi^s{}_q x^l{}_m x^n{}_p-\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla^{\wedge}{}_r g^\circ{}_{pq}}(g^\circ{}_{mq}\delta_p{}^s+\right.\right.$$

$$\left.\left.+g^\circ{}_{mp}\delta_q{}^s)-\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla^{\wedge}{}_r u^\circ{}_s}u^\circ{}_m\right)\xi^m{}_i x^j{}_s x^k{}_r+(j\leftrightarrow k)\right]$$

Все слагаемые, содержащие $\nabla_k x_\alpha{}^i$, как и следовало ожидать, сокращаются. Это и подтверждает тот факт, что для системы аргументов (2.1) тензоры $P_{(m)i}^{\ j}$ и P_i^{jk} не зависят от выбора сопутствующей системы отсчета.

Формулы (2.10), (2.11) дают в сопутствующей системе координат для контравариантных компонент канонического тензора энергии-импульса $\hat{P}_{(m)}^{ij}$ и для связанного с внутренним моментом количества движения и внутренними поверхностными моментами тензора $P^{\wedge ijk}$ выражения [1]:

$$P_{(m)}^{\wedge ij} = -2\frac{\partial\Lambda_m}{\partial g^{\wedge}_{ij}} - \left(u^{\wedge i}\frac{\partial\Lambda_m}{\partial u^{\wedge}_j} + u^{\wedge j}\frac{\partial\Lambda_m}{\partial u^{\wedge}_i}\right) + \left(u^{\wedge}{}_p\frac{\partial\Lambda_m}{\partial u^{\wedge}{}_p}\right)u^{\wedge i}u^{\wedge j} -$$

$$-\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla^{\wedge}{}_r u^{\wedge}{}_p}\nabla^{\wedge}{}_r(u^{\wedge j}\gamma^{\wedge}{}_p{}^i + u^{\wedge i}\delta_p{}^j) - \nabla^{\wedge}{}_k P^{\wedge ijk} - \Lambda_m g^{\wedge ij}$$

$$P^{\wedge ijk} = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla^{\wedge}{}_k u^{\wedge}{}_p}u^{\wedge j}\gamma^{\wedge}{}_p{}^i - 2g^{\wedge ip}g^{\circ}{}_{pq}\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla^{\wedge}{}_k g^{\circ}{}_{qj}} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - g^{\wedge ip}u^{\circ}{}_p\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla^{\wedge}{}_k u^{\circ}{}_j}\right) + (j\leftrightarrow k)\right] \tag{2.12}$$

Уравнения движения (1.17) в рассматриваемом случае имеют вид

$$\nabla^{\wedge}{}_j P_{(m)i}^{\wedge}{}^j + \Lambda^{\wedge jk}{}_l R^{\wedge}{}_{ijk}{}^l = 0$$

$$\Lambda^{\wedge jk}{}_l = \frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla_j x^l{}_s}x^k{}_s + \frac{1}{2}g^{\wedge}{}_{lp}g^{\wedge qj}\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla_k x^q{}_s}x^p{}_s = u^{\wedge k}\gamma^{\wedge}{}_{lp}\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla^{\wedge}{}_j u^{\wedge}{}_p} -$$

$$-2g^{\circ}{}_{lq}\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla^{\wedge}{}_j g^{\circ}{}_{qk}} - u^{\circ}{}_l\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla^{\wedge}{}_j u^{\circ}{}_k} + \frac{1}{2}u^{\wedge}{}_l\gamma^{\wedge}{}_p{}^j\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla^{\wedge}{}_k u^{\wedge}{}_p} -$$

$$-g^{\wedge js}g^{\wedge}{}_{lp}g^{\circ}{}_{sq}\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla^{\wedge}{}_k g^{\circ}{}_{pq}} - \frac{1}{2}g^{\wedge js}g^{\wedge}{}_{lp}u^{\circ}{}_s\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla^{\wedge}{}_r u^{\circ}{}_p} \tag{2.13}$$

3. Одно обобщение модели упругого тела. В качестве примера рассмотрим в рамках СТО ($\Lambda = \Lambda_m$) систему уравнений, описывающих модель упругого тела, в число определяющих параметров которой входят производные по времени и координатам от тензора конечных деформаций. Как известно [5], в этом случае нельзя получить все уравнения состояния из первого закона термодинамики и использование вариационного принципа представляется полезным.

Определим сначала тензор конечных деформаций в СТО (в ОТО аналогично). При образовании тензора конечных деформаций надо учесть, что расстояние в трехмерном пространстве (т. е. расстояние между двумя одновременными событиями) задается при помощи объекта γ_{ij} ([3], стр. 286)

$$-dl^2 = \gamma_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta, \qquad \gamma_{ij} = g_{ij} - g_{i4}g_{j4}\,/\,g_{44}, \qquad \gamma_{i4} = \gamma_{4i} = 0$$

Для измерения трехмерных расстояний в сопутствующей системе отсчета можно построить тензор [4]

$$\gamma^{\wedge}{}_{pq} = g^{\wedge}{}_{pq} - u^{\wedge}{}_p u^{\wedge}{}_q$$

причем $\gamma^{\wedge}{}_{pq}$ в силу равенств (2.3) в системе ξ^i совпадает с объектом [2]

[1] При получении уравнений (2.12) использовано тождество

$$\nabla^{\wedge}{}_i u^{\circ}{}_p = \gamma^{\wedge}{}_{pl}\nabla^{\wedge}{}_i u^{\wedge l}$$

[2] В метрике со знакоопределением (+++−) $\gamma^{\wedge}{}_{pq} = g^{\wedge}{}_{pq} + u^{\wedge}{}_p u^{\wedge}{}_q$, так как в этом случае формулы (2.3) записываются иначе

$$u^{\wedge p} = \frac{\delta_4{}^p}{\sqrt{-g^{\wedge}{}_{44}}}, \qquad u^{\wedge}{}_p = \frac{g^{\wedge}{}_{p4}}{\sqrt{-g^{\wedge}{}_{44}}}$$

$g^{\wedge}_{pq} - g^{\wedge}_{p4}g^{\wedge}_{q4} / g^{\wedge}_{44}$. В системе координат, не являющейся сопутствующей, компоненты тензора $g_{pq} - u_p u_q$, разумеется, уже не определяют трехмерное расстояние. Для того чтобы охарактеризовать деформацию, необходимо сравнить элемент длины $dl^2(\xi^\alpha, \xi^4, d\xi^\alpha)$ с элементом длины в начальном состоянии, т. е. с $dl^2(\xi^\alpha, \xi_0^4, d\xi^\alpha) = dl_0^2$ (существенно, что элемент длины между двумя одновременными событиями в сопутствующей системе отсчета является четырехмерным инвариантом — $-dl^2 = \gamma'_{\alpha\beta}d\xi^\alpha d\xi^\beta = \gamma^{\wedge}_{pq}d\xi^p d\xi^q$). Элемент длины в начальном состоянии характеризуется тензорным полем γ_{pq}°

$$dl_0^2 = \gamma_{pq}^{\circ}\, d\xi^p d\xi^q, \quad \gamma_{pq}^{\circ}(\xi^\alpha, \xi^4) = \gamma^{\wedge}_{pq}(\xi^\alpha, \xi_0^4) = g_{pq}^{\circ} - u_p^{\circ} u_q^{\circ} \qquad (3.1)$$

$$\xi_0^4 = \mathrm{const}, \quad \nabla^{\wedge}_4 \gamma_{pq}^{\circ} \neq 0, \qquad \gamma_{4p}^{\circ} = \gamma_{p4}^{\circ} = 0$$

Тензор конечных деформаций $E^{\wedge}_{pq}$ строится [1] следующим образом [1]:

$$\frac{1}{2}(dl^2 - dl_0^2) = E^{\wedge}_{pq} d\xi^p d\xi^q, \quad E^{\wedge}_{pq} = -\frac{1}{2}(\gamma^{\wedge}_{pq} - \gamma^{\circ}_{pq}), \quad E^{\wedge}_{p4} = E^{\wedge}_{4p} = 0$$

Отметим, что тензорное поле γ_{pq}°, образованное по закону (3.1), не зависит от того, в какой сопутствующей системе координат оно строилось (в силу (2.5) и соотношения $\gamma^{\wedge}_{p4} = \gamma^{\wedge}_{4p} = 0$), поэтому настоящее определение тензора конечных деформаций является естественным.

Предположим теперь, что в число определяющих параметров входят величины

$$g^{\circ pq}, \quad u^{\circ p}, \quad u^{\wedge}_p, \quad E^{\wedge}_{pq}, \quad \nabla^{\wedge}_r E^{\wedge}_{pq}, \quad K^{\wedge C}$$

Случай, когда в число аргументов Λ входят $g^{\circ pq}$, $E^{\wedge}_{pq}$, $K^{\wedge C}$, в СТО рассмотрен Л. И. Седовым [1], аналогичный вопрос в ньютонианской механике является классическим. В работе [8] изучена в рамках ньютонианской механики модель, в число определяющих параметров которой входят производные по координатам от тензора конечных деформаций. Настоящая модель представляет собой модель упругого тела, лагранжиан которой зависит от первых производных по времени от определяющих параметров.

Уравнения (1.9), (1.10) (или, что для рассматриваемой модели то же (2.12)) являются искомыми уравнениями состояния. В силу равенств

$$\frac{\partial E^{\wedge}_{ls}}{\partial g^{\wedge}_{pq}} = -\frac{1}{4}(\delta_p^l \delta_q^s + \delta_p^s \delta_q^l), \qquad \frac{\partial E^{\wedge}_{ls}}{\partial u^{\wedge}_p} = \frac{1}{2}(\delta_l^p u^{\wedge}_s + \delta_s^p u^{\wedge}_l)$$

$$\frac{\partial \nabla^{\wedge}_m E^{\wedge}_{ls}}{\partial g^{\wedge}_{pq}} = 0, \qquad \frac{\partial \nabla^{\wedge}_m E^{\wedge}_{ls}}{\partial u^{\wedge}_p} = \frac{1}{2}(\delta_s^p \nabla^{\wedge}_m u^{\wedge}_l + \delta_l^p \nabla^{\wedge}_m u^{\wedge}_s),$$

$$\frac{\partial \nabla^{\wedge}_m E^{\wedge}_{ls}}{\partial \nabla^{\wedge}_r u^{\wedge}_p} = \frac{1}{2}\delta_m^r (\delta_l^p u^{\wedge}_s + \delta_s^p u^{\wedge}_l)$$

$$\frac{\partial \nabla^{\wedge}_m E^{\wedge}_{ls}}{\partial \nabla^{\wedge}_r g^{\circ}_{pq}} = \frac{1}{4}\delta_m^r (\delta_l^p \delta_s^q + \delta_s^p \delta_l^q), \qquad \frac{\partial \nabla^{\wedge}_m E^{\wedge}_{ls}}{\partial \nabla^{\wedge}_r u^{\circ}_p} = -\frac{1}{2}\delta_m^r (\delta_l^p u^{\circ}_s + \delta_s^p u^{\circ}_l)$$

---

[1] В настоящей работе используется знакоопределенность метрики $(---+)$. Для метрики $(+++-)$ тензор конечных деформаций образуется так

$$E^{\wedge}_{pq} = 1/2(\gamma^{\wedge}_{pq} - \gamma^{\circ}_{pq})$$

из формул (2.12) получаются следующие выражения для контравариантных компонент тензора энергии-импульса $P_{(m)}^{\hat{}ij}$ и тензора $P^{\hat{}ijk}$

$$P_{(m)}^{\hat{}ij} = P^{\hat{}ij} = \frac{\partial\Lambda}{\partial E^{\hat{}}_{ij}} - u^{\hat{}i}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial u^{\hat{}}_j} + u^{\hat{}}_q \frac{\partial\Lambda}{\partial E^{\hat{}}_{qj}}\right) - u^{\hat{}j}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial u^{\hat{}}_i} + u^{\hat{}}_q \frac{\partial\Lambda}{\partial E^{\hat{}}_{qi}}\right) +$$
$$+ u^{\hat{}i}u^{\hat{}j}\left(u^{\hat{}}_p \frac{\partial\Lambda}{\partial u^{\hat{}}_p} + u^{\hat{}}_p u^{\hat{}}_q \frac{\partial\Lambda}{\partial E^{\hat{}}_{pq}}\right) + \frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla^{\hat{}}_r E^{\hat{}}_{pq}} \nabla^{\hat{}}_r (\gamma^{\hat{}}{}_p^i \gamma^{\hat{}}{}_q^j) -$$
$$- \nabla^{\hat{}}_k P^{\hat{}ijk} - \Lambda g^{\hat{}ij}$$

$$P^{\hat{}ijk} = -\frac{1}{2}\left[(u^{\hat{}}_p u^{\hat{}j} \gamma^{\hat{}}{}_p^i - \delta_p^j g^{\hat{}is}\gamma^{\circ}_{sq}) \frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla^{\hat{}}_k E^{\hat{}}_{pq}} + (j \leftrightarrow k)\right]$$

После очевидных преобразований для компонент тензора $P_i^{\hat{}j}$ со смешанными индексами имеем

$$P^{\hat{}}{}_i^j = \gamma^{\hat{}}_{ip}\gamma^{\hat{}}{}_q^j \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial E^{\hat{}}_{pq}} - \nabla^{\hat{}}_k \frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla^{\hat{}}_k E^{\hat{}}_{pq}}\right) - (\gamma^{\hat{}}_{ip} u^{\hat{}j} + \delta_p^j u^{\hat{}}_i) \frac{\partial\Lambda}{\partial u^{\hat{}}_p} +$$
$$+ \nabla^{\hat{}}_k \left(\gamma^{\hat{}}_{ip}\gamma^{\hat{}}{}_q^j \frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla^{\hat{}}_k E^{\hat{}}_{pq}} - P^{\hat{}}{}_i^{jk}\right) - \Lambda\delta_i^j$$

$$P^{\hat{}}{}_i^{jk} = \frac{1}{2}\gamma^{\hat{}}_{iq}\left(\gamma^{\hat{}}{}_p^j \frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla^{\hat{}}_k E^{\hat{}}_{pq}} + \gamma^{\hat{}}{}_p^k \frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla^{\hat{}}_j E^{\hat{}}_{pq}}\right) + \tag{3.2}$$
$$+ E^{\hat{}}_{iq}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla^{\hat{}}_k E^{\hat{}}_{qj}} + \frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla^{\hat{}}_j E^{\hat{}}_{qk}}\right)$$

Тензор энергии-импульса изучаемой среды оказался несимметричным. Вводя плотность ρ по формуле

$$\rho = \rho_0 \sqrt{\gamma^{\circ}} / \sqrt{\gamma^{\hat{}}}, \qquad \gamma^{\circ} = \det\|\gamma^{\circ}_{\alpha\beta}\|, \qquad \gamma^{\hat{}} = \det\|\gamma^{\hat{}}_{\alpha\beta}\| \tag{3.3}$$

и имея в виду соотношения

$$g^{\hat{}\alpha\beta}\gamma^{\hat{}}_{\beta\sigma} = \delta_\sigma^\alpha, \qquad \partial\rho / \partial E^{\hat{}}_{\alpha\beta} = -2\partial\rho / \partial\gamma^{\hat{}}_{\alpha\beta} = \rho g^{\alpha\beta}$$

можно записать уравнение для пространственной части тензора энергии-импульса в форме

$$P^{\hat{}\alpha\beta} = \rho\frac{\partial(\Lambda/\rho)}{\partial E^{\hat{}}_{\alpha\beta}} - \nabla^{\hat{}}_k P^{\hat{}\alpha\beta k} - \frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla^{\hat{}}_k E^{\hat{}}_{pq}} \nabla^{\hat{}}_k (\gamma^{\hat{}}{}_p^\alpha \gamma^{\hat{}}{}_q^\beta) \tag{3.4}$$

Помимо сопутствующей системы координат введем в каждой точке пространственно-временного континуума так называемую собственную систему координат — ортонормированную прямолинейную систему отсчета, в которой элемент среды, находящийся в данной точке многообразия пространства — времени, покоится. Величины, вычисленные относительно этой системы координат, будем отмечать символом *. Известно, что в собственной системе координат пространственная часть тензора энергии-импульса $P^{*\alpha\beta}$ имеет смысл тензора напряжений, взятого с обратным знаком

$$P^{*\alpha\beta} = -p^{\alpha\beta} \tag{3.5}$$

Здесь $p^{\alpha\beta}$ — тензор напряжений. Таким образом, формулы (3.4), написанные в собственной системе отсчета, дают выражение для тензора напряжений. В частности, если $\Lambda = \Lambda(g^{\circ pq}, u^{\circ p}, E^{\hat{}}_{pq})$ (классическое упругое тело), то

$$p^{\alpha\beta} = -\rho \frac{\partial(\Lambda/\rho)}{\partial E^*{}_{\alpha\beta}} \tag{3.6}$$

Постулируем далее, что в собственной системе координат законы термодинамики (и, следовательно, термодинамические соотношения) должны иметь тот же вид, что и в нерелятивистской механике. Тогда

$$p^{\alpha\beta} = \rho \frac{\partial U}{\partial E^*{}_{\alpha\beta}} \tag{3.7}$$

где U — внутренняя энергия на единицу массы. Сравнение (3.6) и (3.7) дает

$$\Lambda = -\rho U$$

При этом из (3.2) вытекает, что $P^{\wedge}{}_4{}^4 = \rho U$.

В рассматриваемом частном случае тензор напряжений оказывается симметричным. Однако, если в аргументы Λ входят градиенты тензора конечных деформаций, то $p^{\alpha\beta} \neq p^{\beta\alpha}$ за счет того, что $P^{\alpha\beta k} \neq P^{\beta\alpha k}$. Отметим также, что тензор напряжений будет линейно зависеть от ускорения частиц среды. Этот факт не имеет нерелятивистского аналога.

Для того чтобы получить выражения для компонент тензора напряжений в рамках ньютонианской механики, достаточно осуществить в (3.4) формальную операцию — положить [1]

$$\gamma^{\wedge}{}_{\alpha\beta} = g^{\wedge}{}_{\alpha\beta}, \qquad \gamma^{\wedge\alpha}{}_{\beta} = \delta_\beta{}^\alpha, \qquad \gamma^{\wedge}{}_\alpha{}^4 = 0$$

---

[1] Это следует из формул

$$\delta E^{\wedge}{}_{pq} = {}^1/_2\left(\gamma^{\wedge}{}_p{}^i\gamma_q{}^j + \gamma^{\wedge}{}_q{}^i\gamma^{\wedge}{}_p{}^j\right)\nabla^{\wedge}{}_j(\delta x^i)^{\wedge}$$

$$\begin{gathered}\delta\nabla^{\wedge}{}_r E^{\wedge}{}_{pq} = {}^1/_2\left[\nabla^{\wedge}{}_r\left(\gamma^{\wedge}{}_p{}^i\gamma^{\wedge}{}_q{}^j + \gamma^{\wedge}{}_q{}^i\gamma^{\wedge}{}_p{}^j\right)\right]\nabla^{\wedge}{}_j(\delta x_i)^{\wedge} + \\ + \left[{}^1/_2\left(\gamma^{\wedge}{}_p{}^i\gamma_q{}^j + \gamma^{\wedge}{}_q{}^i\gamma^{\wedge}{}_p{}^j\right) - \left(E^{\wedge}{}_p{}^i\delta_q{}^j + E^{\wedge}{}_q{}^i\delta_p{}^j\right)\right]\nabla^{\wedge}{}_r\nabla^{\wedge}{}_j(\delta x_i)^{\wedge}\end{gathered} \tag{3.8}$$

Действительно, для того чтобы (3.4) давало выражение для тензора напряжений в нерелятивистской механике, необходимо, чтобы $\delta E^{\wedge}{}_{pq}$ и $\delta\nabla^{\wedge}{}_r E^{\wedge}{}_{pq}$ при $p, q = 1, 2, 3$; $r = 1, 2, 3, 4$ совпадали с вариациями ньютонианского тензора деформаций $\varepsilon^{\wedge}{}_{\alpha\beta} = (g^{\wedge}{}_{\alpha\beta} - g^{\circ}{}_{\alpha\beta})/2$ и его градиентов, $g^{\wedge}{}_{\alpha\beta}$ — метрический тензор в сопутствующей системе отсчета в обычном пространстве, при этом, очевидно, $E^{\wedge}{}_{\alpha\beta} = \varepsilon^{\wedge}{}_{\alpha\beta}$. Если заметить, что справедливы соотношения

$$\delta\varepsilon^{\wedge}{}_{\alpha\beta} = {}^1/_2\left(\delta_\alpha{}^\sigma\delta_\beta{}^\omega + \delta_\beta{}^\sigma\delta_\alpha{}^\omega\right)\nabla^{\wedge}{}_\sigma(\delta x_\omega)^{\wedge}$$

$$\delta\nabla^{\wedge}{}_\gamma\varepsilon^{\wedge}{}_{\alpha\beta} = \left[{}^1/_2\left(\delta_\alpha{}^\sigma\delta_\beta{}^\omega + \delta_\beta{}^\sigma\delta_\alpha{}^\omega\right) - \left(\varepsilon^{\wedge}{}_\alpha{}^\omega\delta_\beta{}^\sigma + \varepsilon^{\wedge}{}_\beta{}^\omega\delta_\alpha{}^\sigma\right)\right]\nabla^{\wedge}{}_\gamma\nabla^{\wedge}{}_\sigma(\delta x_\omega)^{\wedge},$$

$$\delta\nabla^{\wedge}{}_4\varepsilon^{\wedge}{}_{\alpha\beta} = \delta\frac{1}{c}\frac{\partial\varepsilon^{\wedge}{}_{\alpha\beta}}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\delta_\alpha{}^\sigma\delta_\beta{}^\omega + \delta_\beta{}^\sigma\delta_\alpha{}^\omega\right)\nabla^{\wedge}{}_4\nabla^{\wedge}{}_\sigma(\delta x_\omega)^{\wedge}$$

то очевидно, что формальная операция, указанная в тексте, действительно приводит к выражению для ньютонианского тензора напряжений. Отметим, что формулы (3.8) верны лишь в том случае, когда не варьируется метрика многообразия пространства-времени ($\partial g_{ij} = 0$), причем последняя из них выполняется только в плоском пространстве, поскольку при ее выводе было использовано равенство

$$\delta\frac{\partial}{\partial\xi^q}x^i{}_p = \frac{\partial}{\partial\xi^q}\delta x^i{}_p$$

которое не имеет места, если тензор кривизны $R_{ijk}{}^l$ отличен от нуля.

В этом случае последний член в (3.4) обращается в нуль и тензор напряжений приобретает вид

$$p^{\wedge\alpha\beta} = -\rho\frac{\partial(\Lambda/\rho)}{\partial E^{\wedge}_{\alpha\beta}} + \nabla^{\wedge}_{k}P^{\wedge\alpha\beta k} \tag{3.9}$$

Сравнение (3.9) для модели классического упругого тела с формулой (3.7), записанной в сопутствующей системе отсчета, показывает, что в ньютонианской механике в качестве Λ можно взять функцию $\Lambda = -\rho(U + f)$, где f не зависит от тензора конечных деформаций. Если принять, что $\Lambda = -\rho(U + f)$, причем внутренняя энергия U содержит тензор конечных деформаций и его производные по пространственным координатам, а f не зависит от последних, то (3.9) и в этом случае совпадает с уравнениями состояния, которые следуют из первого начала термодинамики для обратимых процессов [1]. Когда Λ содержит также и производную по времени от тензора конечных деформаций, то добавляется новый член $\nabla^{\wedge}_{4}P^{\wedge\alpha\beta4}$, который нельзя получить, используя первое начало термодинамики.

Напишем теперь выражения для компонент тензора $P^j{}_i$, имеющих временную составляющую, в собственной системе отсчета некоторой частицы среды. Принимая во внимание, что в собственной системе отсчета

$$\gamma^*_{\alpha\beta} = g^*_{\alpha\beta},\quad \gamma^{*\alpha\beta} = g^{*\alpha\beta},\quad \gamma^{*k4} = \gamma^{*4k} = \gamma^*_{k4} = \gamma^*_{4k} = \gamma^*{}_k{}^4 = \gamma^*{}_4{}^k = 0$$

$$g^*_{11} = g^*_{22} = g^*_{33} = -g^*_{44} = -1,\quad u^{*4} = u^*_4 = 1,\quad u^{*\alpha} = u^*_\alpha = 0$$

$$\partial u^*_4 / \partial x^{*k} = \partial u^{*4} / \partial x^{*k} = 0$$

---

[1] В нерелятивистской механике сплошных сред уравнения состояния получают из первого начала термодинамики [1, 5]

$$dU = \frac{1}{\rho}p^{\alpha\beta}\nabla_\beta v_\alpha\,dt + \frac{1}{\rho}dq^{(e)} + \frac{1}{\rho}dq^{**}$$

где $dq^{(e)}$ — приток тепла и dq^{**} — нетепловой приток энергии. Вводя перемещения $W_\alpha = v_\alpha dt$, можно написать

$$dU = \frac{1}{\rho}p^{\alpha\beta}\nabla_\beta w_\alpha + \frac{1}{\rho}dq^{(e)} + \frac{1}{\rho}dq^{**}$$

Построение моделей в ньютонианской механике связано с различными предположениями относительно аргументов U и вида $dq^{(e)}$ и dq^{**}. В частности, если принять, что $U = U(g^{\circ\alpha\beta}E^{\wedge}{}_{\alpha\beta},\ \nabla^{\wedge}{}_\gamma E^{\wedge}{}_{\alpha\beta},\ S)$ процессы в каждой малой частице обратимы ($\rho^{-1}dq^{(e)} = TdS$) и dq^{**} есть приток энергии через границу каждой малой частицы $dq^{**} = \nabla_\gamma Q^\gamma$, где $Q^\gamma = Q^{\alpha\beta\gamma}\nabla_\beta w_\alpha$, причем $Q^{\alpha\beta\gamma} = Q^{\alpha\gamma\beta}$, то из (3.9) можно получить, что в этом случае соответствующие уравнения состояния, полученные из вариационного принципа и первого начала термодинамики, совпадают. Надо отметить, что нетепловой приток энергии dq^{**} зависит для таких моделей от угловых скоростей, в то время как внутренняя энергия от угловых скоростей не зависит. Модели, для которых внутренняя энергия является функцией тензора конечных деформаций и его пространственных производных, а величина dq^{**} не зависит от угловых скоростей, рассмотрены в работе М. А. Идина [9]. При получении соответствующих моделей из вариационного принципа необходимо принять, что функционал δW^* отличен от нуля.

имеем

$$P^*{}_4{}^4 = P^{*44} = P^*{}_{44} = -\Lambda - \frac{\partial\Lambda}{\partial u^*{}_4} + \frac{1}{2}\frac{\partial\Lambda}{\partial(E^*{}_{\alpha\beta}/\partial x^{*4})}\frac{\partial u^*{}_\beta}{\partial x^{*\alpha}} - \\ -\frac{\partial}{\partial x^{*k}}\left[E^*{}_q{}^4\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial E^*{}_{q4}/\partial x^{*k})} + \frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial E^*{}_{qk}/\partial x^{*4})}\right)\right] \qquad (3.10)$$

$$P^*{}_4{}^\alpha = -\frac{\partial\Lambda}{\partial u^*{}_\alpha} - \frac{1}{2}\frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial E^*{}_{\alpha\beta}/\partial x^{*k})}\frac{\partial u^*{}_\beta}{\partial x^{*k}} + \frac{1}{2}\frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial E^*{}_{\beta\gamma}/\partial x^{*\alpha})}\frac{\partial u^*{}_\beta}{\partial x^{*\gamma}} - \\ -\frac{\partial}{\partial x^{*k}}\left[E^*{}_{q4}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial E^*{}_{q\alpha}/\partial x^{*k})} + \frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial E^*{}_{qk}/\partial x^{*\alpha})}\right)\right]$$

$$P^*{}_\alpha{}^4 = -g_{\alpha\beta}{}^*\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial u^*{}_\beta} + \frac{1}{2}\frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial E^*{}_{\beta\gamma}/\partial x^{*k})}\frac{\partial u^*{}_\gamma}{\partial x^{*k}}\right) - \\ -\frac{\partial}{\partial x^{*k}}\left[\frac{1}{2}\gamma^*{}_{\alpha p}\gamma^*{}_q{}^k\frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial E^*{}_{pq}/\partial x^{*4})} + E^*{}_{\alpha q}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial E^*{}_{q4}/\partial x^{*k})} + \frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial E^*{}_{qk}/\partial x^{*4})}\right)\right]$$

Для модели классического упругого тела в СТО $\Lambda = \Lambda(g^{\circ pq}, u^{\circ p}, E^\wedge{}_{pq})$ было показано, что Λ есть плотность внутренней энергии (с обратным знаком), что дает при помощи (3.10) $P^*{}_4{}^4 = \rho U$. При изучении более сложных моделей, например $\Lambda = \Lambda(g^{\circ pq}, u^{\circ p}, u^{\wedge p}, E^\wedge{}_{pq})$ или $\Lambda = \Lambda(g^{\circ pq}, u^{\circ p}, E^\wedge{}_{pq}, \nabla^\wedge{}_r E^\wedge{}_{pq})$ легко видеть, что $P^*{}_4{}^4 \neq -\Lambda$. Очевидно, что вопрос о том, что считать для таких моделей плотностью внутренней энергии — $P^*{}_4{}^4$ или $(-\Lambda)$ — есть вопрос определения.

Величины $P^*{}_4{}^\alpha$ при пространственных преобразованиях представляют собой компоненты трехмерного вектора. Этот вектор определяет нетепловой приток энергии к частице среды. В случае классической упругости $\Lambda = \Lambda(g^{\circ pq}, u^{\circ p}, E^\wedge{}_{pq})$ нетепловой приток энергии отсутствует. Если в число определяющих параметров входят градиенты деформаций, то тогда этот приток энергии становится существенным и его необходимо учитывать. Компоненты тензора энергии-импульса $P^*{}_\alpha{}^4$ и $P^\wedge{}_\alpha{}^4$ для рассматриваемой модели отличны от нуля. Это указывает на то, что в собственной системе отсчета, в которой покоится элемент среды, и в сопутствующей системе отсчета, в которой вся среда покоится, тем не менее, существует макроскопический перенос количества движения. Он возникает в связи с тем, что существует нетепловой поток энергии, который, как известно, вызывает поток количества движения. Кроме того, макроскопический перенос количества движения связан с наличием внутреннего момента количества движения (так как $P^{*ij} \neq P^{*ji}$). Члены, входящие в выражение для $P^*{}_\alpha{}^4$, не имеют нерелятивистского аналога.

Уравнения состояния (3.2) вместе с уравнениями движения (1.18) образуют замкнутую систему уравнений, описывающих данную модель сплошной среды в СТО. В ОТО, как отмечалось выше, дивергенция канонического тензора энергии-импульса в нуль, вообще говоря, не обращается. Для $P_{(m)i}{}^j$ будет иметь место уравнение (1.17), которое для изучаемой среды приобретает форму

$$\hat{\nabla}_j \hat{P}_{(m)i}{}^{j} + \hat{\Lambda}_l{}^{jk} \hat{R}_{ijk}{}^{l} = 0$$

$$\hat{\Lambda}^{jk}{}_l = \hat{u}^k \hat{\gamma}_{lq} \hat{u}_p \frac{\partial \Lambda_m}{\partial \hat{\nabla}_j \hat{E}_{pq}} - \gamma^\circ{}_{lq} \frac{\partial \Lambda_m}{\partial \hat{\nabla}_j \hat{E}_{qk}} + \frac{1}{2} \hat{u}_l \hat{\gamma}_p{}^j \hat{u}_q \frac{\partial \Lambda_m}{\partial \hat{\nabla}_k \hat{E}_{pq}} - {}$$
$$- \frac{1}{2} \hat{g}^{js} \hat{g}_{lp} \gamma^\circ{}_{sq} \frac{\partial \Lambda_m}{\partial \hat{\nabla}_k \hat{E}_{pq}}$$

4. Одно обобщение модели идеальной сжимаемой жидкости. В качестве другого примера рассмотрим в СТО некоторое обобщение модели идеальной сжимаемой жидкости, когда $\delta W^* = 0$. Пусть в число определяющих параметров входят величины

$$\hat{g}^{pq}, \quad \hat{u}^p, \quad \rho, \quad \partial\rho / \partial\xi^k$$

Соответствующая модель в ньютонианской механике, содержащая среди определяющих параметров производные по координатам от плотности ρ рассмотрена в работе М. Э. Эглит [6], а производные по времени от ρ в работе С. Б. Когарко [7].

Проделав выкладки, аналогичные тем, которые приводились для предыдущего примера, получим в сопутствующей системе координат следующие выражения для канонического тензора энергии-импульса $\hat{P}^{ij}$ и тензора «двусил» $\hat{P}^{ijk}$

$$\hat{P}^{ij} = 2\hat{g}^{ip}\hat{g}^{jq} \frac{\partial \Lambda}{\partial \hat{g}^{pq}} + \left(\hat{u}^p \frac{\partial \Lambda}{\partial \hat{u}^p}\right) \hat{u}^i \hat{u}^j + \rho \frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} \hat{\gamma}^{ij} + {}$$
$$+ \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial\rho/\partial\xi^k} \hat{\nabla}_k (\rho \hat{\gamma}^{ij}) - \hat{\nabla}_k \hat{P}^{ijk} - \Lambda \hat{g}^{ij}$$

$$\hat{P}^{ijk} = \frac{1}{2} \rho \left(\hat{\gamma}^{ij} \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial\rho / \partial\xi^k)} + \hat{\gamma}^{ik} \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial\rho / \partial\xi^j)} \right)$$

Тензор $\hat{M}^{ijk}$, описывающий внутренний момент количества движения и внутренние поверхностные моменты, для рассматриваемой модели, вообще говоря, отличен от нуля. Действительно, согласно определению M^{ijk}, имеем

$$\hat{M}^{ijk} = \hat{P}^{jik} - \hat{P}^{ijk} = \frac{1}{2} \rho \left(\hat{\gamma}^{jk} \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial\rho / \partial\xi^i)} - \hat{\gamma}^{ik} \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial\rho / \partial\xi^j)} \right)$$

Из уравнения (4.1) для $\hat{M}^{ijk}$ имеем

$$\hat{\nabla}_k \hat{M}^{ijk} = \hat{P}^{ij} - \hat{P}^{ji}$$

Эти соотношения совпадают с полученными из других предположений формулами (1.14).

В случае идеальной сжимаемой жидкости, когда Λ зависит лишь от плотности ρ, тензор энергии-импульса $\hat{P}^{ij}$ принимает вид

$$\hat{P}^{ij} = \left(\rho \frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} - \Lambda\right) \hat{g}^{ij} - \rho \frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} \hat{u}^i \hat{u}^j = \rho^2 \frac{\partial (\Lambda / \rho)}{\partial \rho} \hat{g}^{ij} - \rho \frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} \hat{u}^i \hat{u}^j =$$
$$= \rho^2 \frac{\partial (\Lambda / \rho)}{\partial \rho} \hat{\gamma}^{ij} - \Lambda \hat{u}^i \hat{u}^j$$

Здесь уже тензор энергии-импульса симметричен.

Выпишем теперь в собственной системе координат компоненты тензора энергии-импульса идеальной жидкости, полученные при помощи вариационного принципа, а также выражения, известные для них из релятивистской механики сплошных сред [3]

$$\| P^{*ij} \| = \left\| \begin{matrix} -\rho^2 \dfrac{\partial(\Lambda/\rho)}{\partial\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho^2 \dfrac{\partial(\Lambda/\rho)}{\partial\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho^2 \dfrac{\partial/(\Lambda/\rho)}{\partial\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Lambda \end{matrix} \right\|, \qquad \| P^{*ij} \| = \left\| \begin{matrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho U \end{matrix} \right\| \tag{4.2}$$

где U — внутренняя энергия на единицу массы, измеренная наблюдателем в собственной системе отсчета каждого данного элемента жидкости, p — давление, причем, как следует из первого начала термодинамики, $p = \rho^2 \partial U / \partial\rho$. Сравнение двух матриц из (4.2) позволяет сделать вывод [1]

$$\Lambda = -\rho U$$

Рассмотрим теперь свойства тензора энергии-импульса в частном случае идеальной сжимаемой жидкости, внутренняя энергия которой зависит от «производной по времени» плотности ρ

$$\frac{d\rho}{ds} = u^{\wedge k} \nabla^{\wedge}{}_k \rho = u^{\wedge k} \frac{\partial\rho}{\partial\xi^k}$$

Изучение отдельно такой модели представляет интерес, поскольку, как показано С. Б. Когарко [7] в ньютонианской механике, модели кавитирующей жидкости соответствует как раз зависимость внутренней энергии от производной по времени плотности ρ.

Предположим, что

$$\Lambda = -\rho(\Lambda_1 + \Lambda_2), \quad \Lambda_1 = \Lambda_1(\rho), \quad \Lambda_2 = \frac{1}{2}\lambda \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 = \frac{1}{2}\lambda \,(u^{\wedge p} \nabla^{\wedge}{}_p \rho)\,(u^{\wedge q} \nabla^{\wedge}{}_q \rho)$$

где λ — неварьируемый скаляр. Из (4.1) получаем [2]

$$P^{\wedge ij} = -\left(p_1 + \rho\Lambda_2 - \frac{1}{2}\lambda\rho^2 \frac{d^2\rho}{ds^2}\right)\gamma^{\wedge ij} + \left(\rho\Lambda_1 - \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}\lambda\rho^2 \frac{d\rho}{ds}\right)\right) u^{\wedge i} u^{\wedge j} +$$
$$+ \nabla^{\wedge i}\left(\frac{1}{2}\lambda\rho^2 \frac{d\rho}{ds} u^{\wedge j}\right) \tag{4.3}$$

---

[1] В метрике со знакоопределением $(+++-)$ $\Lambda = \rho U$. К этому результату, исходя из вариационного принципа в другой форме и иначе определенных вариаций, пришел H. G. Schöpf [4].

[2] Здесь использовано также уравнение неразрывности $\nabla^{\wedge}{}_k(\rho u^{\wedge k}) = 0$. Действительно, если учесть соотношение $\det \| g^{\wedge}{}_{ij} \| = g^{\wedge} = \gamma^{\wedge} g^{\wedge}{}_{44}$, то нетрудно проверить, что плотность ρ, определенная по формуле (3.3), удовлетворяет закону сохранения массы покоя [4]

$$\nabla^{\wedge}{}_k(\rho u^{\wedge k}) = \frac{1}{\sqrt{-g^{\wedge}}} \frac{\partial}{\partial\xi^k}\left(\sqrt{-g^{\wedge}}\, u^{\wedge k}\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{-g^{\wedge}}} \frac{\partial}{\partial\xi^k}\left(\sqrt{-g^{\wedge}}\, \frac{\sqrt{-\gamma^0}}{\sqrt{-g^{\wedge}}} \times \sqrt{g^{\wedge}{}_{44}}\, \frac{\delta_4^k}{\sqrt{g^{\wedge}{}_{44}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{-g^{\wedge}}} \frac{\partial}{\partial\xi^4} \sqrt{-\gamma^0} = 0$$

Здесь $p_1 = \rho^2 \partial \Lambda_1 / \partial \rho$. Тензор энергии-импульса оказался несимметричным, поэтому необходимо учитывать также внутренний момент количества движения жидкости, связанный с тензором

$$M^{\wedge ijk} = P^{\wedge jik} - P^{\wedge ijk} = -\frac{1}{2} \lambda \rho^2 \frac{d\rho}{ds} (\gamma^{\wedge ki} u^{\wedge j} - \gamma^{\wedge kj} u^{\wedge i}) =$$

$$= -\frac{1}{2} \lambda \rho^2 \frac{d\rho}{ds} (g^{\wedge ki} u^{\wedge j} - g^{\wedge kj} u^{\wedge i})$$

При этом

$$M^{\wedge \alpha\beta k} = 0, \qquad M^{\wedge \alpha 4 k} = -M^{\wedge 4 \alpha k} = -\frac{1}{2} \lambda \rho^2 \frac{d\rho}{ds} g^{\wedge \alpha k}$$

Однако

$$\nabla^{\wedge}{}_k M^{\wedge \alpha\beta k} \neq 0, \qquad \nabla^{\wedge}{}_k M^{\wedge \alpha 4 k} \neq -\frac{1}{2} \nabla^{\wedge}{}_k \left(\lambda \rho^2 \frac{d\rho}{ds} g^{\wedge \alpha k}\right)$$

Несимметричным является, в частности, и тензор напряжений. Для тензора напряжений из (4.3) в собственной системе отсчета следует

$$p^{*\alpha\beta} = \left(p_1 + \rho\Lambda_2 - \frac{1}{2} \lambda \rho^2 \frac{d^2\rho}{ds^2}\right) g^{*\alpha\beta} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha^*} \left(\frac{1}{2} \lambda \rho^2 \frac{d\rho}{ds} u^{*\beta}\right).$$

$$g^{*11} = g^{*22} = g^{*33} = -1, \qquad g^{*\alpha\beta} = 0 \text{ при } \alpha \neq \beta$$

Тензор напряжений, как и в ньютонианской теории, линейно зависит от вторых «производных по времени» плотности ρ, однако, в отличие от модели С. Б. Когарко, тензор напряжений не является шаровым.

Выпишем выражения для следующих компонент тензора энергии-импульса:

$$P^*{}_4{}^\alpha = \frac{\partial}{\partial x^{*4}} \left(\frac{1}{2} \lambda \rho^2 \frac{d\rho}{ds} u^{*\alpha}\right), \qquad P^*{}_\alpha{}^4 = \frac{\partial}{\partial x^{*\alpha}} \left(\frac{1}{2} \lambda \rho^2 \frac{d\rho}{ds}\right), \qquad P^*{}_4{}^4 = \rho\Lambda_1 \quad (4.4)$$

Из (4.4) видно, что в рассматриваемой модели жидкости в каждой частице имеется нетепловой приток энергии, определяемый трехмерным вектором $P^*{}_4{}^\alpha$. Этот приток энергии зависит не только от первых и вторых производных по времени плотности частицы, но и от ее ускорения. Кроме того, в собственной системе отсчета существует макроскопический перенос количества движения, описываемый трехмерным вектором $P^*{}_\alpha{}^4$. Компонента $P^*{}_4{}^4$ не совпадает, как следует из (4.4), с $(-\Lambda)$.

Внутренняя энергия U в общем случае содержит в качестве аргумента и энтропию S. Однако, если включить S в число аргументов Λ, то получилось бы

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial S} = 0$$

Для модели идеальной жидкости отсюда следует

$$\frac{\partial U}{\partial S} = 0$$

Последнее обстоятельство связано с предположением о том, что $\delta W^* = 0$. Поскольку для произвольных процессов $\partial U / \partial S \neq 0$ необходимо принять, что в δW^* входит интеграл

$$\int_V Q_A \delta\mu^A d\tau$$

причем для $\mu^A = S$ соответствующий коэффициент Q_A, отнесенный к единице массы, имеет смысл абсолютной температуры T, а интеграл, входящий в δW^*, имеет вид

$$\int\limits_V \rho T \delta S\, d\tau$$

В качестве лагранжиана для идеальной жидкости и упругого тела можно брать не только внутреннюю энергию, но и другие термодинамические потенциалы, например, плотность свободной энергии ρF. При этом выражение для тензора напряжений не изменится, однако смысл компоненты $P^{\wedge}{}_4^4$ станет другим: $P^{\wedge}{}_4^4 = \rho F$. Так как в аргументы свободной энергии F входит абсолютная температура, то интеграл по области V, входящий в δW^*, принимает вид

$$-\int\limits_V \rho S \delta T\, d\tau$$

Автор благодарит Л. И. Седова за ценные указания, сделанные в процессе работы и при чтении рукописи.

Поступила 12 XI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Математические методы построения моделей сплошных сред. Успехи матем. наук, 1965, т. 20, № 5, стр. 121—180.
2. Седов Л. И. О тензоре энергии-импульса и о макроскопических внутренних взаимодействиях в гравитационном поле и материальных средах. Докл. АН СССР, 1965, т. 164, № 3, стр. 519—522.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. Физматгиз, М., 1962.
4. Schöpf H.-G. Allgemeinrelativistische Prinzipien der Kontinuumsmechanik. Ann. Phys. 7 Folge, Bd. 12, Hf. 7—8, 1963, 373—395.
5. Седов Л. И. Некоторые проблемы построения новых моделей сплошных сред. Тр. XV Всемирного конгресса по теоретической и прикладной механике. Мюнхен, 1965.
6. Эглит М. Э. Одно обобщение модели идеальной сжимаемой жидкости. ПММ, 1965, вып. 2, т. 29.
7. Когарко С. Б. Об одной модели кавитирующей жидкости. Докл. АН СССР, 1961, т. 137, № 6, стр. 1331—1333.
8. Casal P. Capillarite interne en mecaniqe des miliex continus. Compt. Rend. Acad. Sci., 1963, vol. 256, No. 18, p. 3820—3822.
9. Идин М. А. Анизотропные сплошные среды, энергия и напряжения которых зависят от градиентов деформации и других тензорных величин. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3.