

## О ВЛИЯНИИ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОГО ФРОНТА ПЛАМЕНИ

А. Г. Истратов, В. Б. Либрович

(Москва)

Абсолютная неустойчивость плоского фронта ламинарного пламени, доказанная Л. Д. Ландау [1, 2], получена в предположении, что число Рейнольдса, построенное по длине волны возмущения, бесконечно велико. Это обстоятельство позволило Л. Д. Ландау при исследовании устойчивости рассматривать уравнения идеальной жидкости, а фронт пламени считать бесконечно тонким гидродинамическим скачком, который распространяется относительно газа с известной постоянной нормальной скоростью пламени.

Настоящая работа посвящена определению следующего приближения к решению Л. Д. Ландау по малой величине, обратной числу Рейнольдса. В этом приближении (число Рейнольдса велико, но не бесконечно велико) требуется учитывать влияние на устойчивость пламени процессов переноса (вязкости, диффузии, теплопроводности), которые изменяют поле течения газа вне пламени и определяют саму структуру пламени. Кроме того, следует учитывать изменение скорости химической реакции в пламени, что влияет на скорость его распространения относительно горючей смеси.

Результаты, полученные для простого теплового механизма распространения пламени, позволяют определить критическую длину волны возмущений и соответствующее ей критическое число Рейнольдса, для которых ламинарное пламя оказывается устойчивым. Критическое число Рейнольдса зависит от степени теплового расширения газа при горении, чисел Прандтля и Льюиса и безразмерной энергии активации химической реакции.

Отметим, что работы по исследованию влияния стабилизирующих факторов на устойчивость ламинарного пламени [3-9] грешат существенными недостатками. В ряде работ [3, 4, 6] авторы проявили непонимание асимптотического характера теории неустойчивости Л. Д. Ландау и вследствие этого допускали непоследовательности в вычислении поправок для возмущений пламени с конечным числом Рейнольдса. Это замечание, в особенности, относится к выводу граничных условий на поверхности пламени — ни в одной работе не учитывалось влияние конечной ширины фронта пламени, — это было обусловлено тем, что вплоть до последнего времени не был разработан математический прием, позволяющий последовательно учитывать поправки к решениям, имеющим в нулевом приближении разрывы. Лишь недавно появились работы П. Жермена и Ж. Гиро [10-12] по слабо искривленным ударным волнам, где был предложен способ последовательного учета поправок одного порядка в граничных условиях на гидродинамических скачках. Этот метод применительно к пламени используется в настоящей работе.

Кроме того, в имеющихся работах предпринимались попытки учесть лишь отдельные стабилизирующие эффекты, игнорируя другие, имеющие тот же порядок величины (например, учитывались диффузия и теплопроводность, но не учитывалась вязкость [3, 6, 7], или наоборот [5]). Подчеркнем, что при последовательном подходе к задаче следует одновременно принимать во внимание следующие эффекты, имеющие один порядок  $\varepsilon = 1 / N_R$ , ( $N_R = u_n / kv$  — число Рейнольдса,  $u_n$  — скорость распространения пламени,  $k$  — волновое число возмущения,  $v$  — вязкость): 1) влияние искривлений пламени на процессы диффузии, теплопроводности и вязкости во фронте пламени; 2) изменение скорости горения (скорости химической реакции в пламени)

в связи с возмущениями температуры; 3) влияние конечной ширины фронта пламени; 4) изменение плотности продуктов сгорания за фронтом пламени из-за возмущений температуры; 5) действие вязкости на движение газа вне фронта пламени. В настоящей работе учитываются все перечисленные эффекты.

Система обозначений, принятая в работе: верхние индексы  $^0$  и  $^1$  относятся, соответственно, к нулевому и первому приближению по  $\varepsilon$ . Нижний индекс  $(-)$  соответствует решениям в горючей смеси, а нижний индекс  $(+)$  решениям в продуктах сгорания. При линеаризации величины, описывающие стационарное невозмущенное решение, обозначаются заглавными буквами, а соответствующие им возмущения — строчными буквами со штрихом: для невозмущенного решения скорость  $U$ , плотность  $R$ , давление  $P$ , безразмерная температура  $\Theta$ , концентрация  $S$ ; возмущения  $u', p', \theta', s'$ . Строчные буквы без штрихов относятся к полным значениям соответствующих величин ( $\rho = R + \rho'$ ). Остальные обозначения оговариваются в тексте.

§ 1. Отыскание поправок порядка  $1/N_R$  к решению Л. Д. Ландау проведем, следуя методу, предложенному Г. ерменом и Ж. Гиро для учета процессов переноса для слабо искривленных ударных волн [10-12].

Согласно этому методу, следует выделять две области течения газа: область внешнего течения (вне пламени) и область внутри пламени (фиг. 1, на которой изображены линии тока газа при прохождении через искривленный фронт ламинарного пламени). В области внешнего течения градиенты величин малы (если величины, входящие в задачу, обезразмеривать на длину волны возмущения и нормальную скорость распространения пламени, то эти градиенты  $\sim 1$ ), и поэтому в этой области можно применять обычный метод последовательных приближений. Иначе говоря, здесь все величины можно искать в виде

$$f = f^0 + \varepsilon f^1 \quad (1.1)$$

где  $f^0$  — решение нулевого приближения (решение Л. Д. Ландау), а  $f^1$  — поправка;  $f^1$  находится из соответствующих уравнений при подстановке в них решений вида (1.1).

В области внутри пламени, ширина которой порядка  $\varepsilon = 1/N_R$ , поскольку она определяется также процессами переноса, метод итераций неприменим, — градиенты величин в этой области велики —  $\sim 1/\varepsilon$ .

Однако можно учесть процессы переноса в зоне пламени, если принять во внимание узость этой зоны по сравнению с размерами области возмущенного течения газа (внешней области). Для этого для решений во внешней области следует поставить граничные условия, которые учитывали бы структуру и ширину фронта пламени, т. е. учесть влияние внутренней зоны интегральным способом. При этом граничные условия на поверхности пламени в общем случае будут записываться в виде

$$[f^0] + \varepsilon [f^1] = \varepsilon \Delta (f^0) \quad (1.2)$$

где  $[f^0]$  — скачок величин на фронте пламени, соответствующий решению задачи в нулевом приближении, а  $[f^1]$ ,  $\Delta (f^0)$  — поправки, связанные с процессами переноса и конечной шириной фронта пламени.

Устанавливая связь между решениями в области холодного газа и области продуктов сгорания, имеющими вид (1.1), при помощи граничных условий (1.2) и приравнявая коэффициенты при нулевой и первой степенях  $\varepsilon$ , можно получить две системы однородных линейных алгебраических уравнений. Первая система (нулевое приближение) соответствует решению Л. Д. Ландау и служит для определения характеристической частоты в теории Л. Д. Ландау и связи между амплитудами возмущений давления и скорости по обе стороны пламени и амплитудой возмущения поверхности пламени. Вторая система (первое приближение) позволяет определить амплитуды первого приближения через амплитуду возмущения поверхности пламени, а также изменение характеристической частоты задачи.

Ясно, что при решении задачи в первом приближении изменение характеристической частоты должно иметь вид

$$\omega = \omega^0 [1 - \varepsilon \tau (\sigma, L, \alpha, z)] \quad (z = E/2R_0T_b) \quad (1.3)$$

Здесь  $\omega$  — безразмерная характеристическая частота;  $\omega^0$  — нулевое приближение для характеристической частоты;  $\tau$  — поправка первого приближения,  $\alpha$  — отношение плотностей горячего и холодного газа;  $\sigma$  — число Прандтля;  $L$  — отношение температуропроводности газа к коэффициенту диффузии горючего (число Льюиса);  $z$  — безразмерная энергия активации, определяющая зависимость скорости химической реакции в пламени от температуры,  $E$  — энергия активации,  $T_b$  — температура продуктов сгорания. Предполагается, что имеет место тепловой механизм распространения пламени, в котором реакция лимитируется одним горючим компонентом.

Задача, таким образом, сводится к определению функции  $\tau (\sigma, L, \alpha, z)$ .

Строго говоря, решение для частоты (1.3) позволяет выявить только тенденцию изменения собственной частоты при конечных числах Рейнольдса возмущения. Чтобы получить изменение знака частоты, необходимо экстраполировать выражение (1.3) к тем длинам волн возмущений, для которых  $\varepsilon \tau (\sigma, L, \alpha, z) \sim 1$  (тогда  $\tau$  представляет собой критическое число Рейнольдса).

Обратим внимание, что для проведения итерации во внешней области и для вывода граничных условий на фронте пламени можно использовать одни и те же уравнения сохранения массы, реагирующего вещества, энергии и количества движения. В своей работе Л. Д. Ландау использовал только уравнения сохранения массы и количества движения. Это объясняется тем, что при решении задачи об устойчивости пламени в нулевом приближении уравнения сохранения реагирующего вещества и энергии сводятся к тривиальным уравнениям переноса температуры и реагирующего вещества вместе с потоком газа; решение этих уравнений, написанных для возмущений концентрации реагирующего вещества и температуры, дает тождественные нули.

Поэтому эти уравнения могут быть без ущерба опущены. В граничных условиях на пламени остается при этом лишь след от уравнения сохранения реагирующего вещества — условие постоянства нормальной скорости пламени (фактически — это условие постоянной скорости потребления реагирующего вещества в химической реакции). При решении задачи об устойчивости пламени в следующем приближении следует принимать во внимание перенос энергии, вещества и количества движения теплопроводностью, диффузией и вязкостью. Тогда уравнения сохранения энергии и реагирующего вещества уже не будут приводить к тривиальным решениям, и их поэтому следует учитывать.

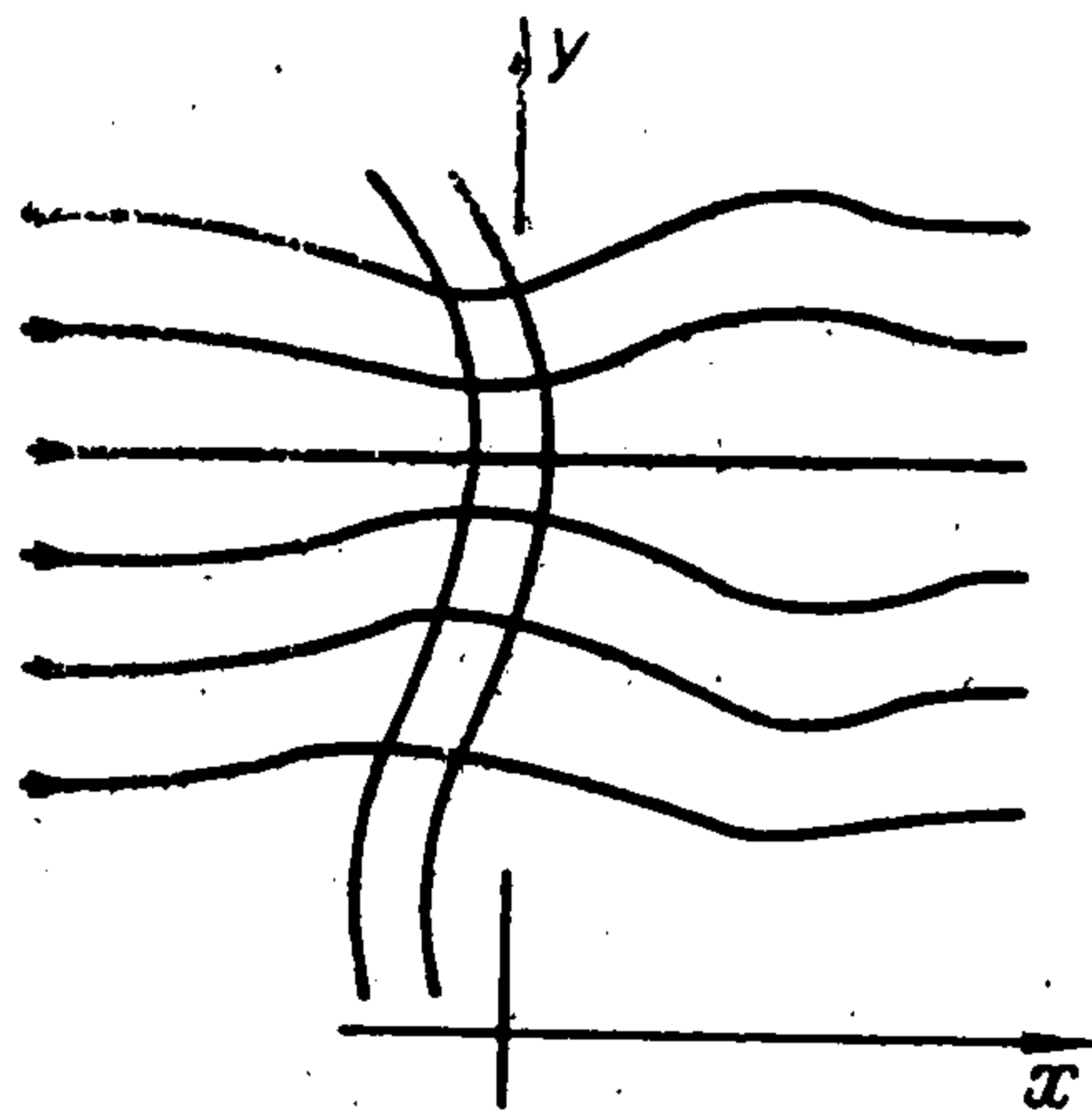
§ 2. Основными уравнениями задачи являются уравнения сохранения массы, количества движения, энергии и реагирующего вещества

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= - \frac{\partial p}{\partial x} + \varepsilon \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\varepsilon}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} &= - \frac{\partial p}{\partial y} + \varepsilon \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\varepsilon}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} &= - \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \rho \frac{\partial \theta}{\partial t} + \rho u \frac{\partial \theta}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\varepsilon}{\sigma} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) + \frac{w}{\varepsilon} \\ \rho \frac{\partial s}{\partial t} + \rho u \frac{\partial s}{\partial x} + \rho v \frac{\partial s}{\partial y} &= \frac{\varepsilon}{\sigma L} \left( \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} \right) - \frac{w}{\varepsilon} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$\left( \theta = \frac{T - T_0}{T_b - T_0} \right)$

В уравнениях используются следующие обозначения:  $x, y$  — безразмерные пространственные координаты (см. фиг. 1), отнесенные к длине волны возмущения, т. е., точнее, к  $k = 2\pi / \lambda$ , ( $k$  — волновое число),  $t$  — безразмерное время, определенное как отношение времени к характерному времени  $1 / u_n k$ ;  $u$  и  $v$  — безразмерные компоненты скорости в единицах нормальной скорости распространения пламени  $u_n$ ;  $p$  — безразмерное давление (давление, отнесенное к динамическому напору свежей смеси);  $\rho$  — безразмерная плотность (отнесенная к плотности холодного газа);  $s$  — относительная концентрация реагирующего вещества;  $\theta$  — безразмерная температура,  $T_0$  — начальная температура смеси,  $T_b$  — температура продуктов сгорания при стационарном режиме горения;  $w$  — безразмерная скорость химической реакции. Предполагается также, что теплопроводность, динамическая вязкость, теплоемкость и произведение коэффициента диффузии на плотность остаются постоянными, не зависят ни от температуры, ни от концентрации.

Как видно из последних уравнений (2.1), в выражении для скорости химического превращения выделен параметр  $\varepsilon$ . Почему этот параметр находится в знаменателе — ясно из следующих соображений. Из общих положений теории размерности следует, что нормальная скорость распространения пламени связана с теплопроводностью газа  $\kappa$  и скоростью химической реакции  $W(T, s)$  соотношением  $u_n \sim (\kappa W)^{1/2}$ , или, в свою очередь,  $W \sim u_n^2 / \kappa$ . Обезразмеривая это соотношение на нормальную скорость пламени и волновое число возмущений, приходим к записи, которая употреблена в уравнениях (2.1). Эта запись хорошо отражает очевидный факт, что при стремлении  $\varepsilon$  к нулю скорость тепловыделения должна переходить в  $\delta$ -функцию, связанную с бесконечно тонким фронтом пламени.



Фиг. 1

Кроме уравнений (2.1), необходимо привлечь уравнение состояния газа, которое для случая несжимаемого газа (скорость пламени мала по сравнению со скоростью звука) сводится к связи между плотностью газа и его температурой

$$\rho = 1 / \left( 1 + \frac{1-\alpha}{\alpha} \theta \right) \quad (2.2)$$

Исследование устойчивости проведем методом малых возмущений. Будем искать решение уравнений (2.1) в виде

$$f = F + f' = F(x) + [f^0(x) + \varepsilon f^1(x)] \exp(iy + \omega t) \quad (2.3)$$

Подставляя решения вида (2.3) в уравнения, оставим в них члены порядка  $\varepsilon$ . Итак, сокращая на общий множитель  $\exp(iy + \omega t)$  получаем

$$\begin{aligned} R\omega u^0 + \varepsilon R\omega u^1 + \frac{\partial u^0}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial u^1}{\partial x} = -\frac{\partial p^0}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial p^1}{\partial x} + \varepsilon \left( \frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2} - u^0 \right) + \\ + \frac{\varepsilon}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u^0}{\partial x} + i v^0 \right) \\ R\omega v^0 + \varepsilon R\omega v^1 + \frac{\partial v^0}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial v^1}{\partial x} = -i p^0 - \varepsilon p^1 + \varepsilon \left( \frac{\partial^2 v^0}{\partial x^2} - v^0 \right) + i \frac{\varepsilon}{3} \left( \frac{\partial u^0}{\partial x} + i v^0 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega R (\theta^0 + \varepsilon \theta^1) + \frac{\partial}{\partial x} (\theta^0 + \varepsilon \theta^1) &= \frac{\alpha}{1-\alpha} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (u^0 + \varepsilon u^1) + i (v^0 + \varepsilon v^1) \right] \\ R\omega\theta^0 + \varepsilon R\omega\theta^1 + \frac{\partial\theta^0}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial\theta^1}{\partial x} &= \frac{\varepsilon}{\sigma} \left( \frac{\partial^2\theta^0}{\partial x^2} - \theta^0 \right) \\ R\omega s^0 + \varepsilon R\omega s^1 + \frac{\partial s^0}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial s^1}{\partial x} &= \frac{\varepsilon}{\sigma L} \left( \frac{\partial^2 s^0}{\partial x^2} - s^0 \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

В уравнении неразрывности величина  $\rho^0 + \varepsilon \rho^1$  исключена при помощи соотношения (2.2). В последних уравнениях опущены члены  $w/\varepsilon$  — вне пламени скорость реакции равна нулю.

Для того чтобы получить из приведенных уравнений решение в нулевом приближении по  $\varepsilon$  (решение Л. Д. Ландау), следует во всех уравнениях положить  $\varepsilon = 0$  и решить их, используя граничные условия

$$\begin{aligned} u_{-}^{0,1}, v_{-}^{0,1}, p_{-}^{0,1}, \theta_{-}^{0,1}, s_{-}^{0,1} &\rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow -\infty \quad (\text{холодный газ}) \quad (2.5) \\ u_{+}^{0,1}, v_{+}^{0,1}, p_{+}^{0,1}, s_{+}^{0,1} &\rightarrow 0, \quad |\theta_{+}^{0,1}| < \infty \quad \text{при } x \rightarrow +\infty \quad (\text{продукты сгорания}) \end{aligned}$$

Для области холодного газа при этом получаются выражения ( $x < 0$ )

$$\begin{aligned} u_{-}^0 &= A^0 e^x, \quad v_{-}^0 = iA^0 e^x, \quad p_{-}^0 = -A^0 (\omega + 1) e^x \quad (2.6) \\ \theta_{-}^0 &= s_{-}^0 = \rho_{-}^0 = 0 \quad (A^0 - \text{константа интегрирования}) \end{aligned}$$

Для определения членов порядка  $\varepsilon$  следует приравнять в уравнениях (2.4) коэффициенты при  $\varepsilon$  и подставить в них полученные выражения для нулевого приближения. Для области холодного газа эта процедура приводит к следующим уравнениям для  $u_{-}^1, v_{-}^1, p_{-}^1, \theta_{-}^1, s_{-}^1$

$$\begin{aligned} \omega u_{-}^1 + \frac{\partial u_{-}^1}{\partial x} &= -\frac{\partial p_{-}^1}{\partial x}, \quad \omega v_{-}^1 + \frac{\partial v_{-}^1}{\partial x} = -ip_{-}^1 \quad (2.7) \\ \frac{1-\alpha}{\alpha} \left( \omega \theta_{-}^1 + \frac{\partial \theta_{-}^1}{\partial x} \right) &= \frac{\partial u_{-}^1}{\partial x} + iv_{-}^1, \quad \omega \theta_{-}^1 + \frac{\partial \theta_{-}^1}{\partial x} = 0, \quad \omega s_{-}^1 + \frac{\partial s_{-}^1}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

Решение этих уравнений с граничными условиями (2.5) дает тождественно такие же соотношения, что и решение в нулевом приближении (2.6); отличие заключается только в новой константе интегрирования  $A^1$ .

Таким образом, и в первом приближении по  $\varepsilon$  в холодном газе нет возмущений температуры, концентрации и плотности. Перенос реагирующего вещества и тепловой энергии осуществляется только конвективным путем, процессы диффузии и теплопроводности оказываются существенными лишь во втором приближении.

Для течения газа за фронтом пламени (в области горячих продуктов сгорания) ( $x > 0$ ) решение уравнений (2.4) приводит к следующим результатам

в нулевом приближении

$$\begin{aligned} u_{+}^0 &= B^0 e^{-x} + C^0 e^{-\alpha\omega x}, \quad v_{+}^0 = -iB^0 e^{-x} - i\alpha\omega C^0 e^{-\alpha\omega x} \quad (2.8) \\ p_{+}^0 &= B^0 (\alpha\omega - 1) e^{-x}, \quad \theta_{+}^0 = H^0 e^{-\alpha\omega x}, \quad \rho_{+}^0 = -\alpha(1-\alpha)\theta_{+}^0 \\ s_{+}^0 &= 0 \quad (B^0, C^0, H^0 - \text{константы интегрирования}) \end{aligned}$$

Обратим внимание на следующие обстоятельства. Течение газа за фронтом пламени — вихревое (в отличие от течения перед фронтом пламени), вихри образуются на пламени и затем сносятся потоком газа (в выражениях для компонент скорости вихревому движению газа соответствуют члены с константой  $C^0$ ). Кроме того, за фронтом пламени возможны возмущения температуры и связанные с температурой возмущения плотности, которые возникают из-за конвективного сноса возникающих на фронте пламени возмущений температуры.

В следующем, первом приближении уравнения для горячего газа имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha\omega u_+^1 + \frac{\partial u_+^1}{\partial x} &= -\frac{\partial p_+^1}{\partial x} + [(\alpha\omega)^2 - 1] C^0 e^{-\alpha\omega x} \\ \alpha\omega v_+^1 + \frac{\partial v_+^1}{\partial x} &= -ip_+^1 + i\alpha\omega [1 - (\alpha\omega)^2] C^0 e^{-\alpha\omega x} \\ \frac{1-\alpha}{\alpha} \left( \alpha\omega\theta_+^1 + \frac{\partial\theta_+^1}{\partial x} \right) &= \frac{\partial u_+^1}{\partial x} + iv_+^1, \quad \alpha\omega\theta_+^1 + \frac{\partial\theta_+^1}{\partial x} = \frac{1}{\sigma} [(\alpha\omega)^2 - 1] H^0 e^{-\alpha\omega x} \\ \rho_+^1 &= -\alpha(1-\alpha)\theta_+^1, \quad s_+^1 = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

решения которых

$$\begin{aligned} u_+^1 &= B^1 e^{-x} + C^1 e^{-\alpha\omega x} + [(\alpha\omega)^2 - 1] C^0 x e^{-\alpha\omega x} \\ v_+^1 &= -iB^1 e^{-x} - i\alpha\omega C^1 e^{-\alpha\omega x} - i[1 - (\alpha\omega)^2] (1 - \alpha\omega x) C^0 e^{-\alpha\omega x} \\ p_+^1 &= B^1 (\alpha\omega - 1) e^{-x}, \quad \rho_+^1 = -\alpha(1-\alpha)\theta_+^1 \\ \theta_+^1 &= H^1 e^{-\alpha\omega x} + \frac{1}{\sigma} [(\alpha\omega)^2 - 1] H^0 x e^{-\alpha\omega x} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь  $B^1, C^1, H^1$  — новые константы интегрирования. В этих решениях присутствуют члены, характеризующие перенос тепловой энергии теплопроводностью, а также влияние вязкости за фронтом пламени.

Наконец, зададим форму искривленного фронта пламени

$$\zeta = D \exp(iy + \omega t) \quad (2.11)$$

Определение вошедших в решения констант интегрирования следует производить при помощи граничных условий на поверхности пламени, которые устанавливают связь между решениями в областях холодного и горячего газа. Эти граничные условия также следует получить с точностью до первого приближения по величине  $\varepsilon$ .

§ 3. На поверхности пламени должны соблюдаться условия сохранения продольной и поперечной компонент импульса, массы, тепловой энергии и концентрации реагирующего вещества (последние два условия — с учетом выделения тепла в пламени и потребления в нем реагирующего вещества). Поскольку эти условия, выражающие законы сохранения, содержатся в дифференциальной форме в уравнениях (2.1), для вывода граничных условий можно также использовать указанные уравнения.

Проиллюстрируем вывод граничных условий на примере условия сохранения продольной компоненты импульса. Для этого возьмем первое уравнение (2.1), переписав его в дивергентном виде

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ -p - \rho u^2 + \varepsilon \left( \frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v^2}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ -\rho u v + \varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \quad (3.1)$$

Проинтегрируем это уравнение по  $x$  от  $\zeta - \delta$  до  $\zeta + \delta$  (вблизи поверхности пламени). При этом выберем  $\delta \gg \varepsilon$ , так что вся структура пламени будет заключена в пределах интегрирования. Воспользовавшись правилами дифференцирования интегралов по параметру, имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{\zeta-\delta}^{\zeta+\delta} \rho u dx - [\rho u]_{\zeta-\delta}^{\zeta+\delta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \left[ -p - \rho u^2 + \varepsilon \left( \frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right]_{\zeta-\delta}^{\zeta+\delta} + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\zeta-\delta}^{\zeta+\delta} \left[ -\rho uv + \varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dx - \left[ -\rho uv + \varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]_{\zeta-\delta}^{\zeta+\delta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь значком  $[ ]_{\zeta-\delta}^{\zeta+\delta}$  обозначены разности стоящих в скобках величин по обе стороны пламени.

В полученное соотношение (3.2) входят величины трех типов. Во-первых, это обычные разности потока импульса на подвижной изогнутой поверхности

$$[\rho u]_{\zeta-\delta}^{\zeta+\delta} \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad [-p - \rho u^2]_{\zeta-\delta}^{\zeta+\delta}, \quad [-\rho uv]_{\zeta-\delta}^{\zeta+\delta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \quad (3.3)$$

Во-вторых, это поправки порядка  $\varepsilon$ , связанные с наличием на границах  $\zeta - \delta$  и  $\zeta + \delta$  вязкого потока импульса

$$\varepsilon \left[ \frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right]_{\zeta-\delta}^{\zeta+\delta}, \quad -\varepsilon \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]_{\zeta-\delta}^{\zeta+\delta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \quad (3.4)$$

Эти поправки следует определять, вычисляя соответствующие производные из решений для идеального газа (формулы (2.6) и (2.8)).

В-третьих, имеются члены

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\zeta-\delta}^{\zeta+\delta} \rho u dx, \quad \frac{\partial}{\partial y} \int_{\zeta-\delta}^{\zeta+\delta} \left[ -\rho uv + \varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dx \quad (3.5)$$

Жермен и Гиро [10-12] впервые отметили, что эти интегралы также дают поправки порядка  $\varepsilon$ , причем для их вычисления нужно знать структуру пламени нулевого порядка по  $\varepsilon$ .

Поясним это, следуя работам [10-12]. Любая величина  $f$  (плотность, скорость, температура и т. п.), разрывная при  $\varepsilon = 0$ , при конечных  $\varepsilon$  может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} f = & \frac{1}{2} [f_+(x - \zeta, y, t, \varepsilon) + f_-(x - \zeta, y, t, \varepsilon)] + \frac{1}{2} [f_+(x - \zeta, y, t, \varepsilon) - \\ & - f_-(x - \zeta, y, t, \varepsilon)] \Phi \left( \frac{x - \zeta}{\varepsilon}, y, t, \varepsilon \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

причем  $\Phi(\pm \infty, y, t, \varepsilon) = \pm 1$ . Вдали от скачка при  $|x - \zeta| \gg \varepsilon$  функция  $f$  должна совпадать с разрывными решениями  $f_+$  (при  $x - \zeta > 0$ ) и  $f_-$  (при  $x - \zeta < 0$ ) (при этом предполагается, что стремление  $f$  к  $f_{\pm}$  экспоненциальное). Кроме того, она описывает структуру скачка при  $|x - \zeta| \lesssim \varepsilon$ , так как естественным масштабом, определяющим ширину скачка, является величина  $\varepsilon$ .

Отсюда видно, что при интегрировании величин  $f$  по  $x$  вне скачка будут существенными только значения  $f_+$  и  $f_-$ , а результат интегрирования по ширине скачка можно оценить как  $\varepsilon f^*$ , где  $f^*$  — некоторое эффективное значение данной величины

внутри скачка, зависящее от его структуры. Для вычисления  $f^*$  П. Жермен и Ж. Гиро предлагают прием, аналогичный способу введения толщины вытеснения в теории пограничного слоя. А именно, представим функцию  $f$  в виде  $f_e + f - f_e$ , где  $f_e = f_+$  при  $x - \zeta > 0$  и  $f_e = f_-$  при  $x - \zeta < 0$ . Тогда

$$\int_{\zeta-\delta}^{\zeta+\delta} f dx = \int_{\zeta-\delta}^{\zeta+\delta} f_e dx + \int_{\zeta-\delta}^{\zeta+\delta} (f - f_e) dx \quad (3.7)$$

Первый из этих интегралов всегда возникает при выводе граничных условий на бесконечно тонком скачке. Во втором интеграле подынтегральная функция отлична от нуля из-за наличия структуры скачка, поэтому для вычисления этого интеграла сделаем замену  $\xi = (x - \zeta) / \varepsilon$ . Получим

$$\int_{\zeta-\delta}^{\zeta+\delta} (f - f_e) dx = \varepsilon \int_{-\delta/\varepsilon}^{\delta/\varepsilon} (f - f_e) d\xi \quad (3.8)$$

Так как  $f - f_e$  экспоненциально стремится к нулю вне скачка, то, принимая во внимание, что  $\delta \gg \varepsilon$ , можно распространить пределы интегрирования от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Таким образом, величина

$$f^* = \int_{-\infty}^{\infty} (f - f_e) d\xi \quad (3.9)$$

Граничное условие (3.2) дает связь между величинами при  $x = \zeta + \delta$  и  $x = \zeta - \delta$ . Чтобы получить условия на поверхности скачка, следует все величины разложить в ряд по  $\delta$  и взять первые члены разложений.

Итак, условие сохранения потока продольной компоненты импульса имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\rho u)^* - [\rho u]_{\zeta-0}^{\zeta+0} \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= \left[ -p - \rho u^2 + \varepsilon \left( \frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right]_{\zeta-0}^{\zeta+0} - \\ &- \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} (\rho u v)^* - \left[ -\rho u v + \varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]_{\zeta-0}^{\zeta+0} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Аналогично получим условие непрерывности потока поперечной компоненты импульса и условие сохранения потока массы

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\rho v)^* - [\rho v]_{\zeta-0}^{\zeta+0} \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= \left[ -\rho u v + \varepsilon \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]_{\zeta-0}^{\zeta+0} - \\ &- \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} (p + \rho v^2)^* - \left[ -p - \rho v^2 + \varepsilon \left( \frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right]_{\zeta-0}^{\zeta+0} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \rho^* - [\rho]_{\zeta-0}^{\zeta+0} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + [\rho u]_{\zeta-0}^{\zeta+0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} (\rho v)^* - [\rho v]_{\zeta-0}^{\zeta+0} \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0$$

Таким же образом можно поступить с уравнениями переноса тепла и реагирующего вещества. В эти граничные условия будет входить интеграл от функции тепловыделения

$$M = \int_{\zeta-\delta}^{\zeta+\delta} \frac{w}{\varepsilon} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} w d\xi \quad (3.12)$$

Такой интеграл представляет собой количество тепла, выделяющегося в единицу времени на единицу поверхности пламени. В стационарном состоянии  $M = 1$ , для нестационарного искривленного фронта пламени величина  $M$  определяет нестационарную скорость горения. С учетом этого обстоятельства условия сохранения потоков тепла и реагирующего вещества примут вид

$$\begin{aligned} & \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\rho\theta)^* - [\rho\theta]_{\zeta=0}^{\zeta+0} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \\ & = \left[ -\rho u\theta + \frac{\varepsilon}{\sigma} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right]_{\zeta=0}^{\zeta+0} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} (\rho v\theta)^* - \left[ -\rho v\theta + \frac{\varepsilon}{\sigma} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right]_{\zeta=0}^{\zeta+0} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + M \quad (3.13) \\ & \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\rho s)^* - [\rho s]_{\zeta=0}^{\zeta+0} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \\ & = \left[ -\rho u s + \frac{\varepsilon}{\sigma L} \frac{\partial s}{\partial x} \right]_{\zeta=0}^{\zeta+0} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} (\rho v s)^* - \left[ -\rho v s + \frac{\varepsilon}{\sigma L} \frac{\partial s}{\partial y} \right]_{\zeta=0}^{\zeta+0} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - M \end{aligned}$$

Произведем линеаризацию граничных условий (3.10)–(3.13) для случая малых возмущений

$$\begin{aligned} & \left[ p' + \rho' U^2 + RU \left( 2u' - \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) \right]_{-0}^{+0} = \\ & = \varepsilon \left\{ \left[ \frac{4}{3} \frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v'}{\partial y} \right]_{-0}^{+0} - \frac{\partial}{\partial t} (Ru')^* - \frac{\partial}{\partial t} (\rho' U)^* - \frac{\partial}{\partial y} (RUv')^* \right\} \\ & \left[ RUv' - P \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right]_{-0}^{+0} = \varepsilon \left\{ \left[ \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y} \right]_{-0}^{+0} - \frac{\partial}{\partial t} (Rv')^* - \frac{\partial}{\partial y} (p')^* \right\} \\ & \left[ \rho' U + R \left( u' - \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) \right]_{-0}^{+0} = \varepsilon \left\{ -\frac{\partial}{\partial t} (\rho')^* - \frac{\partial}{\partial y} (Rv')^* \right\} \quad (3.14) \\ & \left[ RU\theta' + \rho' U\Theta + R\Theta \left( u' - \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) \right]_{-0}^{+0} = \\ & = \varepsilon \left\{ \left[ \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \theta'}{\partial x} \right]_{-0}^{+0} - \frac{\partial}{\partial t} (R\theta')^* - \frac{\partial}{\partial t} (\rho'\Theta)^* - \frac{\partial}{\partial y} (R\Theta v')^* \right\} + M' \\ & \left[ RUs' + \rho' US + RS \left( u' - \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) \right]_{-0}^{+0} = \\ & = \varepsilon \left\{ \left[ \frac{1}{\sigma L} \frac{\partial s'}{\partial x} \right]_{-0}^{+0} - \frac{\partial}{\partial t} (Rs')^* - \frac{\partial}{\partial t} (\rho'S)^* - \frac{\partial}{\partial y} (RSv')^* \right\} - M' \end{aligned}$$

Для дальнейших вычислений величин ( )<sup>\*</sup> следует воспользоваться конкретной структурой фронта пламени. Примем, что структура пламени имеет вид, который дает теория Я. Б. Зельдовича — Д. А. Франк-Каменецкого [13, 14]. В этой теории считается, что энергия активации химической реакции сгорания весьма велика; пламя состоит из двух зон — зоны прогрева (ширина этой зоны порядка  $\varepsilon$ ) и зоны химической реакции, узкой по сравнению с зоной прогрева. В соответствии с этим будем пренебрегать шириной зоны реакции и считать, что скорость реакции определяется лишь температурой выходящих из этой зоны продуктов сгорания ( $M = M(\theta_r)$ ). При этом температура  $\theta_r$  может, вообще говоря, отличаться от адиабатической температуры сгорания в стационарном случае ( $\theta_r \neq \Theta = 1$ ) (см., например, [15, 16]).

Структура фронта пламени описывается системой уравнений гидродинамики, диффузии и теплопроводности (2.1). При этом для искривлен-

ного фронта пламени следует взять уравнения в криволинейных прямоугольных координатах, связанных непосредственно с фронтом, так как под структурой пламени понимают распределение величин во фронте по нормали к ее поверхности  $n$ . Затем надо сделать замену координаты  $n$  на координату  $\eta = n / \varepsilon$ . Так как для вычисления величин (\*) достаточно знать структуру пламени в нулевом приближении, то после замены  $n$  на  $\eta$  следует пренебречь членами порядка  $\varepsilon$ . Как легко убедиться, по этой причине в уравнениях исчезнут производные по времени и по координате, направленной вдоль фронта пламени. Коэффициенты Лямэ обратятся в единицы. Для малых искривлений фронта пламени с точностью до членов высшего порядка направление нормали будет совпадать с осью  $x$ ; поэтому можно считать  $\eta = n / \varepsilon = \xi = (x - \zeta) / \varepsilon$ .

Тогда из уравнений (2.1) получаем (вне зоны химической реакции)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( -p - \rho v_n^2 + \frac{4}{3} \frac{\partial v_n}{\partial \xi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left( -\rho v_n v_\tau + \frac{\partial v_\tau}{\partial \xi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho v_n) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( -\rho v_n \theta + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left( -\rho v_n s + \frac{1}{\sigma L} \frac{\partial s}{\partial \xi} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

где  $v_n$  и  $v_\tau$  — составляющие скорости потока, нормальные и касательные к фронту, соответственно; они связаны со скоростями  $u$  и  $v$  соотношениями

$$v_n = V_n + v_n' = U + u' - \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad v_\tau = v' + U \frac{\partial \zeta}{\partial y} \quad (3.16)$$

Систему (3.15) следует дополнить уравнением состояния (2.2).

Граничными условиями для системы уравнений (3.15) будут: 1) условия на бесконечности. При  $\xi \rightarrow \pm \infty$  решения должны переходить к значениям соответствующих величин на поверхности пламени, полученным Л. Д. Ландау (формулы (2.6) и (2.8) при  $x = 0$ ); 2) условия на зоне реакции. Здесь потребуем непрерывности касательной скорости, температуры и концентрации (условия сохранения при этом будут выполняться автоматически). Решения системы с учетом линеаризации и упомянутых граничных условий имеют вид

для стационарных величин

$$\begin{aligned} U_- = 1 + \frac{1-\alpha}{\alpha} e^{\sigma \xi}, \quad U_+ = \frac{1}{\alpha}, \quad V_- = V_+ = 0 \\ P_- = P_\infty + \frac{1-\alpha}{\alpha} \left( \frac{4}{3} \sigma - 1 \right) e^{\sigma \xi}, \quad P_+ = P_\infty - \frac{1-\alpha}{\alpha} \\ \Theta_- = e^{\sigma \xi}, \quad \Theta_+ = 1, \quad S_- = 1 - e^{\sigma L \xi}, \quad S_+ = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$R_- = 1 / \left( 1 + \frac{1-\alpha}{\alpha} e^{\sigma \xi} \right), \quad R_+ = \alpha$$

для возмущений

$$\begin{aligned} u_-' = \left\{ A^0 + \frac{1-\alpha}{\alpha} [(A^0 - \omega D)(1 + \sigma \xi) + H^0] e^{\sigma \xi} \right\} e^{i y + \omega t}, \quad u_+' = (B^0 + C^0) e^{i y + \omega t} \\ v_-' = i \left[ A^0 - \left( A^0 + B^0 + \alpha \omega C^0 - \frac{1-\alpha}{\alpha} D \right) e^\xi - \frac{1-\alpha}{\alpha} D e^{\sigma \xi} \right] e^{i y + \omega t} \\ v_+' = -i (B^0 + \alpha \omega C^0) e^{i y + \omega t} \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned}
 p_-' &= \left\{ -A^0(\omega + 1) + \frac{1-\alpha}{\alpha} \left( \frac{4}{3} \sigma - 1 \right) [(A^0 - \omega D)(2 + \sigma \xi) + H^0] e^{\sigma \xi} \right\} e^{iy + \omega t} \\
 p_+' &= B^0(\alpha \omega - 1) e^{iy + \omega t}, \quad \rho_+' = -\alpha(1 - \alpha) H^0 e^{iy + \omega t} \\
 \rho_-' &= -\frac{1-\alpha}{\alpha} [(A^0 - \omega D) \sigma \xi + H^0] \left( 1 + \frac{1-\alpha}{\alpha} e^{\sigma \xi} \right)^{-2} e^{\sigma \xi} e^{iy + \omega t} \\
 \theta_-' &= \{ [(A^0 - \omega D) \sigma \xi + H^0] e^{\sigma \xi} \} e^{iy + \omega t}, \quad \theta_+' = H^0 e^{iy + \omega t} \\
 s_-' &= -(A^0 - \omega D) \sigma L \xi e^{\sigma L \xi} e^{iy + \omega t}, \quad s_+' = 0
 \end{aligned}$$

Принимая во внимание формулы (3.17), (3.18), можно рассчитать величины  $(\quad)^*$ , входящие в граничные условия (3.14). Получаем

$$(p')^* = \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{1}{\sigma} \left( \frac{4}{3} \sigma - 1 \right) (A^0 - \omega D + H^0) e^{iy + \omega t} \quad (3.19)$$

$$(\rho')^* = -\frac{1}{\sigma} [(A^0 - \omega D) \ln \alpha + (1 - \alpha) H^0] e^{iy + \omega t}$$

$$(Ru')^* = \frac{1}{\sigma} \{ A^0 \ln \alpha - [I_1(\alpha) + \ln \alpha] (A^0 - \omega D) - H^0 \ln \alpha \} e^{iy + \omega t}$$

$$(Rv')^* = i \left\{ \frac{\ln \alpha}{\sigma} A^0 - \frac{\alpha(A^0 + B^0 + \alpha \omega C^0)}{1-\alpha} I_2(\alpha, \sigma) + \left[ I_2(\alpha, \sigma) + \frac{\ln \alpha}{\sigma} \right] D \right\} e^{iy + \omega t}$$

$$\left( I_1(\alpha) \equiv \int_0^\infty \frac{te^{-t} dt}{\alpha/(1-\alpha) + e^{-t}}, \quad I_2(\alpha, m) \equiv \int_0^\infty \frac{e^{-t} dt}{\alpha/(1-\alpha) + e^{-mt}} \right)$$

$$(R\theta')^* = -\frac{\alpha}{\sigma(1-\alpha)} [I_1(\alpha) (A^0 - \omega D) + H^0 \ln \alpha] e^{iy + \omega t}$$

$$(Rs')^* = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{1}{\sigma L} I_3\left(\alpha, \frac{1}{L}\right) (A^0 - \omega D) e^{iy + \omega t} \left( I_3(\alpha, m) \equiv \int_0^\infty \frac{te^{-t} dt}{\alpha/(1-\alpha) + e^{-mt}} \right)$$

$$(\rho'U)^* = \frac{1}{\sigma} [I_1(\alpha) (A^0 - \omega D) + H^0 \ln \alpha] e^{iy + \omega t}$$

$$(\rho'\Theta)^* = \frac{1}{\sigma} \left\{ \frac{\alpha}{1-\alpha} [I_1(\alpha) + \ln \alpha] (A^0 - \omega D) + \left( \alpha + \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln \alpha \right) H^0 \right\} e^{iy + \omega t}$$

$$\begin{aligned}
 (\rho'S)^* &= \frac{1}{\sigma} \left\{ \left[ -\ln \alpha + \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{1}{L} I_2\left(\alpha, \frac{1}{L}\right) - \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{1}{L} I_3\left(\alpha, \frac{1}{L}\right) \right] (A^0 - \omega D) + \right. \\
 &\quad \left. + \left[ -1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} I_2\left(\alpha, \frac{1}{L}\right) \right] H^0 \right\} e^{iy + \omega t}
 \end{aligned}$$

$$(RUv')^* = i \left[ -(A^0 + B^0 + \alpha \omega C^0) + \frac{1-\alpha}{\alpha} \left( 1 - \frac{1}{\sigma} \right) D \right] e^{iy + \omega t}$$

$$\begin{aligned}
 (R\Theta v')^* &= i \left\{ -\frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\ln \alpha}{\sigma} A^0 - \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{1}{\sigma + 1} I_2\left(\alpha, \frac{\sigma}{\sigma + 1}\right) (A^0 + B^0 + \alpha \omega C^0) - \right. \\
 &\quad \left. - \left[ -\frac{1}{\sigma + 1} I_2\left(\alpha, \frac{\sigma}{\sigma + 1}\right) + \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\ln \alpha}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} \right] D \right\} e^{iy + \omega t}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (RSv')^* &= i \left\{ \frac{\ln \alpha}{\sigma} A^0 - \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{1}{\sigma L} I_2\left(\alpha, \frac{1}{L}\right) A^0 - \frac{\alpha}{1-\alpha} \left[ I_2(\alpha, \sigma) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{\sigma L + 1} I_2\left(\alpha, \frac{\sigma}{\sigma L + 1}\right) + \frac{\ln \alpha}{\sigma} + \frac{1}{\sigma(L+1)} I_2\left(\alpha, \frac{1}{L+1}\right) \right] D \right\} e^{iy + \omega t}
 \end{aligned}$$

Проделанные расчеты величин ( ) \* (формулы (3.19)) завершают вывод граничных условий на поверхности пламени с точностью до первого приближения по величине  $\varepsilon$ .

§ 4. Перейдем теперь к определению характеристической частоты задачи. Удовлетворяя решения уравнений (2.6), (2.8), (2.10) граничным условиям (3.14) и приравнявая коэффициенты при нулевой и первой степенях  $\varepsilon$ , получим две системы линейных однородных алгебраических уравнений. Первая система, получающаяся приравнением нулю коэффициентов при нулевой степени, служит для определения констант, входящих в нулевое приближение

$$\begin{aligned} A^0(\omega - 1) + B^0(\alpha\omega + 1) + 2C^0 - \frac{1-\alpha}{\alpha}H^0 &= 0 \\ -A^0 - B^0 - \alpha\omega C^0 + \frac{1-\alpha}{\alpha}D &= 0 \\ -A^0 + \alpha B^0 + \alpha C^0 + (1-\alpha)\omega D - (1-\alpha)H^0 &= 0 \\ \alpha B^0 + \alpha C^0 - \alpha\omega D + \alpha H^0 = 0, \quad -A^0 + \omega D &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Из последних трех уравнений, как легко видеть, следует  $H^0 = 0$ . Таким образом, при решении задачи в нулевом приближении нет возмущений температуры за пламенем. Это физически понятно, потому что не учитывается диффузия и теплопроводность в пламени, которые могут вызывать возмущение температуры.

Опуская четвертое уравнение (4.1) и полагая  $H^0 = 0$ , получаем систему уравнений, которая была получена Л. Д. Ландау (в несколько иной комбинации уравнений). Приравнявая определитель системы нулю для получения нетривиального решения, приходим к характеристическому уравнению Л. Д. Ландау

$$(\Omega^0)^2 + \frac{2\alpha}{1+\alpha}\Omega^0 - \frac{\alpha(1-\alpha)}{1+\alpha} = 0 \quad (\Omega^0 \equiv \alpha\omega^0) \quad (4.2)$$

Полагая в системе  $\omega = \omega^0$ , находим выражения для коэффициентов  $A^0$ ,  $B^0$ ,  $C^0$  через амплитуду возмущения поверхности  $D$ . Имеем

$$A^0 = \omega^0 D, \quad B^0 = \frac{1-\alpha}{\alpha(1+\alpha)} D, \quad C^0 = \left(\omega^0 - \frac{1-\alpha}{\alpha(1+\alpha)}\right) D \quad (4.3)$$

Перейдем к решению задачи в первом приближении. Приравнявая коэффициенты при  $\varepsilon$ , получим

$$(\omega^0 - 1)A^1 + (\alpha\omega^0 + 1)B^1 + 2C^1 - \frac{1-\alpha}{\alpha}H^1 = A^0\omega^0\tau + B^0\alpha\omega^0\tau + \{ \}_1 \quad (4.4.1)$$

$$-A^1 - B^1 - \alpha\omega^0 C^1 = [1 - \alpha\omega^0\tau - (\alpha\omega^0)^2]C^0 + \{ \}_2 \quad (4.4.2)$$

$$-A^1 + \alpha B^1 + \alpha C^1 - (1-\alpha)H^1 = (1-\alpha)\omega^0\tau D + \{ \}_3 \quad (4.4.3)$$

$$\alpha B^1 + \alpha C^1 + \alpha H^1 = -\alpha\omega^0\tau D + \{ \}_4 \quad (4.4.4)$$

$$-A^1 = \omega^0\tau D + \{ \}_5 \quad (4.4.5)$$

При выписывании этой системы было использовано новое обозначение: правые части граничных условий (3.14) для краткости были обозначены

$\varepsilon \{ \}_k$ , где индекс внизу обозначает номер уравнения. Кроме того, было использовано представление для собственной частоты задачи в виде (1.3) (ищется первое приближение по  $\varepsilon$  также и для характеристической частоты задачи).

Заметим, что из системы (4.4) легко находится  $H^1$ . Комбинируя (4.4.3), (4.4.4) и (4.4.5), получаем

$$H^1 = -\{ \}_3 + \{ \}_4 + \{ \}_5 \quad (4.5)$$

Для вычисления правых частей системы (4.4) через величину амплитуды возмущения поверхности пламени используем решения нулевого приближения, а именно — соотношения (4.3). Получаем для величин ( )\*

$$(p')^* = (\rho')^* = (R\theta')^* = (Rs')^* = (\rho'U)^* = (\rho'\Theta)^* = (\rho'S)^* = 0$$

$$(Ru')^* = \omega^0 \frac{\ln \alpha}{\sigma} De^{iy+\omega t}, \quad (Rv')^* = i(\omega^0 + 1) \frac{\ln \alpha}{\sigma} De^{iy+\omega t}$$

$$(RUv')^* = -i \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{1}{\sigma} De^{iy+\omega t} \quad (4.6)$$

$$(RSv')^* = \frac{i}{\sigma} \left[ (\omega^0 + 1) \ln \alpha - \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\omega^0}{L} I_2\left(\alpha, \frac{1}{L}\right) + \frac{1}{L+1} I_2\left(\alpha, \frac{1}{L+1}\right) \right] De^{iy+\omega t}$$

$$(R\Theta v')^* = -\frac{i}{\sigma} \left[ 1 + \frac{\alpha(\omega^0 + 1)}{1-\alpha} \ln \alpha \right] De^{iy+\omega t}$$

и с использованием (4.6) для правых частей системы (4.4)

$$\{ \}_1 = -\left[ \left(2 + \frac{1}{\sigma}\right) \frac{1-\alpha}{\alpha} + \frac{(\omega^0)^2}{\sigma} \ln \alpha \right] D \quad (4.7)$$

$$\{ \}_2 + [1 - (\alpha\omega^0)^2] C^0 = -\frac{\omega^0(\omega^0 + 1)}{\sigma} D \ln \alpha, \quad \{ \}_3 = \frac{\omega^0 + 1}{\sigma} D \ln \alpha$$

$$\{ \}_4 = -\frac{1}{\sigma} \left[ 1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} (\omega^0 + 1) \ln \alpha \right] D + zH^1$$

$$\{ \}_5 = \frac{1}{\sigma} \left[ (\omega^0 + 1) \ln \alpha - \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\omega^0}{L} I_2\left(\alpha, \frac{1}{L}\right) + \frac{1}{L+1} I_2\left(\alpha, \frac{1}{L+1}\right) \right] D - zH^1$$

а для  $H^1$  соотношение

$$H^1 = -\frac{1}{\sigma} \left\{ [ ]_a + \frac{\alpha\omega^0}{\alpha-1} [ ]_b \right\} D = -KD \quad (4.8)$$

где для краткости введены обозначения (4.9)

$$[ ]_a \equiv \left[ 1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln \alpha - \frac{1}{L-1} I_2\left(\alpha, \frac{1}{L+1}\right) \right], \quad [ ]_b \equiv \left[ \frac{1}{L} I_2\left(\alpha, \frac{1}{L}\right) + \ln \alpha \right]$$

и использована зависимость скорости реакции от температуры

$$M' = z\theta_r' = \varepsilon zH^1 \exp(iy + \omega t)$$

(Скобки  $[ ]_{a,b}$  обращаются в нуль при числе Льюиса  $L = 1$ .)

Комбинируем уравнения так, чтобы система приобрела вид, анало-

гичный системе Л. Д. Ландау [1,2]. При этом следует проделать операции  $-\frac{2}{\alpha}(4.4.1) + 2\frac{1-\alpha}{\alpha}(4.4.5)$ ,  $-(4.4.2)$ ,  $\frac{1}{\alpha}(4.4.3) - \frac{1}{\alpha}(4.4.5)$ ,  $-(4.4.5)$

Номера в скобках соответствуют уравнениям системы (4.4); уравнение (4.4.4) опускаем — оно было использовано для определения  $H^1$ . Получаем

$$\begin{aligned} (\omega^0 + 1)A^1 + (\alpha\omega^0 - 1)B^1 + \left\{ \tau \left[ \omega^0 - \frac{1-\alpha}{\alpha(1+\alpha)} \right] + \frac{1-\alpha}{\alpha} \left( 2 - \frac{1}{\sigma} \right) + \right. \\ \left. + \frac{(\omega^0)^2}{\sigma} \ln \alpha - \frac{1-\alpha}{\alpha} (1-2z)K \right\} D = 0 \\ A^1 + B^1 + \alpha\omega^0 C^1 - \left\{ \alpha\omega^0 \tau \left[ \omega^0 - \frac{1-\alpha}{\alpha(1+\alpha)} \right] + \frac{\omega^0(\omega^0 + 1)}{\sigma} \ln \alpha \right\} D = 0 \\ B^1 + C^1 + \left\{ \omega^0 \tau + \frac{1}{\alpha\sigma} + \frac{\omega^0 + 1}{(1-\alpha)\sigma} \ln \alpha + \left( 1 - \frac{z}{\alpha} \right) K \right\} D = 0 \\ A^1 + \left\{ \omega^0 \tau + \frac{1}{\sigma} \left[ 1 + \frac{\omega^0 + 1}{1-\alpha} \ln \alpha \right] + (1-z)K \right\} D = 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Так же, как и при решении задачи в нулевом приближении, для существования нетривиального решения необходимо, чтобы определитель системы (4.10) равнялся нулю. Это дает условие для определения поправки к характеристической частоте задачи  $\tau$ .

Находим

$$\begin{aligned} \tau = \frac{1-\alpha}{1-\alpha-\Omega^0} - \frac{1+\alpha+2\Omega^0}{1-\alpha-\Omega^0} \frac{1}{\sigma} \left( 1 + \frac{\ln \alpha}{1-\alpha} \right) + \\ + \frac{1+\Omega^0}{1-\alpha-\Omega^0} (1+\alpha-2z) \frac{1}{\sigma} \left\{ \ln \alpha + \frac{\Omega^0}{1-\alpha} \ln \alpha \right\} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Если экстраполировать (4.11) в область длин волн возмущений, для которых  $\omega = 0$ , то величина  $\tau$  равняется критическому числу Рейнольдса, построенному по длине волны возмущений (точнее — по волновому числу  $k = 2\pi / \lambda$ )  $\tau = N_{R0}$ .

§ 5. Полученная в предыдущем параграфе формула (4.11) показывает, какое влияние на стабилизацию пламени оказывают отдельные диссипативные эффекты.

Первое слагаемое этой формулы характеризует влияние вязкости. Как легко убедиться, используя выражение для  $\Omega^0$

$$\Omega^0 = (-\alpha + \sqrt{\alpha + \alpha^2 - \alpha^3}) / (1 + \alpha) \quad (5.1)$$

(см. (4.2)), это слагаемое всегда больше нуля — вязкость, таким образом, всегда стабилизирует пламя. Это согласуется с выводами работ [5,6] и противоречит результатам работ [4,8], в которых был выявлен физически странный эффект дестабилизирующего влияния вязкости. Критическое число Рейнольдса, получающееся из-за действия вязкости

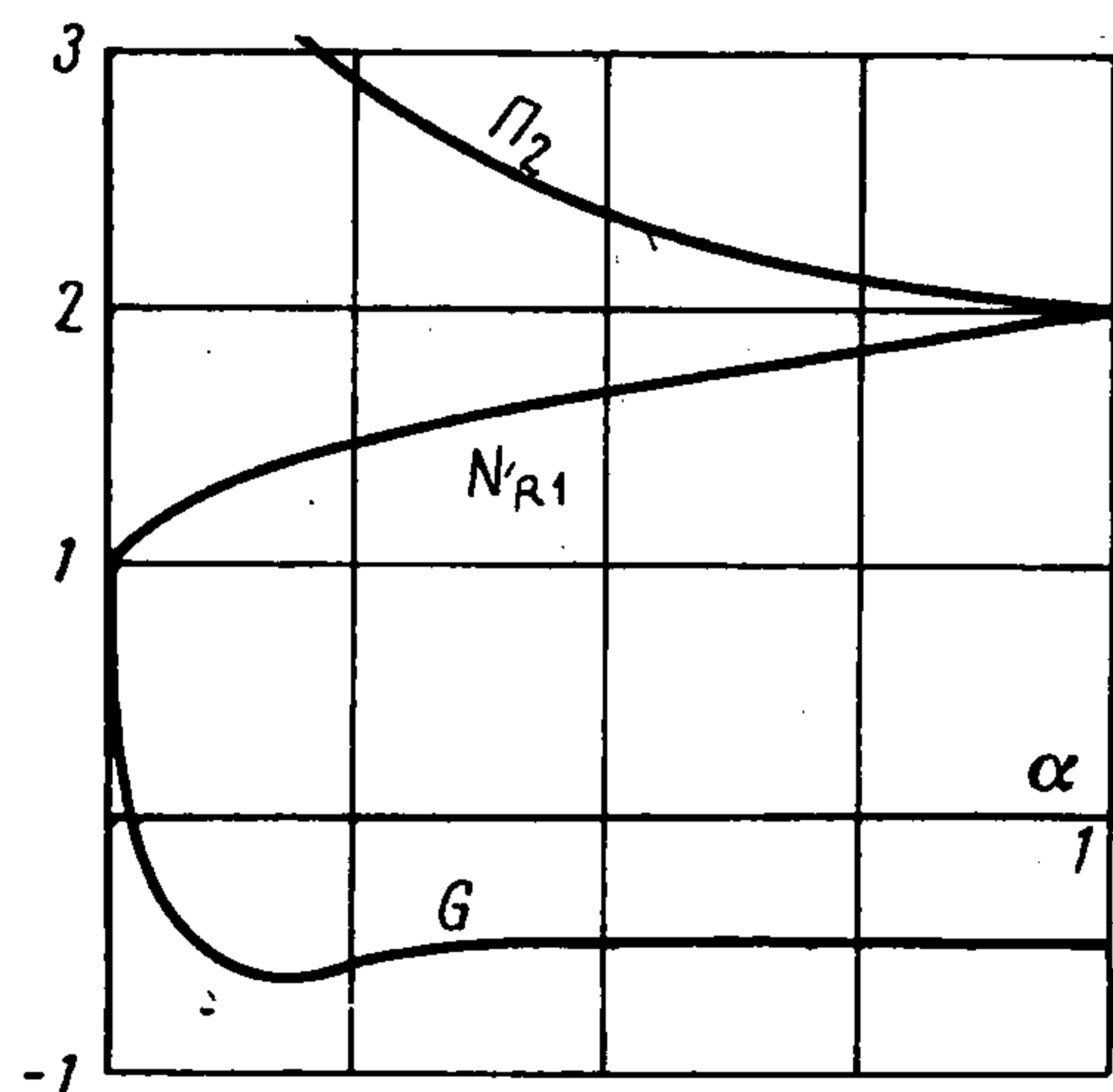
$$N_{R1} = (1 - \alpha) / (1 - \alpha - \Omega^0) \quad (5.2)$$

невелико — на фиг. 2 изображена зависимость  $N_{R1}$  от  $\alpha$ . Для реальных пламен  $\alpha = 0.1 \div 0.2$  и  $N_{R1} = 1.3 \div 1.5$ .

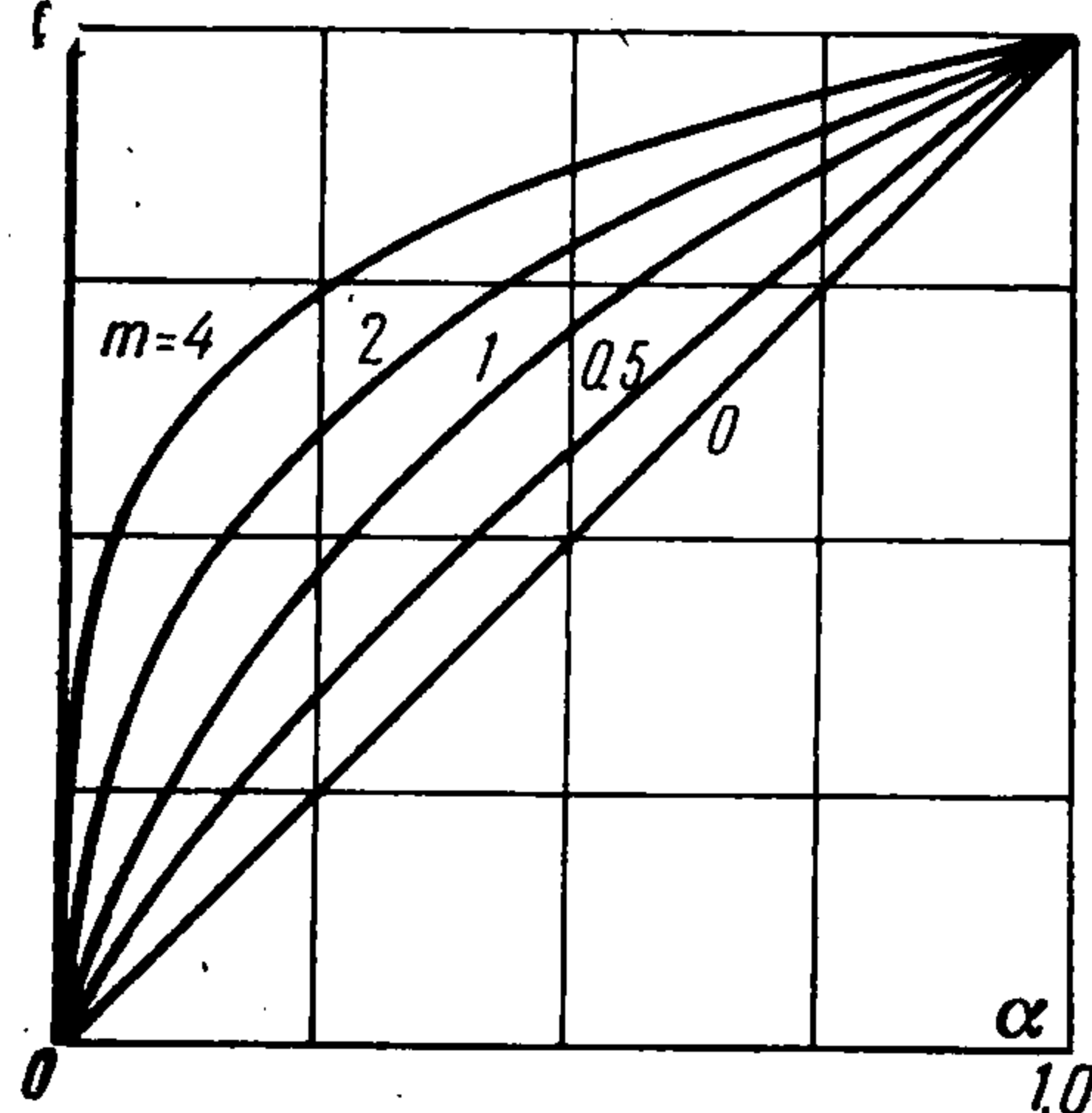
Второе слагаемое в формуле (4.11) характеризует влияние теплопроводности. Критическое число Пекле, отвечающее одному этому влиянию, равно

$$\Pi_2 = \sigma N_{R2} = - \frac{1 + \alpha + 2\Omega^0}{1 - \alpha - \Omega^0} \left( 1 + \frac{\ln \alpha}{1 - \alpha} \right) \quad (5.3)$$

Зависимость  $\Pi_2$  от  $\alpha$  также изображена на фиг. 2. Теплопроводность также только стабилизирует пламя. Для реальных пламен значение числа Пекле  $\Pi_2 \approx 3$ .



Фиг. 2



Фиг. 3

Наконец, последнее слагаемое в формуле (4.11) описывает влияние на устойчивость пламени соотношения между диффузией и теплопроводностью. Критическое число Пекле, описывающее это влияние, равно

$$\Pi_3 = \frac{1 + \Omega^0}{1 - \alpha - \Omega^0} (1 + \alpha - 2z) \left\{ \left[ 1 + \frac{\Omega^0}{1 - \alpha} \right] b \right\} \quad (5.4)$$

Оно зависит от двух параметров — степени теплового расширения  $\alpha$  и числа Льюиса  $L$  и характеризует, таким образом, влияние соотношения между диффузией и теплопроводностью.

Следует подчеркнуть, однако, что роль числа  $L$  здесь несколько иная, чем в случае чисто диффузионно-тепловой устойчивости [15, 16]. Последняя связана с перераспределением тепла и вещества между выпуклостями и впадинами фронта за счет поперечных диффузионных и кондуктивных тепловых потоков, возникающих при искривлениях пламени. В нашем случае поперечные потоки тепла и вещества являются конвективными: фронт пламени рассматривается здесь в приближении пограничного слоя, диффузия и теплопроводность учитываются только в направлении, нормальном к фронту (как квазистационарные изменения профилей концентрации и температуры), а вдоль фронта тепло и вещество переносятся пульсациями касательной скорости. Таким образом, диффузионно-тепловые явления в смысле работ [15, 16] будут проявляться лишь при отыскании поправки второго порядка по  $\epsilon$  к решению Л. Д. Ландау. Роль числа Льюиса в данной задаче сводится к тому, что диффузионная и тепловая ширина фронта различны и различны поэтому эффективные значения концентрации и температуры, которые сносятся поперечными пульсациями. На фиг. 1 видно, как внутри фронта пламени искривляются линии тока и составляющие скорости по оси  $y$  меняют знак. В зависимости от степени теплового расширения  $\alpha$  может преобладать перенос на внешней или внутренней частях фронта и эффект будет разный при одинаковом соотношении между диффузией и теплопроводностью.

В этом легко убедиться. Если  $\alpha \rightarrow 0$  (сильное тепловое расширение), то для числа Пекле получим

$$P_s \rightarrow (1-2z)(L-1)/L \approx -2z(L-1)/L \quad (5.5)$$

При  $\alpha \rightarrow 1$  (тепловое расширение нет)

$$P_s \rightarrow -2(1-z)(L-1)/L(L+1) \approx 2z(L-1)/L(L+1) \quad (5.6)$$

и при одном и том же знаке  $L-1$  для числа Пекле знак меняется.

Если число Льюиса близко к единице  $|L-1| \ll 1$ , вместо формулы (5.4) можно получить более простое соотношение

$$P_s \approx -2z \frac{1+\Omega^0}{1-\alpha-\Omega^0} \left[ 1 - \frac{\Omega^0+\alpha}{1-\alpha} I_1(\alpha) \right] (L-1) = -2zG(\alpha)(L-1) \quad (5.7)$$

Функция  $G(\alpha)$  изображена на фиг. 2. Видно, что она проходит через нуль при весьма малых  $\alpha$ , которые на практике не встречаются.

В общем случае нужно пользоваться формулой (5.4). Для облегчения расчетов по этой формуле на фиг. 3 приведены кривые  $[\alpha/(1-\alpha)] I_2(\alpha, m)$  при различных значениях параметра  $m$ .

Таким образом, учет эффектов переноса приводит к стабилизации мелких возмущений. Критическое число Рейнольдса  $\tau$ , полученное экстраполяцией линейной поправки, не сильно отличается от единицы. Например, при  $\alpha = 0,2$ ,  $z = 10$ ,  $\sigma = 1$  и  $L = 1, 2$  получим  $\tau \approx 7$ .

В заключение благодарим Г. И. Баренблатта и Я. Б. Зельдовича — за постановку задачи и ее обсуждение и О. И. Лейпунского и В. И. Ягодкина за ценные замечания.

Поступила 18 I 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. К теории медленного горения. Ж. эксперим. и теор. физ., 1944, т. 14, № 6.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. ГИТТЛ, 1954.
3. Markstein G. H. Experimental and theoretical studies of flame-front stability. J. Aeronaut. Sci., 1951, vol. 18, No. 3.
4. Einbinder H. The hydrodynamic stability of flame fronts. J. Chem. Phys., 1953, vol. 21, p. 480.
5. Ягодкин В. И. Об устойчивости разрывного фронта пламени в вязкой среде. Изв. АН СССР, ОТН, 1955, т. 7, стр. 101.
6. Maworth T. Flame propagation in tubes. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, 407.
7. Eckhaus W. Theory of flame-front stability. J. Fluid Mech., 1961, vol. 10, p. 80.
8. Chu B.-T. Parlange J. Y. On the stability of laminar flames. J. Mécan., 1962, No. 1, p. 293.
9. Non-steady flame propagation. Ed. by G. Markstein. Pergamon Press, 1964.
10. Germain P., Guiraud J.-P. Conditions de choc dans un fluide doué de coefficients de viscosité et de conductibilité thermique faibles mais non nuls. Comp. rend., 1960, vol. 250, No. 11.
11. Germain P., Guiraud J.-P. Conditions de choc dans un fluide faiblement dissipatif en mouvement non stationnaire. Comp. rend., 1961, vol. 252, No. 7.
12. Germain P., Guiraud J.-P. Conditions de choc et structure des ondes de choc dans un écoulement stationnaire de fluide dissipatif. Publication ONERA 1962, No. 105.
13. Зельдович Я. Б., Франк-Каменецкий Д. А. Теория теплового распространения пламени. Ж. физ. химии, 1938, т. 12, стр. 100.
14. Зельдович Я. Б. К теории распространения пламени. Ж. физ. химии, 1948, т. 22, № 1.
15. Зельдович Я. Б. Теория горения и детонации газов. Изд-во АН СССР, 1944.
16. Баренблатт Г. И., Зельдович Я. Б., Истратов А. Г. О диффузионно-тепловой устойчивости ламинарного пламени. ПМТФ, 1962, № 4.