Прикладная математика и механика. Том 30, 1966

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

О. А. Олейник

(Москва)

Изучается поведение решения системы уравнений нестационарного пограничного слоя для двумерного течения несжимаемой жидкости при неограниченном возрастании времени. Доказывается, что при определенных естественных условиях продольная компонента скорости нестационарного течения в пограничном слое стремится при $t \to \infty$ к продольной компоненте скорости стационарного течения.

Рассмотрим систему уравнений пограничного слоя для двумерного нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости (см., напр. [1])

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

в области $D\ \{0 \leqslant t < \infty,\ 0 \leqslant x \leqslant x_0,\ 0 \leqslant y < \infty\}$ с условиями

$$u|_{t=0} = u_0(x, y) \tag{2}$$

$$u|_{y=0} = 0, \quad v|_{y=0} = v_0(t, x), \quad u|_{x=0} = u_1(t, y), \quad \lim_{y\to\infty} u(t, x, y) = U(t, x)$$

где функции $p(t, x)$ и $U(t, x)$ связаны законом Бернулли

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} \tag{3}$$

Предположим, что при $t \to \infty$ заданные функции $p(t, x)$, $U(t, x)$, $v_0(t, x)$ равномерно по x стремятся соответственно к функциям $p^\infty(x)$, $U^\infty(x)$, $v_0^\infty(x)$, а $u_1(t, y)$ при $t > t_1$, где $t_1 \geqslant 0$ — некоторое число, не зависит от t, т. е. $u_1(t, y)$ при $t > t_1$ совпадает с некоторой функцией $u_1^\infty(y)$. Рассмотрим систему уравнений Прандтля для стационарного пограничного слоя

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p^\infty}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{4}$$

в области $D^\infty\ \{0 \leqslant x \leqslant x_0,\ 0 \leqslant y < \infty\}$ с условиями

$$u|_{y=0} = 0, \quad v|_{y=0} = v_0^\infty(x), \quad u|_{x=0} = u_1^\infty(y), \quad \lim_{y\to\infty} u(x, y) = U^\infty(x) \tag{5}$$

Будем предполагать, что решение $u^\infty(x, y)$, $v^\infty(x, y)$ системы (4) с условиями (5) существует и обладает следующими свойствами: $\partial u^\infty / \partial y > 0$ при $0 \leqslant y < \infty$, а $u^\infty(x, y)$ и $\partial u^\infty / \partial y$ имеют в D^∞ непрерывные и ограниченные производные первого порядка по x и y, и, кроме того, существуют производные $\partial^3 u^\infty / \partial y^3$ и $\partial v^\infty / \partial y$.

Будем также предполагать, что решение $u\,(t,\,x,\,y)$, $v\,(t,\,x,\,y)$ системы уравнений (1) с условиями (2), (3) существует и имеет следующие свойства: $\partial u\,/\,\partial y > 0$ при $0 \leqslant y < \infty$, $u\,(t,\,x,\,y)$ и $\partial u\,/\,\partial y$ имеют в D непрерывные и ограниченные производные первого порядка по t, x и y, существуют непрерывные производные $\partial^3 u\,/\,\partial y^3$, $\partial v\,/\,\partial y$ и, кроме того,

$$\left[\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\frac{\partial u}{\partial y} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2\right]\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{-3} < K \tag{6}$$

в D, где K — некоторая постоянная. Эти предположения всегда выполняются при естественных ограничениях на данные задач (1)—(3) и (4), (5), если x_0 достаточно мало (см. [2,3]).

В работе [2] изучалась система уравнений Прандтля (4) с условиями (5). В этой работе доказано, что решение задачи (4), (5) существует в области D^∞ при некотором $x_0 > 0$, если функции $p^\infty\,(x)$, $v_0^\infty\,(x)$, $u_1^\infty\,(y)$, $U^\infty\,(x)$ удовлетворяют некоторым условиям гладкости, естественным условиям согласования в точке (0, 0) и условиям $u_1^\infty\,(y) > 0$ при $y > 0$ и $U^\infty\,(x) > 0$ при $x \geqslant 0$. Построенное в этой работе решение $u^\infty\,(x,\,y)$, $v^\infty\,(x,\,y)$ таково, что $\partial u^\infty\,/\,\partial y > 0$ при $y \geqslant 0$, если $\partial u_1^\infty\,/\,\partial y > 0$ при $y \geqslant 0$.

Решение системы уравнений (1) для нестационарного пограничного слоя с условиями (2), (3) в области D при некотором $x_0 > 0$ построено в работе [3]. При этом предполагается некоторая гладкость функций $p\,(t,\,x)$, $U\,(t,\,x)$, $u_0\,(x,\,y)$, $v_0\,(t,\,x)$, $u_1\,(t,\,y)$, а также их согласование с уравнениями (1), и граничными условиями на прямых $t = 0$, $y = 0$ и $t = 0$, $x = 0$. Кроме того, предполагается, что $U\,(t,\,x) > 0$ и $u_0\,(x,\,y) > 0$ при $y > 0$, $\partial u_1\,/\,\partial y > 0$ при $0 \leqslant y < \infty$.

Это решение удовлетворяет условию

$$\frac{\partial u\,(t,\,x,\,y)}{\partial y} > 0 \qquad \text{при } 0 \leqslant y < \infty$$

а также условию (6). Покажем, что

$$\lim_{t\to\infty} u\,(t,\,x,\,y) = u^\infty\,(x,\,y) \tag{7}$$

для всех x, y из D^∞. Это означает, что решение $u\,(t,\,x,\,y)$ системы уравнений пограничного слоя для нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости при $t \to \infty$ стремится к решению $u^\infty\,(t,\,x)$ соответствующей задачи для системы уравнений стационарного пограничного слоя. В частности, отсюда следует, что продольная компонента скорости $u\,(t,\,x,\,y\,)$при $t \to \infty$ выходит в пограничном слое на стационарный режим при любом возмущении стационарного решения, т. е. функций u^∞, v_0^∞, p^∞, u_1^∞, U^∞, на конечном промежутке времени t.

Для доказательства соотношения (7) исключим v из системы (1) при помощи преобразования Крокко:

$$\tau = t, \qquad \xi = x, \qquad \eta = u\,(t,\,x,\,y)$$

Тогда новая неизвестная функция $w = \partial u / \partial y$ удовлетворяет уравнению

$$\nu w^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \frac{\partial w}{\partial \tau} - \eta \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 \qquad (8)$$

в области $\Omega\,\{0 \leqslant \tau < \infty,\ 0 \leqslant \xi \leqslant x_0,\ 0 \leqslant \eta \leqslant U(\tau, \xi)\}$.

Из условий (3) следует, что на границе области Ω функция w должна удовлетворять условиям

$$w|_{\tau=0} = \frac{\partial u_0}{\partial y} \equiv w_0(\xi, \eta), \qquad w|_{\xi=0} = \frac{\partial u_1}{\partial y} \equiv w_1(\xi, \eta), \qquad w|_{\eta=U(\tau,\xi)} = 0$$

$$\left(\nu w \frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - v_0 w\right)\Big|_{\eta=0} = 0 \qquad (9)$$

В уравнениях (4), (5) сделаем аналогичную замену независимых переменных

$$\xi = x, \qquad \eta = u(x, y)$$

и введем новую неизвестную функцию $w = \partial u / \partial y$.

Функция w удовлетворяет уравнению

$$\nu w^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \eta \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^\infty}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 \qquad (10)$$

в области $\Omega^\infty\,\{0 \leqslant \xi \leqslant x_0,\ 0 \leqslant \eta \leqslant U^\infty(\xi)\}$ и условиям

$$\left.\begin{aligned} &w|_{\xi=0} = \frac{\partial u_1^\infty}{\partial y} \equiv w_1^\infty(\eta), \qquad w|_{\eta=U^\infty(\xi)} = 0 \\ &\left(\nu w \frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^\infty}{\partial x} - v_0^\infty w\right)\Big|_{\eta=0} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

на границе области Ω^∞. Обозначим решение уравнения (10) с условиями (11) через $w^\infty(\xi, \eta)$.

Рассмотрим в области Ω_1, которая является пересечением области Ω с цилиндром $\{0 \leqslant \tau < \infty,\ 0 \leqslant \xi \leqslant x_0,\ 0 \leqslant \eta \leqslant U^\infty(\xi)\}$, функцию $V(\tau, \xi, \eta) = w(\tau, \xi, \eta) - w^\infty(\xi, \eta)$, где w — решение задачи (8), (9), а w^∞ — решение задачи (10), (11). Вычитая из уравнения (8) уравнение (10) для w^∞, получаем уравнение для V

$$\left.\begin{aligned} &\nu(w^\infty)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} - \frac{\partial V}{\partial \tau} - \eta \frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^\infty}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial \eta} + \nu(w + w^\infty) \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} V = \Phi(\tau, \xi, \eta) \\ &\Phi(\tau, \xi, \eta) = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p^\infty}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x}\right) \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Функция $V(\tau, \xi, \eta)$ удовлетворяет условиям

$$V|_{\tau=0} = w_0(\xi, \eta) - w^\infty(\xi, \eta), \qquad V|_{\xi=0} = w_1(\tau, \eta) - w_1^\infty(\eta) \qquad (13)$$

$$\left(\nu w^\infty \frac{\partial V}{\partial \eta} + \left(\nu \frac{\partial w}{\partial \eta} - v_0^\infty\right) V\right)\Big|_{\eta=0} = \Psi(\tau, \xi)$$

$$\Psi(\tau, \xi) = \left[\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^\infty}{\partial x}\right) + (v_0 - v_0^\infty)\, w\right]\Big|_{\eta=0}$$

Так как

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial x} \to \frac{\partial p^\infty(x)}{\partial x}, \qquad v_0(t,x) \to v^\infty{}_0(x) \text{ при } t \to \infty$$

равномерно по x, а w, $\partial w / \partial \eta$ ограничены в Ω, то $|\Phi(\tau, \xi, \eta)| < \varepsilon$ и $|\Psi(\tau, \xi)| < \varepsilon$, если $\tau > \tau_1$ и τ_1 достаточно велико, ε — произвольное положительное число. Очевидно, что

$$V|_{\xi=0} = \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_1{}^\infty}{\partial y} = 0 \qquad \text{при } \tau > t_1$$

согласно сделанному предположению относительно $u_1(t, y)$.

Пусть $\varphi(s)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция при $s \geqslant 0$, равная $3 - e^s$ при $0 \leqslant s \leqslant 1/2$ и такая, что $1 \leqslant \varphi(s) \leqslant 3$ при всех s.

Рассмотрим функцию V_1, определенную равенством $V = V_1 e^{\beta\xi} \varphi(\alpha\eta)$, где $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ — некоторые достаточно большие числа, которые выберем ниже.

Покажем, что $V_1(\tau, \xi, \eta) \to 0$ при $\tau \to \infty$ равномерно по ξ и η и, следовательно, $V(\tau, \xi, \eta) = w(\tau, \xi, \eta) - w^\infty(\xi, \eta) \to 0$ при $\tau \to \infty$.

Из уравнения (12) получаем уравнение для $V_1(\tau, \xi, \eta)$

$$L(V_1) \equiv \nu(w^\infty)^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial \eta^2} - \frac{\partial V_1}{\partial \tau} - \eta \frac{\partial V_1}{\partial \xi} +$$

$$+ \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p^\infty}{\partial x} + 2\nu\alpha(w^\infty)^2 \frac{\varphi'}{\varphi}\right)\frac{\partial V_1}{\partial \eta} + cV_1 = \frac{\Phi e^{-\beta\xi}}{\varphi} \tag{14}$$

$$c \equiv \nu(w + w^\infty)\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \eta\beta + \frac{\alpha}{\rho}\frac{\partial p^\infty}{\partial x}\frac{\varphi'}{\varphi} + \nu(w^\infty)^2\alpha^2\frac{\varphi''}{\varphi}$$

Если $\alpha\eta < 1/2$, то $-2 < \varphi' \leqslant -1$, $\varphi'' \leqslant -1$, $1 \leqslant \varphi \leqslant 3$. В силу свойств решения $u^\infty(x, y)$ задачи (4), (5), функция $w^\infty(\xi, \eta) \geqslant a > 0$, где a — некоторая постоянная, если $0 \leqslant \eta \leqslant \delta_1$ и $\delta_1 > 0$ — достаточно мало, $\partial^2 w / \partial \eta^2$ — ограничена. Выберем $\alpha > 0$ настолько большим, чтобы

$$\nu(w + w^\infty)\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \eta\beta + 2\frac{\alpha}{\rho}\left|\frac{\partial p^\infty}{\partial x}\right| - \frac{1}{3}\nu a^2\alpha^2 < -M \qquad (M > 0)$$

Здесь постоянную M можно задать произвольно. При таком выборе α коэффициент c в уравнении (14) меньше, чем $-M$, если $\alpha\eta < 1/2$ и $\eta < \delta_1$.

Выберем далее $\beta > 0$ столь большим, чтобы при $\eta > \min(1/2\,\alpha^{-1}, \delta_1)$ коэффициент c при V_1 в уравнении (14) был меньше, чем $-M$. Функция V_1 удовлетворяет условиям (15)

$$V_1|_{\tau=0} = (w_0(\xi,\eta) - w^\infty(\xi,\eta))\,e^{-\beta\xi}\frac{1}{\varphi}, \qquad V_1|_{\xi=0} = (w_1(\tau,\eta) - w_1{}^\infty(\eta))\frac{1}{\varphi}$$

$$l(V_1) \equiv \left(\nu w^\infty \frac{\partial V_1}{\partial \eta} - c_1 V_1\right)\Big|_{\eta=0} = \frac{1}{2}\Psi e^{-\beta\xi}, \qquad c_1 \equiv \left(\frac{1}{2}\nu\alpha w^\infty - \nu\frac{\partial w}{\partial \eta} + v_0{}^\infty\right)\Big|_{\eta=0}$$

При выборе α можно также заранее предположить, что

$$\alpha > \frac{2}{\nu a}\left(\max|v_0{}^\infty| + \nu\left|\frac{\partial w}{\partial \eta}\right| + 1\right)$$

Поэтому можно считать, что $c_1 > 1$ в условии (15).

Если τ достаточно велико, то $|U(\tau, \xi) - U^\infty(\xi)| \leqslant \varkappa$, где $\varkappa > 0$ — любое, наперед заданное число. Поэтому

$$|V| = |w - w^\infty| \leqslant \varepsilon \text{ при } \eta > U^\infty(\xi) - \varkappa, \quad \tau > \tau_2$$

если $\varkappa$ и τ_2^{-1} — достаточно малы, так как функция $w^\infty(\xi, \eta) \to 0$ при $U^\infty(\xi) - \eta \to 0$ и $w(\tau, \xi, \eta) \to 0$ при $U(\tau, \xi) - \eta \to 0$ равномерно по τ. Здесь $\varepsilon > 0$ — любое заданное число. Следовательно

$$|V_1| = \left|Ve^{-\beta\xi}\frac{1}{\varphi}\right| \leqslant \varepsilon \qquad \text{при } \tau > \tau_2, \quad \eta > U^\infty(\xi) - \varkappa$$

Обозначим через G_σ ту часть области Ω_1, для которой $\tau \geqslant \sigma$. Пусть $\delta > 0$ — произвольное заданное число. Покажем, что в Ω_1

$$|V_1(\tau, \xi, \eta)| \leqslant \delta + M_1 e^{-\gamma\tau} \tag{16}$$

где $\gamma > 0$ — любая постоянная, меньшая чем M; постоянная $M_1 > 0$ зависит от δ и γ. Рассмотрим в G_σ функции $W_\pm$:

$$W_+ = \delta + M_1 e^{-\gamma\tau} + V_1, \quad W_- = \delta + M_1 e^{\gamma\tau} - V_1$$

Здесь δ и γ уже заданы, а M_1 выберем ниже. Функции W_+, W_- удовлетворяют уравнению

$$L(W_\pm) = cM_1 e^{-\gamma\tau} + \gamma M_1 e^{-\gamma\tau} + c\delta \pm \Phi e^{-\beta\xi}\frac{1}{\varphi} \tag{17}$$

Заметим, что $c < -M$ и $\gamma < M$. Поэтому сумма двух первых членов в правой части уравнения (17) отрицательна. Так как $|\varphi^{-1}\Phi e^{-\beta\xi}| \to 0$ при $\tau \to \infty$ равномерно по ξ и η, то

$$\pm \Phi e^{-\beta\xi}\varphi^{-1} + c\delta < 0 \text{ при } \delta > 0$$

если τ достаточно велико. Итак, показано, что $L(W_+) < 0$ и $L(W_-) < 0$ в G_σ, если σ — достаточно велико.

Из неравенства $L(W_\pm) < 0$ в G_σ следует, что $W_\pm$ не может принимать отрицательный минимум внутри области G_σ или при $\xi = x_0$, а также на сечении $\tau = \tau_3$, $\tau_3 > \sigma$, если $W_\pm$ рассматривать при $\sigma < \tau < \tau_3$.

Покажем, что $W_\pm$ не может принимать отрицательный минимум и на остальной части границы G_σ, если σ достаточно велико, т. е. $W_+ \geqslant 0$ и $W_- \geqslant 0$ в G_σ. При $\xi = 0$ и на той части границы области G_σ, которая лежит на поверхности $\eta = U^\infty(\xi)$ или $\eta = U(\tau, \xi)$, имеем $W_\pm \geqslant 0$, так как $V_1|_{\xi=0} = 0$ при достаточно больших τ и $|V_1| < \varepsilon$ при $\eta > U(\xi) - \varkappa$ и $\tau > \tau_2$. Выберем $\varepsilon < \delta$ и соответственно достаточно малые $\varkappa$ и τ_2^{-1}.

При $\eta = 0$ имеем

$$l(W_\pm) = -c_1(\delta + M_1 e^{-\gamma\tau}) \pm {}^1/_2\Psi e^{-\beta\xi} < 0$$

если $\tau > \tau_4$ и τ_4 — достаточно велико, так как $c_1 > 1$, а $|\Psi e^{-\beta\xi}| \to 0$ при $\tau \to \infty$ равномерно относительно ξ. Поэтому $W_\pm$ не может принимать отрицательный минимум при $\eta = 0$, $\tau > \tau_4$.

Выберем M_1 настолько большим, чтобы при $\tau = \sigma$ ($\sigma > \tau_2$, $\sigma > \tau_4$) выполнялись неравенства $W_+ > 0$ и $W_- > 0$.

Таким образом, всюду в G_σ, если σ достаточно велико, $W_\pm \geqslant 0$ и, следовательно, $\pm V_1 + M_1 e^{-\gamma\tau} + \delta \geqslant 0$, или

$$|V_1| \leqslant \delta + M_1 e^{-\gamma\tau} \quad \text{в } G_\sigma \tag{18}$$

Очевидно, что, увеличив, если нужно, постоянную M_1, получим из (18), что неравенство (16) имеет место в Ω_1 при некоторой постоянной M_1. Из (18) следует, что $w(\tau, \xi, \eta) \to w^\infty(\xi, \eta)$ равномерно по ξ и η при $\tau \to \infty$. Отсюда следует, что

$$\lim_{t\to\infty} u(t, x, y) = u^\infty(x, y) \tag{19}$$

для всех x, y из D^∞.

Действительно, $|U^\infty(x) - u^\infty(x, y)| < \varepsilon$ и $|U(t, x) - u(t, x, y)| < \varepsilon$ при $y > y_1$, так как $w(\tau, \xi, \eta) \to 0$ при $U(\tau, \xi) - \eta \to 0$ равномерно по τ. Поэтому

$$|u^\infty(x, y) - u(t, x, y)| < 2\varepsilon \tag{20}$$

при достаточно больших t и $y > y_1$.

При $y \leqslant y_1 < \infty$ неравенство (20) при больших t следует из представления $u^\infty(x, y)$ и $u(t, x, y)$ через функции w^∞ и w. Действительно,

$$y = \int_0^{u(t,x,y)} \frac{ds}{w(t, x, s)}, \qquad y = \int_0^{u^\infty(x, y)} \frac{ds}{w^\infty(x, s)}$$

Имеем

$$0 = \int_0^{u(t,x,y)} \frac{ds}{w(t, x, s)} - \int_0^{u^\infty(x, y)} \frac{ds}{w^\infty(x, s)} = \int_0^{u^\infty(x, y)} \left(\frac{1}{w} - \frac{1}{w^\infty}\right) ds + \int_{u^\infty(x, y)}^{u(t, x, y)} \frac{ds}{w(t, x, s)}$$

Так как

$$U(t, x) - u(t, x, y) > \varkappa_1, \quad U^\infty(x) - u^\infty(x, y) > \varkappa_1 \quad \text{при } y \leqslant y_1$$

и кроме того

$$w(t, x, s) \geqslant a_1 > 0, \quad w^\infty(x, s) \geqslant a_1 > 0 \quad \text{при } s < U(t, x) - \varkappa_1,\ s < U^\infty(x) - \varkappa_1$$

то имеем

$$u(t, x, y) - u^\infty(x, y) = w(t, x, s_1) \int_0^{u^\infty(x, y)} \frac{(w - w^\infty)}{ww^\infty} ds \qquad \text{при } y \leqslant y_1$$

Здесь s_1 заключено между $u(t, x, y)$ и $u^\infty(x, y)$. Отсюда следует, что

$$|u(t, x, y) - u^\infty(x, y)| \leqslant \delta_2 + M_2 e^{-\gamma t} \qquad \text{при } y \leqslant y_1$$

и при некоторых положительных постоянных δ_2 и M_2; δ_2 можно считать произвольно малой, M_2 зависит от δ_2 и y_1. Поэтому $u(t, x, y) \to u^\infty(x, y)$ при $t \to \infty$ для $0 \leqslant x \leqslant x_0$, $0 \leqslant y < \infty$.

Замечание 1. Если функции $p(t, x)$, $U(t, x)$, $v_0(t, x)$, $u_1(t, y)$ таковы, что при $t > t_1$ они не зависят от t, то, как легко видеть, можно доказать неравенство (16) при $\delta = 0$. Поэтому в таком случае имеем

$$|w(\tau, \xi, \eta) - w^\infty(\xi, \eta)| \leqslant M_1 e^{-\gamma t} \tag{21}$$

в Ω, где γ — любое число, а M_1 — некоторая постоянная, зависящая от γ. Из неравенства (21) следует, что в этом случае

$$|u(t, x, y) - u^\infty(x, y)| \leqslant M_2 e^{-\gamma t}, \quad \text{если} \quad y \leqslant y_1 < \infty, \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0$$

Здесь M_2 зависит от γ и y_1.

Замечание 2. Выше предполагалось, что $u_1(t, y)$ в условиях (3) не зависит от t при достаточно больших t. Равенство (16) будет также справедливым, если это предположение заменить условием, что

$$\left|\frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_1^\infty}{\partial y}\right| \to 0 \qquad \text{при } t \to \infty$$

равномерно по y и $|u_1^{-1} - u_1^{\infty -1}| \to 0$ при $t \to \infty$ равномерно по η, где u_1^{-1}, $u_1^{\infty-1}$ — соответствующие обратные функции для u_1 и u_1^∞, т. е.

$$\eta = u_1(t, y), \; y = u_1^{-1}(t, \eta) \; \text{ и } \; \eta = u_1^\infty(y), \; y = u_1^{\infty-1}(\eta)$$

В этом случае

$$|V|_{\xi=0} = \left|\frac{\partial u_1(t, y)}{\partial y} - \frac{\partial u_1^\infty(y)}{\partial y}\right| = \left|\frac{\partial u_1(t, u_1^{-1}(t, \eta))}{\partial y} - \frac{\partial u_1^\infty(u_1^{\infty-1}(\eta))}{\partial y}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{\partial u_1(t, u_1^{-1}(t, \eta))}{\partial y} - \frac{\partial u_1^\infty(u_1^{-1}(t, \eta))}{\partial y}\right| + \max\left|\frac{\partial^2 u_1^\infty}{\partial y^2}\right| |u_1^{-1}(t, \eta) - u_1^{\infty-1}(\eta)|$$

Отсюда, в силу сделанных предположений, следует, что $|V|_{\xi=0} \to 0$ при $t \to \infty$ равномерно по η, так как $\partial^2 u_1^\infty / \partial y^2$ ограничено при $0 \leqslant y < \infty$. Этого достаточно для доказательства неравенства (16) и, следовательно, (19).

Автор благодарит Г. И. Баренблатта за обсуждение результатов настоящей статьи.

Поступила 22 II 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. Изд. иностр. лит., М., 1956.
2. Олейник О. А. О системе уравнений теории пограничного слоя. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 3, стр. 489—507.
3. Олейник О. А. О системе уравнений пограничного слоя для нестационарного течения несжимаемой жидкости. Докл. АН СССР, 1966, т. 168, № 4.