ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ЗАКРЕПЛЕННОЙ ТОЧКОЙ

В. Ф. Ляшенко (Москва)

Рассматривается вопрос об устойчивости движения по Ляпунову тяжелого твердого тела с закрепленной точкой, перемещающейся по поверхности земной сферы, центр тяжести которого C не лежит ни на одной из главных осей инерции тела в точке опоры. Приводится интеграл энергии системы, который используется для получения достаточных условий устойчивости невозмущенного движения последней.

1. Решение рассматриваемой задачи в предположении, что центр тяжести тела расположен на одной из главных осей инерции в точке опоры, дано в работе [1]. Отказ от указанного предположения значительно усложнил задачу в части разыскания положений равновесия системы и вида условий устойчивости.

Пусть $Ox_1y_1z_1$ и $Oxyz$ — правые системы координат с началом в точке опоры. Ось x_1 первой системы направим по вектору скорости точки опоры, ось z_1 — вдоль радиуса земной сферы вертикально вверх [2]. Оси xyz второй системы жестко свяжем с телом, направив, скажем, ось z таким образом, чтобы центр тяжести тела лежал на этой оси.

Пользуясь произволом в выборе осей xyz, можно было бы направить их по главным осям инерции тела в точке опоры, а положение вектора OC в этой системе определять тремя его проекциями. Однако при обеих указанных выборах системы xyz рассматриваемая задача по своей сложности оказывается одинаковой.

Уравнения движения системы в проекциях на оси xyz имеют вид

$$\begin{gathered}\frac{dK_x}{dt}+qK_z-rK_y=(F_g-m\omega v)\,l_z\psi_2+mvl_z\Omega\vartheta_2+ml_z\frac{dv}{dt}\theta_2\\ \frac{dK_y}{dt}+rK_x-pK_z=-(F_g-m\omega v)\,l_z\psi_1-mvl_z\Omega\vartheta_1-ml_z\frac{dv}{dt}\theta_1\\ \frac{dK_z}{dt}+pK_y-qK_x=0\qquad\left(\omega=\frac{v}{R}\right)\end{gathered}\tag{1.1}$$

$$K_x=Ap-Fq-Er,\qquad K_y=Bq-Dr-Fp,\qquad K_z=Cr-Ep-Dq\tag{1.2}$$

Здесь A, B, C, F, E, D — соответствующие осевые и центробежные моменты инерции системы; p, q, r — проекции угловой скорости трехгранника xyz на его же оси; F_g — сила тяготения к земному шару; m — масса тела; v — скорость точки опоры; R — радиус земной сферы; l_z — проекция вектора OC на ось z; Ω — угловая скорость трехгранника $x_1y_1z_1$ относительно оси z_1. Рассматриваемая система при постоянных v и Ω допускает интеграл энергии, аналогичный [3]. Последний имеет вид

$$\begin{gathered}V\equiv[{}^1\!/_2p-(\Omega\psi_1+\omega\vartheta_1)]\,K_x+[{}^1\!/_2q-(\Omega\psi_2+\omega\vartheta_2)]\,K_y+[{}^1\!/_2r-(\Omega\psi_3+\omega\vartheta_3)]\,K_z+\\ +(F_g-m\omega v)\,l_z\psi_3+mvl_z\Omega\vartheta_3=h\end{gathered}\tag{1.3}$$

2. Интеграл (1.3) можно использовать для получения достаточных условий устойчивости. Положениям равновесия системы отвечают следующие значения координат:

$$\alpha=\alpha_0,\quad \beta=\beta_0,\ \gamma=\gamma_0\tag{2.1}$$

причем $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered}[qK_z-rK_y-(F_g-m\omega v)\,l_z\psi_2-mvl_z\Omega\vartheta_2]_0=0\\ [rK_x-pK_z+(F_g-m\omega v)\,l_z\psi_1+mvl_z\Omega\vartheta_1]_0=0\\ (pK_y-qK_x)_0=0\end{gathered}\tag{2.2}$$

Символ 0 в (2.2) и в дальнейшем означает, что соответствующие функции берутся при значениях (2.1). Принимая движение, определяемое равенствами (2.1), в качестве невозмущенного, получим аналогично [3], что последнее будет устойчивым по Ляпунову, если будут положительны все главные диагональные миноры матриц

$$B=\|b_{ij}\|\quad(3\times3)\qquad C=\|c_{ij}\|\quad(3\times3)\tag{2.3}$$

$$b_{11}=[{}^1\!/_2(A\psi_1^2+B\psi_2^2+C\psi_3^2)-(F\psi_1\psi_2+E\psi_1\psi_3+D\psi_2\psi_3)]_0\tag{2.4}$$

$$b_{22}=[{}^1/_2\,(A\cos^2\gamma+C\sin^2\gamma)-E\cos\gamma\sin\gamma]_0,\qquad b_{33}={}^1/_2B$$

$$b_{12}=b_{21}={}^1/_2\,[(A\psi_1-F\psi_2-E\psi_3)\cos\gamma+(C\psi_3-E\psi_1-D\psi_2)\sin\gamma]_0$$

$$b_{13}=b_{31}={}^1/_2\,(B\psi_2-F\psi_1-D\psi_3)_0,\qquad b_{23}=b_{32}=-{}^1/_2\,(F\cos\gamma+D\sin\gamma)_0$$

$$\begin{aligned}c_{11}={}^1/_2\omega\,\{&A\,(p\vartheta_1-\omega\theta_1^2)+B\,(q\vartheta_2-\omega\theta_2^2)+C\,(r\vartheta_3-\omega\theta_3^2)+\\&+F\,[2\omega\theta_1\theta_2-(p\vartheta_2+q\vartheta_1)]+E\,[2\omega\theta_1\theta_3-(p\vartheta_3+r\vartheta_1)]+\\&+D[2\omega\theta_2\theta_3-(q\vartheta_3+r\vartheta_2)]-mR\Omega l_z\vartheta_3\}_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_{22}={}^1/_2\,\{&[(B-C)\,(q^2-r^2)-Fpq-Epr-4Dqr-\\&-(F_g-m\omega v)\,l_z\psi_3-mv\Omega l_z\vartheta_3]\cos^2\gamma+[(A-B)\,(p^2-q^2)-\\&-4Fpq-Epr-Dqr]\sin^2\gamma+[(2B-A-C)\,pr+3q\,(Fr+Dp)+\\&+E\,(p^2+r^2-2q^2)+(F_g-m\omega v)\,l_z\psi_1+mv\Omega l_z\vartheta_1]\cos\gamma\sin\gamma\}_0\end{aligned}$$

$$c_{33}={}^1/_2\,[(A-C)\,(p^2-r^2)-Fpq-4Epr-Dqr-(F_g-m\omega v)\,l_z\psi_3-mv\Omega l_z\vartheta_3]_0$$

$$\begin{aligned}c_{12}=c_{21}={}^1/_2\omega\,\{&[(C-B)\,(q\theta_3+r\theta_2)+F\,(p\theta_3+r\theta_1)-E\,(p\theta_2+q\theta_1)+\\&+2D\,(r\theta_3-q\theta_2)-mR\Omega l_z\theta_2]\cos\gamma+[(B-A)\,(p\theta_2+q\theta_1)+\\&+2F\,(q\theta_2-p\theta_1)+E\,(q\theta_3+r\theta_2)-D\,(p\theta_3+r\theta_1)]\sin\gamma\}_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_{13}=c_{31}={}^1/_2\,\omega\,[&(A-C)\,(p\theta_3+r\theta_1)-F\,(q\theta_3+r\theta_2)+2E\,(p\theta_1-r\theta_3)+\\&+D\,(p\theta_2+q\theta_1)+mR\Omega l_z\theta_1]_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_{23}=c_{32}={}^1/_2\,\{&[(C-A)\,pq+F\,(q^2-r^2)+r\,(2Eq+Dp)]\cos\gamma+[(A-C)\,qr+\\&+p\,(Fr+2Eq)+D\,(q^2-p^2)+(F_g-m\omega v)\,l_z\psi_2+mv\Omega l_z\vartheta_2]\sin\gamma\}_0\end{aligned}$$

Отметим, что уравнения (2.2) имеют решение $\alpha_0=0$, $\beta_0=0$, $\gamma_0=0$, если

$$(C-B)\,\omega\Omega+D\,(\Omega^2-\omega^2)-mvl_z\Omega=0,\qquad F\omega+E\Omega=0\tag{2.5}$$

В этом случае достаточные условия устойчивости принимают простой вид

$$C>0,\quad AC-E^2>0,\quad ABC-2FED-AD^2-BE^2-CF^2>0\tag{2.6}$$

$$(B-A)\,\omega-D\Omega>0$$

$$(B-A)\,\omega-D\Omega]\,[(C-B)\,(\Omega^2-\omega^2)-4D\omega\Omega-(F_g-m\omega v)\,l_z]-\omega\,(F\Omega-E\omega)^2>0$$

$$-(F_g-m\omega v-mR\Omega^2)\,l_z>0$$

3. Предположим, что оси xyz являются главными осями инерции тела в точке опоры, $l_z<0$ и соблюдаются условия [4] (невозмущаемый физический маятник)

$$C=0,\qquad A=B=-ml_zR\tag{3.1}$$

Тогда удовлетворяются соотношения (2.5) и условием устойчивости системы будет известное [5-7] неравенство

$$F_g-m\omega v-mR\Omega^2>0\tag{3.2}$$

4. Пользуясь произволом в выборе осей xyz, можно направить их по главным осям инерции тела в точке опоры, а положение вектора OC в этой системе определять тремя его проекциями: l_x, l_y, l_z. В некоторых случаях этот выбор осей будет предпочтительнее. Приводимые ниже результаты исследования при названном выборе системы осей xyz можно получить непосредственно, аналогично предыдущему, или используя предыдущие результаты, путем преобразования координат.

Интеграл энергии системы имеет вид

$$\begin{aligned}V\equiv{}&[{}^1/_2\,p-(\Omega\psi_1+\omega\vartheta_1)]\,Ap+[{}^1/_2\,q-(\Omega\psi_2+\omega\vartheta_2)]\,Bq+[{}^1/_2\,r-(\Omega\psi_3+\omega\vartheta_3)]\,Cr+\\&+(F_g-m\omega v)\,(l_x\psi_1+l_y\psi_2+l_z\psi_3)+mv\Omega\,(l_x\vartheta_1+l_y\vartheta_2+l_z\vartheta_3)=h\end{aligned}\tag{4.1}$$

Невозмущенное движение

$$\alpha=\alpha_0,\qquad \beta=\beta_0,\qquad \gamma=\gamma_0\tag{4.2}$$

где α_0, β_0, γ_0 удовлетворяют уравнениям

$$[(C-B)\,qr+(F_g-m\omega v)\,(l_y\psi_3-l_z\psi_2)+mv\Omega\,(l_y\vartheta_3-l_z\vartheta_2)]_0=0\tag{4.3}$$

$$[(A-C)\,rp+(F_g-m\omega v)\,(l_z\psi_1-l_x\psi_3)+mv\Omega\,(l_z\vartheta_1-l_x\vartheta_3)]_0=0$$

$$[(B-A)\,pq+(F_g-m\omega v)\,(l_x\psi_2-l_y\psi_1)+mv\Omega\,(l_x\vartheta_2-l_y\vartheta_1)]_0=0$$

будет устойчивым по Ляпунову, если будут положительны все главные диагональные миноры матрицы

$$C = \| c_{ij} \|_{(3\times 3)} \tag{4.4}$$

$$c_{11} = {}^1/_2\,\omega\,[A(p\vartheta_1 - \omega\theta_1^2) + B(q\vartheta_2 - \omega\theta_2^2) + C(r\vartheta_3 - \omega\theta_3^2) - \\ - mR\Omega\,(l_x\vartheta_1 + l_y\vartheta_2 + l_z\vartheta_3)]_0 \tag{4.5}$$

$$c_{22} = {}^1/_2\,\{[(B-C)(q^2-r^2) - (F_g - m\omega v)(l_y\psi_2 + l_z\psi_3) - mv\Omega\,(l_y\vartheta_2 + l_z\vartheta_3)]\cos^2\gamma + \\ + [(A-B)(p^2-q^2) - (F_g - m\omega v)(l_x\psi_1 + l_y\psi_2) - mv\Omega\,(l_x\vartheta_1 + l_y\vartheta_2)]\sin^2\gamma + \\ + [(2B - A - C)\,pr + (F_g - m\omega v)(l_x\psi_3 + l_z\psi_1) + mv\Omega\,(l_x\vartheta_3 + l_z\vartheta_1)]\cos\gamma\sin\gamma\}_0$$

$$c_{33} = {}^1/_2\,[(A-C)(p^2-r^2) - (F_g - m\omega v)(l_x\psi_1 + l_z\psi_3) - mv\Omega\,(l_x\vartheta_1 + l_z\vartheta_3)]_0$$

$$c_{12} = c_{21} = {}^1/_2\,\omega\,\{[(C-B)\;(q\theta_3 + r\theta_2) + mR\Omega\,(l_y\theta_3 - l_z\theta_2)]\cos\gamma + [(B-A)(p\theta_2 + q\theta_1) + \\ + mR\Omega\,(l_x\theta_2 - l_y\theta_1)]\sin\gamma\}_0$$

$$c_{13} = c_{31} = {}^1/_2\,\omega\,[(A-C)(p\theta_3 + r\theta_1) + mR\Omega\,(l_z\theta_1 - l_x\theta_3)]_0$$

$$c_{23} = c_{32} = {}^1/_2\,\{[(C-A)\,pq + (F_g - m\omega v)\,l_x\psi_2 + mv\Omega l_x\vartheta_2]\cos\gamma + \\ + [(A-C)\,qr + (F_g - m\omega v)\,l_z\psi_2 + mv\Omega l_z\vartheta_2]\sin\gamma\}_0$$

Рассмотрим частный случай задачи: центр тяжести тела расположен в плоскости yz $(l_x = 0)$. Положениям равновесия системы отвечают значения $\alpha = 0$, $\beta = \beta_0$, $\gamma = \theta$. Координата β_0 удовлетворяет уравнению

$$\{(C-B)\,[{}^1/_2(\Omega^2 - \omega^2)\sin 2\beta + \Omega\omega\cos 2\beta] + (F_g - m\omega v)(l_y\cos\beta - l_z\sin\beta) - \\ - mv\Omega\,(l_z\cos\beta + l_y\sin\beta)\}_0 = 0 \tag{4.6}$$

Достаточные условия устойчивости невозмущенного движения будут

$$c_{11} > 0, \qquad c_{22} > 0, \qquad c_{11}c_{33} - c_{13}^2 > \theta \tag{4.7}$$

$$c_{11} = {}^1/_2\,\omega\,[-A\omega + B\omega_1\cos\beta - C\omega_2\sin\beta + mR\Omega\,(l_z\sin\beta - l_y\cos\beta)]_0 \tag{4.8}$$

$$c_{22} = {}^1/_2\,[(B-C)(\omega_1^2 - \omega_2^2) - (F_g - m\omega v)(l_y\sin\beta + l_z\cos\beta) + mv\Omega\,(l_z\sin\beta - l_y\cos\beta)]_0$$

$$c_{33} = {}^1/_2\,[(C-A)\,\omega_2^2 - (F_g - m\omega v)\,l_z\cos\beta + mv\Omega l_z\sin\beta]_0$$

$$c_{13} = {}^1/_2\,\omega\,[(A-C)\,\omega_2 + mR\Omega l_z]_0, \qquad \omega_1 = \omega\cos\beta + \Omega\sin\beta, \qquad \omega_2 = -\omega\sin\beta + \Omega\cos\beta$$

Уравнение (4.6) имеет решение $\beta_0 = 0$, если l_y, l_z удовлетворяют соотношению

$$(C-B)\,\Omega\omega = -(F_g - m\omega v)\,l_y + mv\Omega l_z \tag{4.9}$$

В этом случае неравенства (4.7) принимают простой вид

$$(B-A)\,\omega - mR\Omega l_y > 0, \quad (B-C)(\omega^2 - \Omega^2) - (F_g - m\omega v)\,l_z - mv\Omega l_y > 0 \tag{4.10}$$

$$[(B-A)\,\omega - mR\Omega l_y]\,[(C-A)\,\Omega^2 - (F_g - m\omega v)\,l_z] - \\ - \omega\,[(A-B)\,\Omega + (R/v)(F_g - m\omega v)\,l_y]^2 > 0$$

При $l_y = 0$, $l_z < 0$ из (4.7) и (4.10) получаем условия устойчивости для сферического маятника, установленные ранее в работе [1].

Условие (4.9), в частности, удовлетворяется, если $l_y = 0$ и выполняются соотношения (3.1). В последнем случае достаточным условием устойчивости будет (3.2).

Поступила 9 III 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляшенко В. Ф. Об устойчивости моногироскопных систем. Изв. АН СССР ОТН, Механика и машиностроение, 1964, № 5.
2. Ишлинский А. Ю. К теории гирогоризонткомпаса. ПММ, 1956, т. 20, вып. 4.
3. Кошляков В. Н., Ляшенко В. Ф. Об одном интеграле в теории гирогоризонткомпаса. ПММ, 1963, т. 27, вып. 1.
4. Ишлинский А. Ю. Об относительном равновесии физического маятника с подвижной точкой опоры. ПММ, 1956, т. 20, вып. 3.
5. Жбанов Ю. К. Исследование свободных колебаний в системе автономного определения координат движущегося объекта. ПММ, 1960, т. 24, вып. 6.
6. Меркин Д. Р. Об устойчивости движения гирорамы. ПММ, 1961, т. 25, вып. 6.
7. Андреев В. Д. Об общих уравнениях инерциальной навигации. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.