К РЕШЕНИЮ ПРОБЛЕМЫ СТОКСА ДЛЯ УРОВЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ, ЗАДАННОЙ В ФОРМЕ СФЕРОИДА

В. Д. Андреев (Москва)

В работе из решения проблемы Стокса получены в виде специальных, быстро сходящихся рядов явные выражения для проекций напряженности регулиризированного поля тяготения Земли вне и на поверхности ее.

1. Введем правую ортогональную систему координат O_1xyz. Начало ею совместим с центром Земли, ось z направим вдоль вектора $\mathbf{u}$ угловой скорости вращения Земли, ось x расположим на пересечении плоскостей экватора и Гринвичского меридиана.

Обозначим через F_x, F_y, F_z проекции на оси xyz напряженности регуляризированного поля тяготения Земли в некоторой точке O с координатами x, y, z. Из решения проблемы Стокса для уровенной поверхности, заданной в форме сфероида (эллипсоида Клеро), получаются следующие выражения [1-3] для этих проекций во внешней по отношению к эллипсоиду точке O:

$$F_x = -Px + C\frac{\partial K}{\partial x}, \quad F_y = -Py + C\frac{\partial K}{\partial y}, \quad F_z = -Qz + C\frac{\partial K}{\partial z} \tag{1.1}$$

Здесь

$$P = 2\pi D\frac{a^2b}{(a^2-b^2)^{3/2}}\left(\operatorname{arc\,tg} l' - \frac{l'}{1+l'^2}\right)$$

$$Q = 4\pi D\frac{a^2b}{(a^2-b^2)^{3/2}}(l' - \operatorname{art\,tg} l'), \qquad K = 2\pi D\frac{a^2b}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arc\,tg} l' \tag{1.2}$$

где a и b — большая и малая полуоси эллипсоида Клеро, l' — второй эксцентриситет софокусного с ним эллипсоида, проходящего через точку O, D и C — постоянные.

Величина D находится из условия [1]

$$\frac{u^2}{2\pi D} = \frac{3+l^2}{l^3}\operatorname{arc\,tg} l - \frac{3}{l^2} \tag{1.3}$$

где l — второй эксцентриситет эллипсоида Клеро. Постоянную C можно получить сравнением ускорения силы тяжести, получающегося из формул (1.1) — (1.3), с замеренным значением его g_e на уровне океана на экваторе. Для отыскания C получится соотношение

$$g_e = 2\pi DCa + P_0a - u^2a \tag{1.4}$$

где P_0 — значение P на поверхности эллипсоида Клеро.

2. Определим положение точки O в системе координат O_1xyz геоцентрическими координатами: расстоянием r от центра Земли, широтой φ и долготой λ. Введем сопровождающий трехгранник $Ox_1y_1z_1$ геоцентрической координатной сетки, ось z которого направим вдоль $\mathbf{r} = O_1O$, ось y_1 расположим в плоскости меридиана, направив ее к северу. Тогда из (1.1), (1.2) и определения софокусного эллипсоида

$$F_{x_1} = 0, \quad F_{y_1} = 2\pi D\sin\varphi\cos\varphi\,(R - CS), \quad F_{z_1} = -2\pi D\,(T + R\cos^2\varphi + CU) \tag{2.1}$$

Здесь

$$R = \frac{a^2br}{(a^2-b^2)^{3/2}}\left(3\operatorname{arc\,tg} l' - \frac{l'}{1+l'^2} - 2l'\right), \qquad T = \frac{2a^2br}{(a^2-b^2)^{3/2}}(l' - \operatorname{arc\,tg} l')$$

$$S = \frac{a^4be^2}{r}\frac{(b^2+\nu)^{1/2}}{(b^2+\nu)^2\cos^2\varphi + (a^2+\nu)^2\sin^2\varphi} \tag{2.2}$$

$$U = \frac{a^2b}{r}\frac{[(b^2+\nu)\cos^2\varphi + (a^2+\nu)\sin^2\varphi]\,(b^2+\nu)^{1/2}}{(b^2+\nu)^2\cos^2\varphi + (a^2+\nu)^2\sin^2\varphi}$$

В этих соотношениях e—первый эксцентриситет уровенного эллипсоида, ν—параметр софокусного эллипсоида ($l' = [(a^2-b^2)/(b^2+\nu)]^{1/2}$).

Правые части формул (2.1) можно разложить в ряды по степеням e.

Из уравнения софокусного эллипсоида и определения его второго эксцентриситета находим

$$l'=\frac{\sqrt{2(a^2-b^2)}}{\sqrt{r^2-a^2+b^2+\sqrt{r^4+(a^2-b^2)^2-2r^2(a^2-b^2)\cos 2\varphi}}} \tag{2.3}$$

Отсюда (2.4)

$$l'=\frac{ae}{r}\mu,\qquad \mu=1+\frac{1}{2}\left(\frac{ea}{r}\right)^2\cos^2\varphi+\frac{1}{16}\left(\frac{ea}{r}\right)^4\left(\frac{3}{8}\cos^2\varphi-\frac{7}{32}\sin^2 2\varphi\right)+\ldots$$

Теперь (2.5)

$$R=be^2\left(\frac{a}{r}\right)^4\mu^5\left(-\frac{2}{5}+\frac{4}{7}l'^2+\ldots\right),\qquad T=b\left(\frac{a}{r}\right)^2\mu^3\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{5}l'^2\frac{1}{7}l'^4+\ldots\right)$$

или, внося сюда l' и μ из (2.4),

$$R=be^2\left(\frac{a}{r}\right)^4\left[-\frac{2}{5}+\left(\frac{ae}{r}\right)^2\left(\frac{4}{7}-\cos^2\varphi\right)+\ldots\right] \tag{2.6}$$

$$T=b\left(\frac{a}{r}\right)^2\left[\frac{2}{3}+\left(\frac{ae}{r}\right)^2\left(\cos^2\varphi-\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{ae}{r}\right)^4\left(\frac{2}{7}+\frac{1}{4}\cos^2\varphi-\frac{9}{32}\sin^2 2\varphi\right)+\ldots\right]$$

Аналогично

$$\nu=r^2\left[1-\left(\frac{a}{r}\right)^2-\left(\frac{ae}{r}\right)^2\sin^2\varphi+\frac{1}{4}\left(\frac{ae}{r}\right)^4\sin^2 2\varphi+\ldots\right] \tag{2.7}$$

и поэтому

$$S=Cbe^2\left(\frac{a}{r}\right)^4\left[1+\left(\frac{ea}{r}\right)^2\left(\frac{7}{2}\cos^2\varphi-2\right)+\ldots\right] \tag{2.8}$$

$$U=Cb\left(\frac{a}{r}\right)^2\left[1+\left(\frac{ae}{r}\right)^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\varphi-1\right)+\left(\frac{ae}{r}\right)^4\left(1-\frac{5}{8}\cos^2\varphi-\frac{35}{32}\sin^2 2\varphi\right)+\ldots\right]$$

Подстановка (2.6), (2.8) в (2.1) приводит к формулам

$$F_{y_1}=\pi Dbe^2\left(\frac{a}{r}\right)^4\sin 2\varphi\left\{-\frac{2}{5}-C+\right. \tag{2.9}$$

$$\left.+\left[-3\left(\frac{1}{7}+\frac{C}{2}\right)+\sin^2\varphi\left(1+\frac{7}{2}C\right)\right]\left(\frac{ae}{r}\right)^2+\ldots\right\}$$

$$F_{z_1}=-2\pi Db\left(\frac{a}{r}\right)^2\left\{\frac{2}{3}+C+\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{2}C-\sin^2\varphi\left(\frac{3}{5}+\frac{3}{2}C\right)\right]\left(\frac{ae}{r}\right)^2+\right.$$

$$+\left[\frac{3}{28}+\frac{3}{8}C+\sin^2\varphi\left(\frac{5}{28}+\frac{5}{8}C\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\sin^2 2\varphi\left(-\frac{5}{16}-\frac{35}{32}C\right)\right]\left(\frac{ae}{r}\right)^4+\ldots\right\}$$

которые и представляют собой искомые разложения. Из (2.3) можно заключить, что ряды (2.4) сходятся абсолютно и равномерно. Отсюда следует сходимость рядов (2.6), (2.8), а значит и (2.9). Быстрая сходимость рядов (2.9) обеспечивается малостью $ae\,/\,r$.

Вычислим постоянные D и C. Из (1.3)

$$D=\frac{u^2}{2\pi e^2}\frac{15}{4}\left(1-\frac{1}{7}e^2+\frac{1}{49}e^4+\ldots\right) \tag{2.10}$$

Постоянная C входит в (2.9) в виде произведения πDC. Из (1.1), (1.2), (1.4)

$$\pi DC=\frac{g_e}{2a}+\frac{u^2}{2e^2}\left(-\frac{5}{2}+\frac{13}{7}e^2+\frac{8}{49}e^4+\ldots\right) \tag{2.11}$$

Подставив (2.10), (2.11) в (2.9), после перемножения рядов и очевидных группировок придем к выражениям

$$F_{y_1}=\frac{g_e}{2}(q-e^2)\left(\frac{a}{r}\right)^4\sin 2\varphi\left[1+\frac{e^2(7e^2-30q)}{14(q-e^2)}\right]\left\{1+\left[\frac{30q-21e^2}{14(q-e^2)}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{7e^2-10q}{2(q-e^2)}\sin^2\varphi\right]\left(\frac{ae}{r}\right)^2+\ldots\right\} \qquad (2.12)$$

$$F_{z_1}=-g_e\left(\frac{a}{r}\right)^2\left\{1-\frac{e^2}{2}-\frac{e^4}{8}+q\left(\frac{3}{2}-\frac{15}{28}e^2\right)+\right.$$
$$+\left[\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}e^4+q\left(-\frac{1}{2}+\frac{15}{14}e^2\right)-\sin^2\varphi\left(\frac{3}{2}e^2-\frac{3}{4}e^4+\right.\right.$$
$$\left.\left.+q\left(-\frac{3}{2}+\frac{45}{14}e^2\right)\right)\right]\left(\frac{a}{r}\right)^2+\left[\frac{3}{8}e^2-\frac{15}{28}q+\sin^2\varphi\left(\frac{5}{8}e^2-\frac{25}{28}q\right)-\right.$$
$$\left.\left.-\sin^2 2\varphi\left(\frac{35}{32}e^2-\frac{25}{16}q\right)\right]e^2\left(\frac{a}{r}\right)^4+\ldots\right\}$$

в которых через q обозначено отношение центробежного ускорения к ускорению силы тяжести на экваторе $q = u^2a / g_e$. Величина q имеет тот же порядок малости, что и e^2.

Приведем значения коэффициентов, входящих в формулы (2.12). Возьмем [1]

$$g_e = 978.049 \ \textit{см/сек}^2, \quad u = 7.29212 \ \textit{сек}^{-1}, \quad a = 6378250 \ \textit{м}$$
$$e^2 = 0.00669342, \quad q = 0.00346775$$

Тогда

$$g_e / 2\,(q-e^2) = -1.577, \quad 1 + e^2(7e^2 - 30q) / 14(q-e^2) = 1.008$$
$$e^2(30q - 21e^2) / 14(q-e^2) = 0.005$$
$$e^2(7e^2 - 10q) / 2(q-e^2) = -0.013, \quad 1 - {}^1/_2 e^2 - {}^1/_8 e^4 + q({}^3/_2 - {}^{15}/_{28} e^2) = 1.001837$$
$${}^1/_2 e^2 - {}^1/_4 e^4 + q(-{}^1/_2 + {}^{15}/_{14} e^2) = 0.001627, \qquad ({}^3/_8 e^2 - {}^{15}/_{28} q)\, e^2 = 0.000005$$
$${}^3/_2 e^2 - {}^3/_4 e^4 + q(-{}^3/_2 + {}^{45}/_{14} e^2) = 0.004879, \qquad ({}^5/_8 e^2 - {}^{25}/_{28} q)\, e^2 = 0.000007$$
$$({}^{35}/_{32} e^2 - {}^{25}/_{16} q)\, e^2 = 0.000013$$

С точностью порядка 0.02 *см/сек*^{2} формулы (2.12) можно заменить более простыми

$$F_{y_1}=\frac{g_e}{2}(q-e^2)\left(\frac{a}{r}\right)^4\sin 2\varphi \qquad (2.13)$$
$$F_{z_1}=-g_e\left(\frac{a}{r}\right)^2\left[1-\frac{e^2}{2}+\frac{3}{2}q+\frac{q-e^2}{2}(-1+3\sin^2\varphi)\left(\frac{a}{r}\right)^2\right]$$
$${}^1/_2 g_e(q-e^2) = -1.58, \quad {}^1/_2(q-e^2) = 0.0016, \quad 1 - {}^1/_2 e^2 + {}^3/_2 q = 1.0019$$

3. Введем географические координаты точки O: широту φ', долготу λ, расстояние h от точки O до эллипсоида Клеро по нормали к нему. Легко получить соотношения

$$r^2 = a^2 + h^2 + 2ah\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi'} - \frac{a^2e^2(1-e^2)\sin^2\varphi'}{1-e^2\sin^2\varphi'} \qquad (3.1)$$
$$\operatorname{tg}\varphi = \left[1 - \frac{ae^2}{a+h(1-e^2\sin^2\varphi')^{1/2}}\right]\operatorname{tg}\varphi'$$

связывающие координаты r, φ с h, φ'. Соотношения (3.1) позволяют выразить проекции F_{y_1}, E_{z_1} через h и φ'. Получим эти выражения, ограничившись случаем, когда отношение h / a имеет тот же порядок малости, что и e^2.

[1] Величины a, e^2, q взяты для параметров эллипсоида Ф. Н. Красовского [4].

Из (3.1)

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 = 1 - \frac{2h}{a} + \frac{3h^2}{a^2} - \frac{3h}{a} e^2 \sin^2 \varphi' + e^2 \sin^2 \varphi' + e^4 \left(\sin^2 \varphi' - \frac{1}{2} \sin^2 2\varphi'\right) \quad (3.2)$$

$$\sin \varphi = \sin \varphi' (1 - e^2 \cos^2 \varphi')$$

Подставим (3.2) в (2.12). Перемножим ряды, замечая, что q имеет порядок e^2, и сохраняя лишь слагаемые, имеющие порядок e^4. Тогда получим

$$F_{y_1} = \frac{g_e}{2} (q - e^2) \sin 2\varphi' \left[1 - 4\frac{h}{a} - \frac{qe^2}{q - e^2} - \frac{e^2 (e^2 + 2q)}{2(q - e^2)} \sin^2 \varphi'\right] \quad (3.3)$$

$$F_{z_1} = -g_e \left[1 - \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi' + q\left(1 + \frac{3}{2} \sin^2 \varphi'\right) + e^4 \left(-\frac{1}{8} \sin^2 \varphi' - \frac{3}{32} \sin^2 2\varphi'\right) + \right.$$
$$+ e^2 q\left(-\frac{17}{28} \sin^2 \varphi' + \frac{1}{16} \sin^2 2\varphi'\right) + \frac{h}{a} e^2 (3 \sin^2 \varphi' - 1) -$$
$$\left. - \frac{hq}{a} (1 + 6 \sin^2 \varphi') - \frac{2h}{a} + \frac{3h^2}{a^2}\right]$$

Введем сопровождающий трехгранник $Ox_2y_2z_2$ географической координатной сетки. Его ось z_2 направим по положительной нормали к эллипсоиду Клеро, ось y_2 расположим в плоскости географического меридиана, направив ее к Северу. Взаимное расположение трехгранников $Ox_1y_1z_1$ и $Ox_2y_2z_2$ будет характеризоваться углом $(\varphi' - \varphi)$ так, что

$$F_{y_2} = F_{y_1} \cos(\varphi' - \varphi) - F_{z_1} \sin(\varphi' - \varphi), \qquad F_{z_2} = F_{y_1} \sin(\varphi' - \varphi) + F_{z_1} \cos(\varphi' - \varphi) \quad (3.4)$$

Из второй формулы (3.1) с точностью до e^4

$$\sin(\varphi' - \varphi) = e^2 \sin \varphi' \cos \varphi' (1 + e^2 \sin^2 \varphi' - h / a) \quad (3.5)$$

$$\cos(\varphi' - \varphi) = 1 - {}^1/_2\, e^4 \sin^2 \varphi' \cos^2 \varphi'$$

Подставив (3.3), (3.5) в (3.4), получим для F_{y_2}, F_{z_2} следующие выражения:

$$F_{y_2} = g_e \sin 2\varphi' \left[\frac{q}{2}\left(1 + \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi'\right) + \frac{h}{a}\left(\frac{e^2}{2} - 2q\right)\right]$$

$$F_{z_2} = -g_e \left[1 - \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi' + q\left(1 + \frac{3}{2} \sin^2 \varphi'\right) + e^4 \left(-\frac{1}{8} \sin^2 \varphi' + \frac{1}{32} \sin^2 2\varphi'\right) + \right.$$
$$+ e^2 q\left(-\frac{17}{28} \sin^2 \varphi' - \frac{3}{16} \sin^2 2\varphi'\right) + \frac{h}{a} e^2 (3 \sin^2 \varphi' - 1) -$$
$$\left. - \frac{h}{a} q (1 + 6 \sin^2 \varphi') - \frac{2h}{a} + \frac{3h^2}{a^2}\right]$$

Если положить здесь $h = 0$, то получатся формулы для проекций $F_{y_2}{}^\circ$, $F_{z_2}{}^\circ$ напряженности регуляризированного поля тяготения Земли на ее поверхности (на поверхности уровенного эллипсоида Клеро). Если прибавить теперь к $F_{y_2}{}^\circ$, $F_{z_2}{}^\circ$ проекции на оси $x_2y_2z_2$ центробежного ускорения из-за вращения Земли, то можно убедиться, что первая сумма обращается в нуль, а вторая приводит к известной формуле нормальной силы тяжести в форме Гельмерта — Кассиниса [1, 5].

Поступила 16 XII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлов А. А. Курс гравиметрии и теории фигуры Земли. М., Редбюро ГУГК при СНК СССР, 1939.
2. Идельсон Н. И. Теория потенциала и его приложения к вопросам геофизики. Л.— М., Гостехиздат, 1932.
3. Дубошин Г. Н. Теория притяжения. М., Физматгиз, 1961.
4. Граур А. В. Математическая картография, изд. 2-е. Л., Изд. ЛГУ, 1956.
5. Грушинский Н. П. Теория фигуры Земли. М., Физматгиз, 1963.