# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ЕЕ ПАРАМЕТРОВ

М. Б. Невельсон, Р. З. Хасьминский

(Москва)

Рассматривается задача об устойчивости системы, описываемой уравнением $n$-го порядка со случайными коэффициентами. Получены необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости в среднем квадратичном, переходящие в отсутствие шума в условия Рауса — Гурвица. Приведены такие достаточные условия устойчивости моментов более высокого порядка.

1. Предположим, что некоторая детерминированная система описывается линейным дифференциальным уравнением порядка $n$ с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0 \qquad (1.1)$$

При воздействии на такую систему случайных сил типа «белого шума» уравнение (1.1) перейдет в следующее стохастическое дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + [a_1 + \eta_1^{\cdot}(t)]\, y^{(n-1)} + \ldots + [a_n + \eta_n^{\cdot}(t)]\, y = 0 \qquad (1.2)$$

Предполагается, что гауссовские «белые шумы» $\xi_1(t), \ldots, \xi_n^{\cdot}(t)$ имеют нулевое математическое ожидание, но могут, вообще говоря, быть коррелированными, так что

$$M\eta_i^{\cdot}(t)\,\eta_j^{\cdot}(s) = 2a_{ij}\delta(t-s)$$

Как известно, от шумов $\eta_1^{\cdot}(t), \ldots, \eta_n^{\cdot}(t)$ можно перейти к независимым «белым шумам» $\xi_1^{\cdot}(t), \ldots, \xi_n^{\cdot}(t)$, с нулевым математическим ожиданием и корреляционной матрицей $2\,\delta_{ij}(t-s)$ при помощи формул

$$\eta_i^{\cdot}(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_j^{\cdot}(t) \qquad (1.3)$$

где матрица $\|\alpha_{ij}\|$ такова, что

$$\|\alpha_{ij}\|\,\|\alpha_{ji}\| = \|a_{ij}\|$$

Уравнение (1.2) в дальнейшем понимается как система стохастических дифференциальных уравнений Ито (см., например, [1], стр. 247), которую, учитывая (1.3) и вводя обозначения

$$y = X_1,\ y' = X_2, \ldots, y^{n-1} = X_n$$

можно записать в виде

$$dX_1 = X_2\,dt, \quad dX_2 = X_3\,dt, \ldots, dX_{n-1} = X_n\,dt$$

$$dX_n = -\sum_{i=1}^{n} a_i X_{n-i+1}\,dt - \sum_{i,\,j=1}^{n} \alpha_{ij} X_{n-i+1}\,d\xi_j(t) \qquad (1.4)$$

Как известно существует единственный строго марковский процесс с непрерывными траекториями $X^x(t) = (X_1^x(t), \ldots, X_n^x(t))$, удовлетворяющий системе (1.4) при начальном условии $X^x(0) = x$.

С процессом $X^x(t)$ тесно связан дифференциальный оператор второго порядка:

$$L = \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1}\frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{n} a_i x_{n-i+1}\frac{\partial}{\partial x_n} + \Big(\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}x_{n-i+1}\,x_{n-j+1}\Big)\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \qquad (1.5)$$

который при исследовании устойчивости марковских процессов играет такую же роль, как оператор Ляпунова в устойчивости детерминированных систем (см. [2,3]).

Следуя [2,4,5], будем говорить, что система (1.4) асимптотически $p$-устойчива ($p > 0$), если $\lim M\,|X^x(t)|^p = 0$ при $t \to \infty$ и, кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $M \mid X^x(t) \mid < \varepsilon$, если $|x| < \delta$ (здесь через $|x|$ обозначена евклидова норма вектора $x$). Назовем систему (1.4) асимптотически устойчивой в среднем квадратичном, если она устойчива при $p = 2$.

Метод получения необходимых и достаточных условий устойчивости в среднем квадратичном произвольной линейной системы с «белыми шумами» указан в интересной работе [4], где рассматривается отличное от принятого в настоящей заметке понимание линейной стохастической системы. Однако получающиеся таким методом условия довольно громоздки: для их проверки надо вычислять $n^2$ определителей, старший из которых имеет порядок $n^2$.

В работе [5] доказано, что для асимптотической устойчивости в среднем квадратичном стационарной линейной стохастической системы необходимо и достаточно, чтобы для любой определенно-положительной квадратичной формы $W(x)$ нашлась другая определенно-положительная квадратичная форма $V(x)$, для которой $LV(x) = -W(x)$. Эта теорема позволяет получить (что было отмечено также в [2]) алгебраические критерии для асимптотической устойчивости в среднем квадратичном такой системы. Однако, эти критерии приводят к еще более громоздким вычислениям даже в детерминированном случае.

В настоящей работе получены необходимые и достаточные условия устойчивости в среднем квадратичном системы (1.2) или (1.4), требующие вычисления всего $n + 1$ определителей, старший из которых имеет порядок $n$ (см. (2.6) — (2.8)). При этом оказывается, что первые $n$ определителей те же, что и определители $\Delta_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), входящие в критерий Рауса — Гурвица для уравнения (1.1). Последний же определитель получается заменой в $\Delta_n$ первой строки строкой, составленной по определенному правилу из коэффициентов $a_{ij}$ корреляционной матрицы. Если все $a_{ij} = 0$, то критерий (2.6) — (2.8) переходит в критерий Рауса — Гурвица.

Любопытно отметить также, что в частном случае, когда все $a_{ij}$ равны нулю, кроме какого-нибудь одного, из полученного критерия следует, что приведенное для этого случая в [6] необходимое и достаточное условие можно значительно упростить. Для $n = 2$, $a_{11} = a_{12} = a_{21} = 0$ этот результат совпадает с результатом [7].

2. Как показано в [5], для асимптотической устойчивости в среднем квадратичном системы (1.4) необходимо, чтобы система «без случайностей»

$$dX_1 = X_2\,dt, \quad dX_2 = X_3\,dt, \ldots, \; dX_{n-1} = X_n dt, \quad dX_n = -\sum_{i=1}^{n} a_i X_{n-i+1} \tag{2.1}$$

была асимптотически устойчива, т. е. чтобы выполнялись условия Рауса — Гурвица

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \ldots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 & \ldots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix} > 0$$

Известно, что при выполнении этих условий существует определенно-положительная квадратичная форма $V(x)$, для которой полная производная в силу (2.1)

$$L_0 V = \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1} \frac{\partial V}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{n} a_i x_{n-i+1} \frac{\partial V}{\partial x_n} \tag{2.2}$$

представляет собой наперед заданную отрицательно-определенную форму.

Предположим сначала, что квадратичная форма

$$a(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_{n-i+1} x_{n-j+1} \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

определенно-положительна. Тогда справедлива следующая

*Лемма* 2.1. Для асимптотической устойчивости в среднем квадратичном системы (1.4) необходимо и достаточно, чтобы существовала определенно-положительная квадратичная форма

$$V(x) = \sum_{i,\, j=1}^{n} d_{ij} x_i x_j$$

удовлетворяющая условиям

$$L_0 V(x) = -a(x), \qquad d_{nn} < {}^1/_2 \tag{2.3}$$

*Доказательство.* В самом деле, пусть существует квадратичная форма $V(x)$ с коэффициентами $d_{ij}$, удовлетворяющая условиям леммы. В силу (1.5), (2.2) и (2.3),

$$LV = L_0 V + a(x) \frac{\partial^2 V}{\partial x_n^2} = (2d_{nn} - 1)\, a(x) < 0$$

По уже цитированной теореме работы [5] отсюда следует, что система (1.4) асимптотически устойчива в среднем квадратичном.

С другой стороны, в случае асимптотической устойчивости системы (1.4) по той же теореме существует определенно-положительная квадратичная форма

$$V_1(x) = \sum_{i,\, j=1}^{n} e_{ij} x_i x_j$$

для которой $LV_1(x) = -a(x)$, т. е.

$$L_0 V_1 = LV - a(x) \frac{\partial^2 V}{\partial x_n^2} = -(2e_{nn} + 1)\, a(x)$$

Таким образом, $V = V_1(x) / (2e_{nn} + 1)$ и, следовательно, $d_{nn} = e_{nn} / (2e_{nn} + 1) < {}^1/_2$. Лемма доказана.

Для получения желаемых условий достаточно выразить коэффициент $d_{nn}$ в форме $V(x)$, определяемой из уравнения (2.3), через параметры $a_i$, $a_{ij}$ системы (1.4).

С этой целью обозначим через $\overset{\circ}{X}_{1j}(t), \ldots, \overset{\circ}{X}_{nj}(t)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ фундаментальную систему решений детерминированных уравнений (2.1), определяемую начальными условиями $\overset{\circ}{X}_{sj}(0) = \delta_{sj}$. Тогда любое решение $\overset{\circ}{X}{}_1^{x}(t), \ldots, \overset{\circ}{X}{}_n^{x}(t)$ этих уравнений с начальными условиями $\overset{\circ}{X}{}_i^{x}(0) = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ запишется в виде

$$\overset{\circ}{X}{}_i^{x}(t) = \sum_{j=1}^{n} x_j \overset{\circ}{X}_{ij}(t)$$

Как известно [8], функцию $V(x)$, удовлетворяющую соотношению (2.3), можно представить в виде

$$V(x) = \int_0^\infty \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} \overset{\circ}{X}{}_{n-i+1}^{x}(u)\, \overset{\circ}{X}{}_{n-j+1}^{x}(u)\, du$$

Последнее равенство позволяет выразить коэффициенты $d_{ij}$ формы $V(x)$ и, в частности, коэффициент $d_{nn}$ через фундаментальную систему решений $\overset{\circ}{X}_{ij}(t)$, а затем, как показано в [9], и через коэффициенты $a_i$, $a_{ij}$. Действительно, из [9] следует, что

$$d_{nn} = \frac{1}{2\Delta_n} \sum_{r=0}^{n-1} q_{nn}^{(r)} \Delta_{1,\, r+1} \tag{2.4}$$

где $\Delta_{1,r+1}$ — алгебраическое дополнение элемента первой строки и $r+1$ столбца последнего определителя Гурвица $\Delta_n$, а числа $q_{nn}^{(r)}$ связаны с коэффициентами $a_{ij}$ формы $a(x)$ формулой

$$(-1)^{n-1} \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{n-i+1,\, n-j+1} D_{ni}(\lambda) D_{nj}(-\lambda) = \sum_{r=0}^{n-1} q_{nn}^{(r)} \lambda^{(n-r-1)} \tag{2.5}$$

Здесь $D_{nj}(\lambda)$ алгебраическое дополнение элемента $n$-й строки и $j$-го столбца определителя $D(\lambda)$ системы (1.4)

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & a_1 - \lambda \end{vmatrix}$$

Легко видеть, что $D_{ni}(\lambda) D_{nj}(-\lambda) = (-1)^{i+j-1}\lambda^{j-2}$. Поэтому из (2.5) получаем

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left( \sum_{p+q=2(n-k)} (-1)^{q+1} a_{pq} \right) \lambda^{2k} = \sum_{k=0}^{n-1} q_{nn}^{(n-k-1)} \lambda^{2k}, \qquad q_{nn}^{(n-k-1)} = \sum_{p+q=2(n-k)} (-1)^{q+1} a_{pq} \tag{2.6}$$

Из леммы 2.1, (2.4) и (2.6) следует, что в случае, когда $a(x)$ представляет собой положительно-определенную квадратичную форму, для устойчивости в среднем квадратичном системы (1.4) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия

$$\Delta_1 > 0, \dots, \Delta_n > 0, \ \Delta_n > \Delta \tag{2.7}$$

Здесь

$$\Delta = \begin{vmatrix} q_{nn}^{(0)} & q_{nn}^{(1)} & q_{nn}^{(2)} & \dots & q_{nn}^{(n-1)} \\ 1 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} \tag{2.8}$$

отличается от последнего определителя Гурвица $\Delta_n$ лишь первой строкой. При этом числа $q_{nn}^{(r)}$ $(r = 0, 1, \dots, n-1)$ выражаются через коэффициенты $a_{ij}$ матрицы корреляции по формулам (2.6).

Покажем теперь, что условия (2.6) — (2.8) остаются в силе и без предположения о положительной определенности квадратичной формы $a(x)$. Для этого наряду с системой (1.4) рассмотрим другую систему

$$dX_1 = X_2\,dt, \qquad dX_2 = X_3\,dt, \dots, dX_{n-1} = X_n\,dt \tag{2.9}$$

$$dX_n = -\sum_{i=1}^{n} a_i X_{n-i+1}\,dt - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} X_{n-i+1}\,d\xi_j + \varepsilon X_1\,d\eta_1 + \varepsilon^2 \sum_{i=2}^{n} X_i\,d\eta_i$$

Здесь $\eta_1(t), \dots, \eta_n(t)$ независимые между собой и от $\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)$ винеровские процессы, $\varepsilon$—малый параметр.

Легко видеть, что оператор, соответствующий системе (2.9), имеет вид

$$L_\varepsilon = L + \left( \varepsilon^2 x_1^2 + \sum_{i=2}^{n} \varepsilon^4 x_i^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

Поскольку квадратичная форма

$$a_\varepsilon(x) = a(x) + \varepsilon^2 x_1^2 + \varepsilon^4 \sum_{i=2}^{n} x_i^2$$

определенно-положительна при любом $\varepsilon > 0$, то для асимптотической устойчивости в среднем квадратичном системы (2.9) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия

$$\Delta_1 > 0, \dots, \Delta_n > 0, \qquad \Delta_n > \Delta_\varepsilon$$

Здесь

$$\Delta_\varepsilon = \begin{vmatrix} q_{nn}^{(0)} + \varepsilon^4 q_{nn}^{(1)} - \varepsilon^4 q_{nn}^{(2)} + \varepsilon^4 \ldots & (-1)^{n-1}(a_{nn}+\varepsilon^2) \\ 1 \quad a_2 \quad a_4 \quad \ldots & 0 \\ 0 \quad a_1 \quad a_3 \quad \ldots & 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots & a_n \end{vmatrix} =$$

$$= \Delta + (-1)^{n-1}\varepsilon^2\Delta_{1n} + \varepsilon^4 \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1}\Delta_{1i} \tag{2.10}$$

Так как $(-1)^{n-1}\Delta_{1n} > 0$, то из (2.10) следует, что при всех достаточно малых $\varepsilon$

$$\Delta_\varepsilon > \Delta \tag{2.11}$$

Предположим теперь, что система (1.4) асимптотически устойчива в среднем квадратичном. Тогда по теореме 5.2 работы [5] система (2.9) будет также устойчива при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ и значит

$$\Delta_1 > 0, \ldots, \Delta_n > 0, \qquad \Delta_n > \Delta_\varepsilon \tag{2.12}$$

Из (2.11) и (2.12) имеем

$$\Delta_1 > 0, \ldots, \Delta_n > 0, \qquad \Delta_n > \Delta \tag{2.13}$$

Обратно, пусть неравенства (2.13) выполнены. Тогда из (2.10), следует, что найдется такое достаточно малое $\varepsilon$, для которого выполнены неравенства (2.12), т. е. система (2.9) асимптотически устойчива в среднем квадратичном при этом $\varepsilon$. Следовательно (см. [5] теорема 5.1), система (1.4) также асимптотически устойчива в среднем квадратичном. Итак, справедлива следующая теорема.

*Теорема* 2.1. Для асимптотической устойчивости в среднем квадратичном системы (1.4) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия

$$\Delta_1 > 0, \ldots, \Delta_n > 0, \qquad \Delta_n > \Delta \tag{2.14}$$

Здесь определитель $\Delta$ имеет вид (2.8), а числа $q_{nn}^{(r)}$ $(r = 0, 1, \ldots, n-1)$, стоящие в первой строке этого определителя, выражают через коэффициенты $a_{ij}$ по формулам (2.6).

Отметим, что в условия (2.14) входят лишь те коэффициенты $a_{ij}$ корреляционной матрицы, для которых сумма $i+j$ четна. В частности, для систем второго и третьего порядков необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости в среднем квадратичном имеют вид при $n = 3$.

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_1a_2 > a_{11}a_2 + a_{22} \quad \text{при } n = 2$$

$$a_1 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1a_2 > a_3, \quad (a_1a_2 - a_3)a_3 > a_{11}a_2a_3 + a_{33}a_1 + a_3(a_{22} - 2a_{13})$$

В случае, когда к коэффициентам $a_i$ уравнения (1.1) добавляются независимые белые шумы $\eta_1^{\cdot}, \ldots, \eta_n^{\cdot}$, т. е. $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$, определитель $\Delta$ принимает наиболее простой вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{22} & a_{33} \ldots & (-1)^{n-1}a_{nn} \\ 1 & a_2 & a_4 \ldots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & a_n \end{vmatrix}$$

3. Условия (2.6) — (2.8), полученные в п. 2, являются достаточными для асимптотической $p$-устойчивости системы (1.4) при $p \leqslant 2$. В этом пункте мы приведем достаточные условия асимптотической $p$-устойчивости при $p > 2$. Предположим сначала, что квадратичная форма $a(x)$ определенно-положительна.

Для асимптотической $p$-устойчивости при $p = 2$, а значит и при $p > 2$ необходимо, чтобы существовала определенно-положительная квадратичная форма

$$V(x) = \sum_{i, j=1}^{n} d_{ij} x_i x_j \qquad (d_{ij} = d_{ji})$$

удовлетворяющая соотношению (2.3). Положим

$$V^\circ(x) = [V(x)]^{1/2p}$$

Нетрудно видеть, что

$$LV^\circ = pV^{1/2p-2}\left\{\frac{VL_0V}{2} + a(x)\left[Vd_{nn} + (p-2)\Big(\sum_{j=1}^{n} d_{nj}x_j\Big)^2\right]\right\} =$$

$$= pV^{1/2p-2}\, a(x)\left[V(d_{nn} - 1/2) + (p-2)\Big(\sum_{j=1}^{n} d_{nj}x_j\Big)^2\right] \tag{3.1}$$

Из известного неравенства для определенно-положительной самосопряженной матрицы [10]

$$(D_{x,y}) \leqslant (D_{x,x})\,(D_{y,y})$$

при $y = (0, \ldots, 0, 1)$ вытекает, что

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} d_{nj}x_j\Big)^2 \leqslant d_{nn} V(x)$$

Воспользовавшись этим соотношением, получим из (3.1)

$$LV^\circ \leqslant pV^{1/2p-1}\, a(x)\,[d_{nn}(p-1) - 1/2] \tag{3.2}$$

Если $d_{nn}(p-1) < 1/2$, то из теоремы 2.2 работы [5] и (3.2) следует, что система (1.4) асимптотически $p$-устойчива.

Таким образом, для асимптотической устойчивости системы (1.4) при $p > 2$ достаточно, чтобы выполнялись следующие неравенства, из которых первые $n$ необходимы

$$\Delta_1 > 0, \ldots, \Delta_n > 0, \qquad \Delta_n > (p-1)\,\Delta \tag{3.3}$$

Можно привести примеры, показывающие, что условие $\Delta_n > (p-1)\ \Delta$ не является необходимым.

Нетрудно показать аналогично тому, как это сделано в п. 2, что условия (3.3) остаются в силе и без предположения о невырожденности квадратичной формы $a(x)$.

Поступила 23 VIII 1965

## ЛИТЕРАТУРА

1. Д у б Дж. Вероятностные процессы. М., Изд. иностр. лит., 1956.
2. К а ц Н. Я., К р а с о в с к и й Н. Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
3. Х а с ь м и н с к и й Р. З. Об устойчивости траектории марковских процессов. ПММ, 1962, т. 26, вып. 6, стр. 1025—1032.
4. L e i b o w i t z M. A. Statistical Behavior of Linear Systems with Randomly Varying Parameters. J. Math. Phys., 1963, vol. 4, No. 6.
5. Н е в е л ь с о н М. Б., Х а с ь м и н с к и й Р. З. Об устойчивости стохастических систем. Проблемы передачи информации, в печати.
6. Р а б о т н и к о в Ю. Л. О невозможности стабилизации системы в среднем квадратичном случайными возмущениями ее параметров. ПММ, 1964, т. 28, вып. 5, стр. 935—940.
7. C a u g h e y T. K., D i e n e s J. K. The Behavior of Linear Sytsems with Random Parametric Excitation. J. Math. and Phys., 1962, vol. 41, No 4, p. 301—311.
8. М а л к и н И. Г. О построении функций Ляпунова для системы линейных уравнений. ПММ, 1952, т. 16, вып. 2.
9. Б е д е л ь б а е в А. К. Про побудову функций Ляпунова вигляді квадратичноі форми іх застосування до стійкості регульованых систем. Автоматика (Київ), 1958, № 1.
10. Г е л ь ф а н д И. М. Лекции по линейной алгебре, изд. 2-е. М.— Л., Гостехиздат, 1951.