ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЯМИ

В. Р. Носов (Москва)

1. Рассмотрим следующую задачу об оптимальном управлении для систем с последействием. Пусть дана система (1.1)

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-\tau) + M(t)u(t), \qquad x(t) = \varphi(t), \qquad t \in [a-\tau, a]$$

и функционал

$$I[u] = \frac{1}{2}\int_a^b \{x^*(t)F(t)x(t) + x^*(t-\tau)G(t)x(t-\tau) + u^*(t)H(t)u(t)\}\,dt\,. \tag{1.2}$$

Здесь $x(t)$ и $u(t)$ — m-мерные векторы, A, B, M, F, G, H — квадратные матрицы m-мерного порядка, причем F, G, H — положительно определенные матрицы и $G(t) \equiv 0$ при $t > b$. Будем считать, что все элементы матриц — непрерывные функции времени. Начальная вектор-функция $\varphi(t)$ также считается непрерывной на $[a-\tau, a]$.

Требуется определить управление $u(t)$ так, чтобы функционал (1.2) имел минимум. Будем считать управление допустимым, если оно кусочно-дифференцируемо.

Как показано Халанаем [1, 2], задача нахождения оптимального управления для системы (1.1) и функционала (1.2) эквивалентна следующей краевой задаче:

$$\begin{gathered} x'(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-\tau) - M(t)H^{-1}(t)M^*(t)z(t) \\ z'(t) = -A^*(t)z(t) - B^*(t+\tau)z(t+\tau) - [F(t) + G(t+\tau)]x(t) \\ x(t) = \varphi(t), \quad t \in [a-\tau, a]; \qquad z(t) = 0, \quad t \in [b, b+\tau] \end{gathered} \tag{1.3}$$

Если задача (1.3) имеет решение, тогда

$$u(t) = -H^{-1}(t)M^*(t)z(t)$$

будет оптимальным управлением в задаче (1.1), (1.2).

Будем рассматривать задачу, более общую, чем (1.3)

$$\begin{gathered} x'(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-\tau) + C(t)y(t) \\ y'(t) = -A^*(t)y(t) - B^*(t+\tau)y(t+\tau) + D(t)x(t) \\ x(t) = \varphi(t), \quad t \in [a-\tau, a]; \qquad y(t) = \psi(t), \quad t \in [b, b+\tau] \end{gathered} \tag{1.4}$$

Как показано в работе [1], задачу (1.4) можно свести к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Но ядро этого уравнения не выражается в явном виде через коэффициенты задачи (1.4). Поэтому при таком сведении не удается получить простых условий существования решения у задачи (1.4).

В настоящей работе будут установлены некоторые простые достаточные условия существования единственного решения у задачи (1.4), иначе говоря, будут получены условия существования оптимального управления для задачи (1.1), (1.2).

2. Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{gathered} x'(t) - A(t)x(t) - B(t)x(t-\tau) + C(t)y(t) = f_1(t) \\ y'(t) + A^*(t)y(t) + B^*(t+\tau)y(t+\tau) + D(t)x(t) = f_2(t) \end{gathered} \tag{2.1}$$

$$x(t) = 0, \quad t \in [a-\tau, a]; \qquad y(t) = 0, \quad t \in [b, b+\tau] \tag{2.2}$$

Ниже будет показано, что задача (1.4) легко может быть сведена к задаче (2.1). Систему уравнений (2.1) запишем в виде одного операторного уравнения

$$L\{x(t), y(t)\} = \{f_1(t), f_2(t)\} \tag{2.3}$$

Обозначим через W гильбертово пространство непрерывных на $[a, b]$ m-мерных векторов, обладающих интегрируемой с квадратом первой производной. Норма в этом пространстве определяется следующим образом:

$$\|x^2\|_W = \int_a^b \{x^2(t) + x'^2(t)\}\,dt \tag{2.4}$$

Пространство W полно относительно этой нормы.

Обозначим через D_0 подпространство пространства $W \times W$, координаты которого удовлетворяют условию (2.2), а через L_2 — пространство векторов, координаты которых суммируемы с квадратом на $[a, b]$.

Рассмотрим задачу, сопряженную с задачей (2.1) и (2.2)

$$X'(t) - A^*(t)X(t) - B^*(t+\tau)X(t+\tau) + D^*(t)Y(t) = g_1(t)$$

$$Y'(t) + A(t)Y(t) + B(t)Y(t-\tau) + C^*(t)X(t) = g_2(t) \qquad (2.5)$$

$$X(t) = 0, \quad t \in [b, b+\tau]; \qquad Y(t) = 0, \quad t \in [a-\tau, a] \qquad (2.6)$$

или, более коротко, (2.5) можно записать в виде

$$M\{X(t), Y(t)\} = \{g_1(t), g_2(t)\}$$

Здесь оператор M является сопряженным к L. Наряду с решениями задачи (2.5), 2.6), из пространства D_0 будем рассматривать обобщенные решения.

Вектор $\{X(t), Y(t)\} \in L_2$ назовем обобщенным решением задачи (2.5), (2.6), если он удовлетворяет следующему интегральному тождеству:

$$\int_a^b \{X^*(t)[\Phi_1'(t) - A(t)\Phi_1(t) - B(t)\Phi_1(t-\tau) + C(t)\Phi_2(t)] +$$

$$+ Y^*(t)[\Phi_2'(t) + A^*(t)\Phi_2(t) + B(t+\tau)\Phi_2(t+\tau) +$$

$$+ D(t)\Phi_1(t)]\}\, dt = \int_a^b \{g_1^*(t)\Phi_1(t) + g_2^*(t)\Phi_2(t)\}\, dt \qquad (2.7)$$

$$\{\Phi_1(t), \Phi_2(t)\} \in D_0$$

Легко видеть, что всякое решение задачи (2.5), (2.6), принадлежащее классу D_0, удовлетворяет тождеству (2.7). Для этого достаточно уравнение (2.5) умножить на $\Phi_1(t)$ и $\Phi_2(t)$, проинтегрировать по $[a, b]$, взять первый интеграл по частям и учесть краевые условия для $\{X(t), Y(t)\}$ и $\{\Phi_1(t), \Phi_2(t)\}$.

Предположим теперь, что матрицы $C(t)$ и $D(t)$ симметричны и положительно-определенны, т. е. что для всех $t \in [a, b]$

$$C(t) = C^*(t), \qquad D(t) = D^*(t) \qquad (2.8)$$

$$\xi^* C(t)\xi \geqslant \alpha\xi^*\xi; \qquad \xi^* D(t)\xi \geqslant \beta\xi^*\xi \qquad (\alpha, \beta > 0) \qquad (2.9)$$

Здесь ξ — произвольный m-мерный вектор. Ниже будет показано, что для любых решений задачи (2.1), (2.2) и задачи (2.5), (2.6) справедливы неравенства

$$\|x\|_W + \|y\|_W \leqslant C_1\{\|f_1\|_{L_2} + \|f_2\|_{L_2}\} \qquad (2.10)$$

$$\|X\|_{L_2} + \|Y\|_{L_2} \leqslant C_2\{\|g_1\|_{L_2} + \|g_2\|_{L_2}\} \qquad (2.11)$$

Из неравенства (2.10) следует, что задача (2.1), (2.2) может иметь только одно решение. Кроме того [3], из неравенства (2.10) вытекает, что оператор L является замкнутым оператором на пространстве D_0, иначе говоря, множество значений $R(L)$ оператора L является замкнутым подпространством пространства L_2. Покажем, что $R(L)$ совпадает со всем L_2, т. е. что оператор осуществляет взаимно однозначное отображение пространства D_0 на L_2. Это означает, что для любых $\{f_1, f_2\} \in L_2$ найдутся такие $\{x, y\} \in D_0$, что $L\{x, y\} = \{f_1, f_2\}$, или что задача (2.1), (2.2) имеет решение для всех $\{f_1, f_2\} \in L_2$. Для доказательства совпадения $R(L)$ и L_2 покажем, что в L_2 не существует элемента $\{X, Y\}$, отличного от нуля и ортогонального всему $R(L)$, т. е. покажем, что если

$$\int_a^b \{X^*(t)[x'(t) - A(t)x(t) - B(t)x(t-\tau) + C(t)y(t)] + \qquad (2.12)$$

$$+ Y^*(t)[y'(t) + A^*(t)y(t) + B^*(t+\tau)y(t+\tau) + D(t)x(t)]\}\, dt = 0, \qquad \{x, y\} \in D_0$$

то отсюда следует, что $X(t) \equiv 0, \quad Y(t) \equiv 0$.

Сравнивая (2.12) и (2.7), видим, что последнее утверждение совпадает с теоремой единственности обобщенного решения задачи (2.5), (2.6), но теорема единственности обобщенного решения задачи (2.5), (2.6) вытекает из неравенства (2.11). В самом деле, неравенство (2.11) означает, что оператор M можно расширить на все пространство L_2 и он замкнут на L_2. Кроме того, по известной теореме ([3], стр. 555) получаем, что для любых $\{X, Y\} \in L_2$ справедливо неравенство

$$\|X\|_{L_2} + \|Y\|_{L_2} \leqslant C_2 \|M^\circ \{X, Y\}\|_{L_2} \tag{2.13}$$

где через M° обозначено расширение оператора M на L_2. Заметим, наконец, что обобщенное решение задачи (2.5), (2.6) можно определить не только при помощи тождества (2.7), но и как решение операторного уравнения

$$M^\circ \{X, Y\} = \{g_1, g_2\} \tag{2.14}$$

Но решение уравнения (2.14), иначе говоря,— обобщенное решение задачи (2.5), (2.6), удовлетворяет неравенству (2.11). Из неравенства (2.11) непосредственно следует теорема единственности обобщенного решения задачи (2.5), (2.6). Таким образом, если выполнены неравенства (2.10) и (2.11), то доказано, что задача (2.1), (2.2) однозначно разрешима для любых $\{f_1, f_2\} \in L_2$. Функции из D_0 непрерывны на $[a, b]$, а

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-\tau) - C(t)y(t) + f_1(t)$$

Поэтому любое решение задачи (2.1), (2.2), принадлежащее D_0, имеет непрерывные первые производные, как только матрицы A, B, C, D и f_1, f_2 непрерывны на $[a, b]$.

Таким образом, доказательство существования единственного решения у задачи (2.1), (2.2) сведено к доказательству неравенств (2.10) и (2.11).

Установим эти неравенства. Докажем сначала более простое неравенство

$$\|x\|_{L_2} + \|y\|_{L_2} \leqslant C_3 \{\|f_1\|_{L_2} + \|f_2\|_{L_2}\} \tag{2.15}$$

Умножим скалярно первое уравнение в (2.1) на $y(t)$, второе уравнение — на $x(t)$ и сложим. Тогда

$$\frac{d}{dt}(x(t), y(t)) + (C(t)y(t), y(t)) + (D(t)x(t), x(t)) +$$
$$+ (B^*(t+\tau)y(t+\tau), x(t)) - (B(t)x(t-\tau), y(t)) = (f_1(t), y(t)) + (f_2(t), x(t)) \tag{2.16}$$

Проинтегрируем теперь (2.16) по t в пределах от a до b. Тогда, в силу условий (2.2), первый член этого равенства обращается в нуль, и, кроме того,

$$\int_a^b (B^*(t+\tau)y(t+\tau), x(t))\,dt = \int_{a-\tau}^{b-\tau} (B^*(t+\tau)y(t+\tau), x(t))\,dt =$$
$$= \int_a^b (B^*(\xi)y(\xi), x(\xi-\tau))\,d\xi = \int_a^b (B(t)x(t-\tau), y(t))\,dt \tag{2.17}$$

Учитывая (2.17), найдем, что

$$\int_a^b \{(C(t)y(t), y(t)) + (D(t)x(t), x(t))\}\,dt = \int_a^b \{(f_1(t), y(t)) + (f_2(t), x(t))\}\,dt \tag{2.18}$$

Из (2.18), учитывая (2.8) и (2.9), легко получаем, что

$$\alpha\|x\|_{L_2}^2 + \beta\|y\|_{L_2}^2 \leqslant \frac{2}{\beta}\|f_1\|_{L_2}^2 + \frac{2}{\alpha}\|f_2\|_{L_2}^2 + \frac{\alpha}{2}\|x\|_{L_2}^2 + \frac{\beta}{2}\|y\|_{L_2}^2 \tag{2.19}$$

Из (2.19) сразу следует (2.15). Отметим только, что константа C_3 в неравенстве (2.15) определяется только величинами α и β.

Установим теперь (2.10). Для этого умножим скалярно первое уравнение в (2.1) на $x'(t)$, второе — на $y'(t)$, проинтегрируем по интервалу $[a, b]$ и сложим. Затем к каждому из полученных интегралов применим неравенство

$$\int_a^b (\xi(t), \eta(t))\,dt \leqslant \varepsilon\|\xi(t)\|_{L_2}^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|\eta(t)\|_{L_2}^2$$

и положим $\varepsilon = {}^1/_8$. Тогда

$$\|x'\|_{L_2}^2 + \|y'\|_{L_2}^2 \leqslant 8\|A(t)x(t)\|_{L_2}^2 + 8\|C(t)y(t)\|_{L_2}^2 + 8\|B(t)x(t-\tau)\|_{L_2}^2 + \\ + 8\|D(t)x(t)\|_{L_2}^2 + 8\|A^*(t)y(t)\|_{L_2}^2 + 8\|B^*(t+\tau)y(t+\tau)\|_{L_2}^2 + 8\|f_1(t)\|_{L_2}^2 + \\ + 8\|f_2(t)\|_{L_2}^2 + {}^1/_2\|x'\|_{L_2}^2 + {}^1/_2\|y'\|_{L_2}^2 \tag{2.20}$$

Пусть элементы матриц A, B, C, D являются измеримыми и ограниченными функциями на $[a, b]$. Тогда, используя неравенство (2.15), получим из (2.20) неравенство (2.10), в котором постоянная C_1 зависит только от коэффициентов системы (2.1).

Этим неравенство (2.10) доказано. Неравенство (2.11) устанавливается аналогично тому, как было установлено (2.15). Таким образом, полностью доказана теорема.

Теорема 2.1. Пусть матрицы A, B, C, D измеримы и ограничены на $[a, b]$, а матрицы C и D удовлетворяют условиям (2.8), (2.9) почти всюду на $[a, b]$. Тогда для любых $\{f_1, f_2\} \in L_2$ существует единственное решение задачи (2.1), (2.2), принадлежащее пространству D_0.

Если, кроме того, матрицы коэффициентов системы (2.1), правые части f_1 и f_2 непрерывны на $[a, b]$, то решение задачи (2.1), (2.2) имеет непрерывные производные.

Замечание 1. Сведем задачу (1.4) к задаче (2.1), (2.2). Покажем прежде всего, что задача (1.4) может иметь только единственное решение. В самом деле, пусть $\{x_1, y_1\}$ и $\{x_2, y_2\}$ — два решения задачи (1.4). Тогда $\{x_1 - x_2, y_1 - y_2\}$ есть решение задачи (1.4) с нулевыми краевыми условиями. Но тогда из неравенства (2.10) следует

$$x_1 - x_2 \equiv 0, \qquad y_1 - y_2 \equiv 0$$

Возьмем теперь функции $x_0(t)$ и $y_0(t)$ такие, что

$$\begin{aligned} &x_0(t) = \varphi(t), \quad t \leqslant a; \qquad x_0(t) = \varphi(a), \quad a \leqslant t \leqslant b \\ &y_0(t) = \psi(t), \quad b \leqslant t; \qquad y_0(t) = \psi(b), \quad a \leqslant t \leqslant b \end{aligned} \tag{2.21}$$

Рассмотрим разность $x(t) - x_0(t) = x_3(t)$, $y(t) - y_0(t) = y_3(t)$. Легко видеть, что $\{x_3(t), y_3(t)\}$ есть решение задачи (2.1), (2.2), в которой

$$\begin{aligned} f_1(t) &= x_0'(t) - A(t)x_0(t) - B(t)x_0(t-\tau) + C(t)y_0(t) \\ f_2(t) &= y_0'(t) + A^*(t)y_0(t) + B^*(t+\tau)y_0(t+\tau) + D(t)x_0(t) \end{aligned}$$

Если φ и ψ интегрируемы с квадратом по своим областям определения, то $\{f_1, f_2\} \in L_2$, а если, кроме того, φ и ψ непрерывны, то и f_1, f_2 также непрерывны.

Воспользовавшись теперь единственностью решения задачи (1.4), видим, что утверждение теоремы 2.1 справедливо и для задачи (1.4).

Замечание 2. Теорема 1 сохраняет свою силу и тогда, когда одно из чисел a, b или оба одновременно обращаются в бесконечность. Это легко видеть, если учесть, что постоянные в оценках (2.10), (2.11) не зависят от интеграла интегрирования, и под пространством D_0 понимать пространство функций, суммируемых с квадратом и обладающих суммируемой с квадратом первой производной.

Замечание 3. В случае, когда запаздывание зависит от времени, можно доказать теорему типа теоремы 2.1 для задачи вида

$$\begin{gathered} x'(t) - A(t)x(t) - B(t)x(t - \tau(\gamma(t))) + C(t)y(t) = f_1(t) \\ y'(t) + A^*(t)y(t) + B^*(t + \tau(t))(1 + \tau'(t))y(t + \tau(t)) + D(t)x(t) = f_2(t) \\ x(t) = 0, \quad t \leqslant a; \qquad y(t) = 0, \quad t \geqslant b \end{gathered}$$

Здесь через $\gamma(t)$ обозначена функция, обратная к функции $t - \tau(t)$ (предполагается, что такая существует). Специальный вид уравнения обеспечивает выполнение (2.17) и в этом случае. Остальное доказательство дословно повторяется.

3. Установим еще один признак существования единственного решения задачи (1.4). Рассмотрим более общую задачу

$$\begin{aligned} x'(t) &= A(t)x(t) + B(t)x(t - \tau(t)) + C(t)y(t) + f_1(t) \\ y'(t) &= D(t)y(t) + E(t)y(t + \tau(t)) + F(t)x(t) + f_2(t) \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \leqslant a; \qquad y(t) = \psi(t), \quad t \geqslant b \tag{3.2}$$

Здесь A, B, C, D, E, F — произвольные непрерывные квадратные матрицы порядка m; $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $f_1(t)$, $f_2(t)$ — непрерывные функции.

Задачу (3.1), (3.2) можно свести к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, аналогично тому, как это сделано в [1], и затем доказывать существование решения задачи (3.1), (3.2) методом последовательных приближений. Однако, поскольку ядро этого интегрального уравнения в явном виде неизвестно, то удобнее применить метод последовательных приближений непосредственно к задаче (3.1), (3.2).

Докажем следующую теорему.

Теорема 3.1. Пусть матрицы A, B, C, D, E, F — непрерывны; φ, ψ, f_1, f_2 — также непрерывны. Пусть, кроме того,

$$\int_a^b (\|A(t)\| + \|B(t)\| + \|F(t)\|)\,dt \leqslant \delta < 1 \quad \int_a^b (\|C(t)\| + \|E(t)\| + \|D(t)\|)\,dt \leqslant \delta < 1 \tag{3.3}$$

Тогда задача (3.1), (3.2) имеет единственное решение. Перейдем от задачи (3.1), (3.2) к интегральным уравнениям

$$\begin{aligned} x(t) &= \varphi(a) + \int_a^t \{A(\xi)x(\xi) + B(\xi)x(\xi - \tau(\xi)) + C(\xi)y(\xi) + f_1(\xi)\}\,d\xi \\ y(t) &= \psi(b) + \int_t^b \{D(\xi)y(\xi) + E(\xi)y(\xi + \tau(\xi)) + F(\xi)x(\xi) + f_2(\xi)\}\,d\xi \end{aligned} \tag{3.4}$$

Здесь считаем

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \leqslant a; \qquad y(t) = \psi(t), \quad t \geqslant b$$

Определим $x_0(t)$, $y_0(t)$ так же, как в (2.21), и построим $x_1(t)$ и $y_1(t)$ по формулам

$$x_1(t) = \varphi(t) \qquad (t \leqslant a)$$

$$x_1(t) = \varphi(a) + \int_a^t \{A(\xi)x_0(\xi) + B(\xi)x_0(\xi - \tau(\xi)) + C(\xi)y_0(\xi) + f_1(\xi)\}\,d\xi \qquad (t \geqslant a)$$

$$y_1(t) = \psi(t) \qquad (b \leqslant t)$$

$$y_1(t) = \psi(b) + \int_t^b \{D(\xi)y_0(\xi) + E(\xi)y_0(\xi + \tau(\xi)) + F(\xi)x_0(\xi) + f_2(\xi)\}\,d\xi \qquad (t \leqslant b)$$

Затем аналогично построим $x_n(t)$, $y(t)$. Легко видеть, что при выполнении условий (3.3)

$$\|x_n - x_{n-1}\|_C + \|y_n - y_{n-1}\|_C \leqslant \delta\|x_{n-1} - x_{n-2}\|_C + \delta\|y_{n-1} - y_{n-2}\|_C$$

т. е. что интегральный оператор (3.4) является оператором сжатия в пространстве $C[a, b]$. Он имеет единственную неподвижную точку, которая является решением задачи (3.1), (3.2).

Теорема 3.1 доказана.

Отметим, наконец, что теоремы 2.1 и 3.1 имеют различные, не совпадающие между собой области приложений.

Поступила 21 V 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Halanay A. Systèmes optimaux à retardement et quelques problèmes nouveaux dans la théorie des systèmes à argument dèplacé. Nonlinear vibration problems. Zagadnienia Drgań Nieliniowych, 1963, vol. 5.
2. Halanay A. Systèmes à retardement. Résultats et problèmes. Tagungsbericht der III Konferenz über Nichtlineare Schwingungen, Berlin, 1965.
3. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. V, Физматгиз, 1959.