ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА АСИМПТОТИЧЕСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ К ПОСТРОЕНИЮ ПРИБЛИЖЕННОЙ ТЕОРИИ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

Л. А. Агаловян (Ереван)

Исследуются оболочки с общей анизотропией без предположений, принимаемых при выводе основных уравнений в классической теории оболочек. В случае общей анизотропии предполагается, что в каждой точке имеется лишь одна плоскость упругой симметрии, параллельная срединной поверхности оболочки.

Применением метода асимптотического интегрирования уравнений теории упругости, предложенного А. Л. Гольденвейзером [1,2], доказывается возможность представления напряженного состояния в анизотропной оболочке в виде суммы двух напряженных состояний. Первое из них определяется из полученных уравнений основного итерационного процесса, а второе — из уравнений вспомогательного итерационного процесса.

1. Основные уравнения теории упругости анизотропного тела. Приведем необходимые для дальнейшего некоторые результаты классической линейной теории упругости [3] в произвольных криволинейных координатах ϑ^i.

Точки оболочки будем определять радиус-вектором

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}(\vartheta^1, \vartheta^2) + \vartheta^3\mathbf{n}(\vartheta^1, \vartheta^2) \tag{1.1}$$

где $\mathbf{r}(\vartheta^1, \vartheta^2)$ — радиус-вектор срединной поверхности оболочки, отнесенной к произвольной криволинейной системе координат ϑ^α; $\mathbf{n}$ — единичная нормаль к срединной поверхности оболочки; $-h \leqslant \vartheta^3 \leqslant +h$, $2h$ — толщина оболочки, которая принимается постоянной. Метрические тензоры g_{ij}, g^{ij}, единичный тензор $\delta^i{}_j$ выражаются через ковариантные и контравариантные основные векторы $\mathbf{g}_i$ и $\mathbf{g}^i$ формулами

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i\mathbf{g}_j, \qquad g^{ij} = \mathbf{g}^i\mathbf{g}^j, \qquad \delta_j^{\ i} = g^{ir}g_{rj}$$

Обозначим через $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ тензоры первой и второй квадратичной формы срединной поверхности. Тогда между некоторыми геометрическими величинами, характеризующими оболочку и ее срединную поверхность, имеются соотношения [3]

$$\mathbf{g}_\alpha = \partial\mathbf{R} / \partial\vartheta^\alpha = (\delta_\alpha^{\ \lambda} - \vartheta^3 b_\alpha^{\ \lambda})\,\mathbf{a}_\lambda, \qquad \mathbf{g}_3 = \partial\mathbf{R} / \partial\vartheta^3 = \mathbf{n} \tag{1.2}$$

$$g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - 2\vartheta^3 b_{\alpha\beta} + (\vartheta^3)^2 b_\alpha^{\ \lambda} b_{\beta\lambda}, \qquad g_{\alpha 3} = 0,\ g_{33} = 1 \tag{1.3}$$

$$a_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha\mathbf{a}_\beta, \qquad g = |g_{ij}|, \qquad a = |a_{\alpha\beta}|$$

$$\vartheta = 1 - \vartheta^3 b_\lambda^{\ \lambda} + (\vartheta^3)^2 K, \qquad K = b_1^{\ 1} b_2^{\ 2} - b_2^{\ 1} b_1^{\ 2} \qquad (\vartheta = \sqrt{g/a}) \tag{1.4}$$

Здесь K — гауссова кривизна срединной поверхности, b_α^λ — смешанная форма второго фундаментального тензора $b_{\alpha\beta}$. Условимся, что греческие индексы здесь и далее принимают значения 1 и 2, а латинские индексы — значения 1, 2, 3.

Введем ковариантный тензор деформации γ_{ij} и контравариантный тензор напряжений σ^{ij}; первый выражается через вектор смещения $\mathbf{U}$ следующим образом:

$$\gamma_{ij} = {}^1\!/\!_2\,(\mathbf{g}_i\,\partial\mathbf{U} / \partial\vartheta^j + \mathbf{g}_j\,\partial\mathbf{U} / \partial\vartheta^i) \tag{1.5}$$

Уравнения равновесия при отсутствии массовых сил имеют вид

$$\partial\mathbf{T}^i / \partial\vartheta^i = 0 \qquad (\mathbf{T}^i = \sqrt{g}\,\sigma^{ij}\mathbf{g}_j) \tag{1.6}$$

В дальнейшем удобно ввести несимметричный тензор напряжения τ^{ij}

$$\mathbf{T}_i = (\tau^{i\lambda}\mathbf{a}_\lambda + \tau^{i3}\mathbf{n})\sqrt{a}, \qquad \tau^{i\lambda} = (\delta_\mu^{\ \lambda} - \vartheta^3 b_\mu^{\ \lambda})\,\sigma^{i\mu}\vartheta, \qquad \tau^{i3} = \vartheta\sigma^{i3} \tag{1.7}$$

Из (1.6) и (1.7) получаются соотношения

$$\vartheta\sigma_\beta^{\ i} = \tau^{i\lambda}(a_{\lambda\beta} - \vartheta^3 b_{\lambda\beta}), \qquad \sigma_3^{\ i}\vartheta = \tau^{i3} = \vartheta\sigma^{i3} \tag{1.8}$$

Ввиду симметричности тензора σ^{ji} имеют место соотношения

$$c_{\lambda\beta}(\tau^{\lambda\beta} - \vartheta^3 b_\alpha^\lambda \tau^{\alpha\beta}) = 0, \qquad \tau^{3\lambda} = \tau^{\lambda 3} - \vartheta^3 b_\mu^\lambda \tau^{\mu 3} \tag{1.9}$$

Здесь $c_{\lambda\beta}$ — кососимметричный дискриминантный тензор с компонентами

$$c_{11} = c_{22} = 0, \qquad c_{12} = -c_{21} = \sqrt{a} \tag{1.10}$$

Уравнения равновесия (1.6), учитывая (1.7), можно преобразовать к виду

$$\nabla_\alpha \tau^{\alpha\beta} - b_\alpha^{\ \beta}\tau^{\alpha 3} + \partial\tau^{3\beta} / \partial\vartheta^3 = 0, \qquad \nabla_\alpha \tau^{\alpha 3} + b_{\alpha\beta}\tau^{\alpha\beta} + \partial\tau^{33} / \partial\vartheta^3 = 0 \tag{1.11}$$

где ∇_α — символ ковариантного дифференцирования в метрике, установленной на срединной поверхности [4]

$$\nabla_\lambda A^{\alpha\beta} = \partial A^{\alpha\beta} / \partial\vartheta^\lambda + \Gamma_{\mu\lambda}^{\ \alpha} A^{\mu\beta} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\ \beta} A^{\alpha\mu}$$

$$\Delta_\lambda A_\alpha = \partial A_\alpha / \partial\vartheta^\lambda - \Gamma_{\alpha\lambda}^{\ \mu} A_\mu, \qquad \nabla_\lambda A^\alpha = \partial A^\alpha / \partial\vartheta^\lambda + \Gamma_{\mu\lambda}^{\ \alpha} A^\mu, \qquad \nabla_\lambda A = \partial A / \partial\vartheta^\lambda \tag{1.12}$$

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\ \ \alpha} = a_\alpha \partial a_\beta / \partial\vartheta^\gamma = {}^1/_2 a^{\alpha\lambda} (\partial a_{\beta\lambda} / \partial\vartheta^\gamma + \partial a_{\gamma\lambda} / \partial\vartheta^\beta - \partial a_{\beta\gamma} / \partial\vartheta^\lambda) \tag{1.13}$$

Представим вектор смещения $\mathbf{U}$ в виде

$$\mathbf{U} = u^\lambda \mathbf{a}_\lambda - W\mathbf{n} \tag{1.14}$$

Учитывая (1.5), получим

$$\begin{gathered} 2\gamma_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha u_\beta + \nabla_\beta u_\alpha + 2b_{\alpha\beta} W - \vartheta^3 [b_\beta^\lambda (\nabla_\alpha u_\lambda + b_{\lambda\alpha} W) + b_\alpha^\lambda (\nabla_\beta u_\lambda + b_{\lambda\beta} W)] \\ 2\gamma_{\alpha 3} = -\nabla_\alpha W + b_\alpha^{\ \lambda} u_\lambda + \partial u_\alpha / \partial\vartheta^3 - \vartheta^3 b_\alpha^{\ \lambda} \partial u_\lambda / \partial\vartheta^3, \quad \gamma_{33} = -\partial W / \partial\vartheta^3 \end{gathered} \tag{1.15}$$

Соотношения деформация-напряжение в произвольной криволинейной координатной системе имеют вид [3]

$$\gamma_{ij} = F_{ijrs}\sigma^{rs} \quad \text{или} \quad \gamma_{ij} = F_{ij}^{rs}\sigma_r^k g_{ks} \tag{1.16}$$

Здесь F_{ij}^{rs} — упругие коэффициенты в произвольной криволинейной координатной системе, связанные с S_{ij}^{rs} в прямоугольной системе координат соотношением

$$F_{ij}^{rs} = \frac{\partial x^p}{\partial\vartheta^i} \frac{\partial x^q}{\partial\vartheta^j} \frac{\partial\vartheta^r}{\partial x^m} \frac{\partial\vartheta^s}{\partial x^n} S_{pq}^{mn} \tag{1.17}$$

Рассмотрим анизотропное упругое тело, имеющее в каждой точке одну плоскость упругой симметрии (13 независимых констант). Предположим, что плоскость упругой симметрии в каждой точке параллельна к координатной поверхности $\vartheta^3 = x^3 = \text{const}$.

Тогда

$$F_{ij}^{rs} = F_{ij}^{sr} = F_{ji}^{rs} = F_{ji}^{sr}, \qquad F_{\lambda\mu}^{3\beta} = F_{3\beta}^{\lambda\mu} = F_{3\mu}^{33} = F_{33}^{3\mu} = 0 \tag{1.18}$$

Учитывая (1.18) и (1.3), соотношения (1.16) удобно преобразовать к виду

$$\gamma_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}^{\lambda\mu}\sigma_\lambda^\xi g_{\xi\mu} + F_{\alpha\beta}^{33}\sigma_3^3, \quad \gamma_{\alpha 3} = F_{\alpha 3}^{3\mu}\sigma_3^\xi g_{\xi\mu} + F_{\alpha 3}^{\lambda 3}\sigma_\lambda^3, \quad \gamma_{33} = F_{33}^{\lambda\mu}\sigma_\lambda^\xi g_{\xi\mu} + F_{33}^{33}\sigma_3^3 \tag{1.19}$$

Подставив (1.8) в (1.19), приводим последнее к виду (1.20)

$$\vartheta\gamma_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}^{\lambda\mu} g_{\xi\mu}\tau^{\xi\nu}(a_{\nu\lambda} - \vartheta^3 b_{\nu\lambda}) + F_{\alpha\beta}^{33}\tau^{33}, \quad \vartheta\gamma_{\alpha 3} = F_{\alpha 3}^{\lambda 3}\tau^{\xi 3} g_{\xi\lambda} + F_{\alpha 3}^{3\lambda}\tau^{3\xi}(a_{\xi\lambda} - \vartheta^3 b_{\xi\lambda})$$

$$\vartheta\gamma_{33} = F_{33}^{\lambda\mu} g_{\xi\mu}\tau^{\xi\nu}(a_{\nu\lambda} - \vartheta^3 b_{\nu\lambda}) + F_{33}^{33}\tau^{33}$$

В частности, когда имеем изотропное тело

$$F_{ij}^{rs} = [(1+\sigma) / E]\, \delta_i^r \delta_j^s - \sigma / E g^{rs} g_{ij} \tag{1.21}$$

Здесь E — модуль Юнга, σ — коэффициент Пуассона, соотношения (1.20) превращаются в известные соотношения для изотропного тела.

Соотношения (1.20), учитывая (1.15), можно переписать следующим образом:

$$-\vartheta\partial W / \partial\vartheta^3 = F_{33}^{\lambda\mu} g_{\xi\mu}\tau^{\xi\nu}(a_{\nu\lambda} - \vartheta^3 b_{\nu\lambda}) + F_{33}^{33}\tau^{33}$$

$$\begin{aligned} {}^1/_2\vartheta(-\nabla_\alpha W + b_\alpha^\lambda u_\lambda + \partial u_\alpha / \partial\vartheta^3 - \vartheta^3 b_\alpha^\lambda \partial u_\lambda / \partial\vartheta^3) = {} \\ = F_{\alpha 3}^{\lambda 3}\tau^{\xi 3} g_{\xi\lambda} + F_{\alpha 3}^{3\lambda}\tau^{3\xi}(a_{\xi\lambda} - \vartheta^3 b_{\xi\lambda}) \end{aligned} \tag{1.22}$$

$$\begin{aligned} {}^1/_2\vartheta\{\nabla_\alpha u_\beta + \nabla_\beta u_\alpha + 2b_{\alpha\beta} W - \vartheta^3 [b_\beta^\lambda (\nabla_\alpha u_\lambda + b_{\lambda\alpha} W) + {} \\ + b_\alpha^\lambda (\nabla_\beta u_\lambda + b_{\lambda\beta} W)]\} = F_{\alpha\beta}^{\lambda\mu} g_{\xi\mu}\tau^{\xi\nu}(a_{\nu\lambda} - \vartheta^3 b_{\nu\lambda}) + F_{\alpha\beta}^{33}\tau^{33} \end{aligned}$$

2. Преобразование основных соотношений. Уравнения равновесия (1.11), условия симметрии (1.9) и соотношения деформация-напряжение (1.22) составляют полную систему дифференциальных уравнений для определения перемещений и напряжений.

Для интегрирования этой системы введем новые независимые переменные по формулам

$$\vartheta^\alpha = R\xi^\alpha, \qquad \vartheta^3 = h\zeta \tag{2.1}$$

Здесь R — характерный радиус кривизны срединной поверхности, $2h$ — толщина оболочки. Будем считать, что напряженное состояние быстро меняется только в направлении переменной ϑ^3, а по направлениям ξ^1, ξ^2, ζ напряжения и перемещения изменяются не слишком быстро. Тогда приведенные выше соотношения (1.9), (1.11) и (1.22) примут следующий вид:

$$\begin{gathered} h^*\nabla_\alpha{}'\tau^{\alpha\beta} - h^*Rb_\alpha{}^\beta\tau^{\alpha3} + \partial\tau^{3\beta}/\partial\zeta = 0, \qquad h^*\nabla_\alpha{}'\tau^{\alpha3} + h^*Rb_{\alpha\beta}\tau^{\alpha\beta} + \partial\tau^{33}/\partial\zeta = 0 \\ c_{\lambda\beta}(\tau^{\lambda\beta} - h^*R\zeta b_\alpha^\lambda\tau^{\alpha\beta}) = 0, \qquad \tau^{3\lambda} = \tau^{\lambda3} - h^*R\zeta b_\mu^\lambda\tau^{\mu3} \qquad (h^* = h/R) \end{gathered} \tag{2.2}$$

Здесь $\nabla_\alpha{}' = R\nabla_\alpha$ — символ ковариантного дифференцирования по ξ^α.

Соотношения деформация-напряжение. Как видно из (1.17), величины F_{ij}^{rs} зависят как от физических констант, характеризующих механические свойства материала, так и от координатной системы. Для изотропного тела физические свойства материала не зависят от направления, поэтому, как видно из (1.21), эти физические константы не связаны с компонентами метрического тензора, так как они умножаются на эти величины. Этот факт в значительной мере облегчает вычисления, так как при переходе к новым переменным по формулам (2.1) сразу можно написать зависимость от малого параметра h^* ввиду известности закона изменения метрического тензора. Вся специфика анизотропии заключается в том, что здесь не наблюдается подобной картины. Здесь физические направления и геометрические направления перекашиваются и, так как физические свойства различны по различным направлениям, то (1.17), как нам кажется, уже нельзя представить в виде (1.21) или в сходном с ним виде так, чтобы физические и геометрические свойства выступали бы отдельно. Этот факт в значительной мере затрудняет выкладки, но его можно преодолеть. Как видно из (1.17), при переходе к новым переменным величины F_{ij}^{rs} будут содержать малый параметр h^*. Разложим эти величины в ряд по малому параметру h^* (в ряде случаев ряд может оказаться конечным), т. е. представим

$$\begin{gathered} F_{\alpha\beta}^{\lambda\mu} = \sum_{s=0}^{s=S} h^{*s}F_{\alpha\beta}^{\lambda\mu(s)}, \qquad F_{\alpha\beta}^{33} = \sum_{s=0}^{s=S} h^{*s}F_{\alpha\beta}^{33(s)} \\ F_{33}^{\alpha\beta} = \sum_{s=0}^{s=S} h^{*s}F_{33}^{\alpha\beta(s)}, \qquad F_{\alpha3}^{3\beta} = \sum_{s=0}^{s=S} h^{*s}F_{\alpha3}^{3\beta(s)} \end{gathered} \tag{2.3}$$

Учитывая (2.1), (2.3), уравнения (1.22) примут вид

$$-\frac{\vartheta}{R}\frac{\partial W}{\partial\zeta} = h^*\left[\sum_{s=0}^{s=S} h^{*s}F_{33}^{33(s)}\tau^{33} + \sum_{s=0}^{s=S} h^{*s}F_{33}^{\lambda\mu(s)}g_{\xi\mu}\tau^{\xi\nu}(a_{\nu\lambda} - h^*\zeta Rb_{\nu\lambda})\right]$$

$$\begin{aligned} &{}^1/_2R^{-1}\vartheta\,(-h^*\nabla_\alpha{}'W + h^*Rb_\alpha{}^\lambda u_\lambda + \partial u_\alpha/\partial\zeta - h^*\zeta Rb_\alpha^\lambda\partial u_\lambda/\partial\zeta) = \\ &= h^*\left[\sum_{s=0}^{s=S} h^{*s}F_{\alpha3}^{\lambda3(s)}\tau^{\xi3}g_{\xi\lambda} + \sum_{s=0}^{s=S} h^{*s}F_{\alpha3}^{3\lambda(s)}\tau^{3\xi}(a_{\xi\lambda} - h^*R\zeta b_{\xi\lambda})\right] \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} &{}^1/_2R^{-1}\vartheta\,\{\nabla_\beta{}'u_\alpha + \nabla_\alpha{}'u_\beta + 2Rb_{\alpha\beta}W - \zeta Rh^*\,[b_\beta^\lambda(\nabla_\alpha{}'u_\lambda + Rb_{\lambda\alpha}W) + \\ &+ b_\alpha^\lambda(\nabla_\beta{}'u_\lambda + Rb_{\lambda\beta}W)]\} = \sum_{s=0}^{s=S} h^{*s}F_{\alpha\beta}^{\lambda\mu(s)}g_{\xi\mu}\tau^{\xi\nu}(a_{\nu\lambda} - h^*R\zeta b_{\nu\lambda}) + \sum_{s=0}^{s=S} h^{*s}F_{\alpha\beta}^{33(s)}\tau^{33} \end{aligned}$$

Здесь $g_{\alpha\beta}$ и ϑ согласно (1.3), (1.4) и (2.1) имеют вид

$$g_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta}-2h^*R\zeta b_{\alpha\beta}+h^{*2}\zeta^2R^2b_\alpha^\lambda b_{\beta\lambda},\quad \vartheta=1-h^*\zeta Rb_\lambda^\lambda+h^{*2}\zeta^2R^2K \tag{2.5}$$

Граничные условия. Пусть на наружной и внутренней поверхностях оболочки $\vartheta^3=\pm h$ имеем заданные усилия $\tau^{3\alpha}$ и τ^{33}, отнесенные к единице площади срединной поверхности оболочки

$$\tau^{33}=\pm{}^1/{}_2p,\qquad \tau^{3\alpha}=\pm{}^1/{}_2P^\alpha \tag{2.6}$$

3. Основной итерационный процесс. Приступая к построению основного итерационного процесса, применим метод, развитый А. Л. Гольденвейзером в работах [1,2].

Назовем основным итерационный процесс, который позволяет находить основные напряжения, т. е. напряжения, не обладающие вообще свойством быстрого затухания при удалении от краев оболочки. Пусть Q — любое из напряжений, а V — любое из перемещений. Будем искать решения уравнений (2.2) и (2.4) в виде

$$Q=\frac{1}{h^{*r}}\sum_{s=0}^{s=S}h^{*s}Q_{(s)},\qquad V=\frac{1}{h^{*r}}\sum_{s=0}^{s=S}h^{*s}V^{(s)} \tag{3.1}$$

Здесь принимается, что $Q_{(s)}\equiv 0, V^{(s)}\equiv 0$ при $s<0$; целое число r различно для различных напряжений и перемещений; эти числа нужно подобрать так, чтобы после подстановки (3.1) в (2.2) и (2.4) и приравнивания в каждом уравнении нулю коэффициентов при всех степенях h^*, начиная с низшей, получалась непротиворечивая последовательность систем уравнений для определения коэффициентов разложений (3.1). Такие значения r называются непротиворечивыми.

Выберем r следующим образом ($\varkappa$ — пока неопределенное целое число):

$$\tau^{\alpha\beta}\to r=\varkappa+1,\qquad (\tau^{\alpha3},\tau^{33})\to r=\varkappa,\qquad (u_\alpha, W)\to r=\varkappa+1 \tag{3.2}$$

Подставив (3.1) в уравнения (2.2) и (2.4) и учитывая (3.2), получим для определения коэффициентов разложений (3.1) следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered}\nabla_\alpha'\tau_{(s)}^{\alpha\beta}-b_\alpha^\beta R\tau_{(s-1)}^{\alpha3}+\partial\tau_{(s)}^{3\beta}/\partial\zeta=0,\quad \nabla_\alpha'\tau_{(s-1)}^{\alpha3}+Rb_{\alpha\beta}\tau_{(s)}^{\alpha\beta}+\partial\tau_{(s)}^{33}/\partial\zeta=0\\ c_{\lambda\beta}\,[\tau_{(s)}{}^{\lambda\beta}-R\zeta b_\mu^\lambda\tau_{(s-1)}^{\mu3}]=0,\qquad \tau_{(s)}{}^{3\lambda}=\tau_{(s)}{}^{\lambda3}-R\zeta b_\mu^\lambda\tau_{(s-1)}^{\mu3}\end{gathered} \tag{3.3}$$

$$\begin{gathered}-R^{-1}\partial W^{(s)}/\partial\zeta+\zeta b_\lambda^\lambda\partial W^{(s-1)}/\partial\zeta-\zeta^2RK\partial W^{(s-2)}/\partial\zeta=F_{33}^{33(0)}\tau_{(s-2)}^{33}+\\ +F_{33}^{33(1)}\tau_{(s-3)}^{33}+\ldots+F_{33}^{33(k)}\tau_{(s-k-2)}^{33}+\ldots+F_{33}{}^{\lambda\mu(0)}\,[a_{\xi\mu}a_{\nu\lambda}\tau_{(s-1)}^{\xi\nu}-\\ -\zeta R\,(a_{\xi\mu}b_{\nu\lambda}+2a_{\nu\lambda}b_{\xi\mu})\,\tau_{(s-2)}^{\xi\nu}+\zeta^2R^2\,(2b_{\xi\mu}b_{\nu\lambda}+a_{\nu\lambda}b_\xi^\alpha b_{\mu\alpha})\,\tau_{(s-3)}^{\xi\nu}-\\ -\zeta^3R^3b_\xi^\alpha b_{\mu\alpha}b_{\nu\lambda}\tau_{(s-4)}^{\xi\nu}]+\ldots+F_{33}{}^{\lambda\mu(k)}\,[\ldots]_{(s-k)}+\ldots\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}{}^1/{}_2R^{-1}\,[-\nabla_\alpha'W^{(s-1)}+Rb_\alpha^\lambda u_\lambda{}^{(s-1)}+\partial u_\alpha{}^{(s)}/\partial\zeta-\zeta Rb_\alpha^\lambda\partial u_\lambda{}^{(s-1)}/\partial\zeta]-\\ -{}^1/{}_2\zeta b_\lambda^\lambda\,[\ldots]_{(s-1)}+{}^1/{}_2\zeta^2RK\,[\ldots]_{(s-2)}=F_{\alpha3}{}^{\lambda3(0)}\,[a_{\xi\lambda}\tau_{(s-2)}^{\xi3}-2\zeta Rb_{\xi\lambda}\tau_{(s-3)}^{\xi3}+\\ +\zeta^2R^2b_\xi^\nu b_{\lambda\nu}\tau_{(s-4)}^{\xi3}]+F_{\alpha3}{}^{3\lambda(0)}\,[a_{\xi\lambda}\tau_{(s-2)}^{3\xi}-R\zeta b_{\xi\lambda}\tau_{(s-3)}^{3\xi}]+\ldots+F_{\alpha3}{}^{\lambda3(k)}\,[\ldots]_{(s-k)}+\ldots\end{gathered} \tag{3.4}$$

$$\begin{gathered}{}^1/{}_2R^{-1}\,\{\nabla_\alpha'u_\beta{}^{(s)}+\nabla_\beta'u_\alpha{}^{(s)}+2Rb_{\alpha\beta}W^{(s)}-\zeta R\,[b_\beta^\lambda\,(\nabla_\alpha'u_\lambda{}^{(s-1)}+Rb_{\lambda\alpha}W^{(s-1)})+\\ +b_\alpha^\lambda\,(\nabla_\beta'u_\lambda{}^{(s-1)}+Rb_{\lambda\beta}W^{(s-1)})]\}-{}^1/{}_2b_\lambda^\lambda\,\{\ldots\}_{(s-1)}+{}^1/{}_2\zeta^2RK\,\{\ldots\}_{(s-2)}=\\ =F_{\alpha\beta}{}^{\lambda\mu(0)}\,[a_{\xi\mu}a_{\nu\lambda}\tau_{(s)}{}^{\xi\nu}-\zeta R\,(a_{\xi\mu}b_{\nu\lambda}+2a_{\nu\lambda}b_{\xi\mu})\,\tau_{(s-1)}^{\xi\nu}+\\ +\zeta^2R^2\,(2b_{\xi\mu}b_{\nu\lambda}+a_{\nu\lambda}b_\xi^\alpha b_{\mu\alpha})\,\tau_{(s-2)}^{\xi\nu}-\zeta^3R^3b_\xi{}^\eta b_{\mu\eta}b_{\nu\lambda}\tau_{(s-3)}^{\xi\nu}+\ldots]+\\ +F_{\alpha\beta}{}^{\lambda\mu(k)}\,[\ldots]_{(s-k)}+\ldots+F_{\alpha\beta}^{33(0)}\tau_{(s-1)}^{33}+\ldots+F_{\alpha\beta}^{33(k)}\tau_{(s-k-1)}^{33}+\ldots\end{gathered}$$

Здесь и в дальнейшем будем под $[\ldots]_{(s-k)}$, где $k=1, 2, \ldots$, подразумевать предшествующее выражение, стоящее в тех же скобках, в котором вместо индекса s нужно подставить $(s-k)$.

Как и следовало ожидать, уравнения (3.3) точно совпадают с соответствующими уравнениями для изотропных оболочек, а уравнения (3.4) существенным образом отличаются от соответствующих уравнений для изотропных оболочек. Из уравнений (3.4), как частный случай, можно получить соответствующие уравнения для ортотропных и изотропных оболочек.

Если принять, что $F_{12}^{ii} = F_{ii}^{12} = 0$, $F_{13}^{23} = 0$, то уравнения (3.4) превращаются в соответствующие уравнения для ортотропных оболочек. Если в (3.5) принять равенство

$$F_{\alpha\beta}^{\lambda\mu(0)} = [(1+\sigma)/E]\,\delta_\alpha^\lambda\delta_\beta^\mu - (\sigma/E)\,a^{\lambda\mu}a_{\alpha\beta}$$

которое получается, если в (1.21) отбросить члены, содержащие h^*, то нетрудно проверить, что получаемое таким образом уравнение совпадает с соответствующим уравнением для изотропных оболочек [1].

Напишем головную систему уравнений (3.3) и (3.4)

$$\nabla_\alpha'\tau_{(0)}{}^{\alpha\beta} + \partial\tau_{(0)}{}^{3\beta}/\partial\zeta = 0, \quad Rb_{\alpha\beta}\tau_{(0)}{}^{\alpha\beta} + \partial\tau_{(0)}{}^{33}/\partial\zeta = 0, \quad c_{\lambda\beta}\tau_{(0)}^{\lambda\beta} = 0, \quad \tau_{(0)}{}^{3\lambda} = \tau_{(0)}{}^{\lambda 3}$$

$$\partial W^{(0)}/\partial\zeta = 0, \qquad \partial u_\alpha{}^{(0)}/\partial\zeta = 0 \tag{3.5}$$

$$^1/_2R^{-1}[\nabla_\alpha' u_\beta{}^{(0)} + \nabla_\beta' u_\alpha{}^{(0)} + 2Rb_{\alpha\beta}W^{(0)}] = F_{\alpha\beta}{}^{\lambda\mu(0)}a_{\xi\mu}a_{\nu\lambda}\tau_{(0)}{}^{\xi\nu}$$

Уравнения (3.5) с учетом граничных условий (2.6) легко интегрируются по ζ. Для этого представим (2.6) в виде

$$P^\alpha = \sum_{s=0}^{s=S} h^{*s}P_{(s)}{}^\alpha, \qquad p = \sum_{s=0}^{s=S} h^{*s}p_{(s)} \tag{3.6}$$

Интегрируя уравнения (3.5) по ζ, получим

$$W^{(0)} = w^{(0)}(\xi^1, \xi^2), \qquad u_\alpha{}^{(0)} = v_\alpha{}^{(0)}(\xi^1, \xi^2), \qquad c_{\lambda\beta}\tau_{(0)}{}^{\lambda\beta} = 0, \qquad \tau_{(0)}{}^{3\lambda} = \tau_{(0)}{}^{\lambda 3}$$

$$\nabla_\alpha'\tau_{(0)}{}^{\alpha\beta} = -{}^1/_2P_{(0)}{}^\beta, \qquad Rb_{\alpha\beta}\tau_{(0)}{}^{\alpha\beta} = -{}^1/_2p_{(0)}, \quad \tau^{3\beta}{}_{(0)} = {}^1/_2\zeta P_{(0)}^\beta, \qquad \tau_{(0)}{}^{33} = {}^1/_2\zeta p_{(0)}$$

$$^1/_2R^{-1}[\nabla_\alpha' v_\beta{}^{(0)} + \nabla_\beta' v_\alpha{}^{(0)} + 2Rb_{\alpha\beta}W^{(0)}] = F_{\alpha\beta}{}^{\lambda\mu(0)}a_{\xi\mu}a_{\nu\lambda}\tau_{(0)}{}^{\xi\nu} \tag{3.7}$$

Равенстра (3.7) образуют полную систему дифференциальных уравнений с независимыми переменными ξ^1, ξ^2 относительно неизвестных $\tau_{(0)}^{\lambda\beta}$, $\tau_{(0)}^{3\lambda}$, $w^{(0)}$, $v_\alpha^{(0)}$, не зависящих от ζ. Как видно из (3.7), напряжения $\tau_{(0)}^{\alpha\beta}$ по толщине оболочки остаются постоянными. Такое напряженное состояние тесно связано с безмоментным напряженным состоянием классической теории анизотропных оболочек [5].

Рассмотрим уравнения (2.2) и (2.4) с однородными граничными условиями

$$P_{(s)}{}^\alpha = p_{(s)} = 0 \tag{3.8}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что для этого случая существует еще один вид разложений (3.1) со следующими непротиворечивыми значениями r:

$$\tau^{\alpha\beta} \to r = \varkappa + 1, \qquad (\tau^{\alpha 3}, \tau^{33}) \to r = \varkappa, \qquad (u_\alpha, W) \to r = \varkappa + 2 \tag{3.9}$$

Подставим (3.1), (3.9) в уравнения (2.2), (2.4) и потребуем, чтобы в них обратились в нуль коэффициенты при самой низкой степени h^*. Получим снова уравнения (3.3), а вместо уравнений (3.4) получим следующие уравнения:

$$-R^{-1}\partial W^{(s)}/\partial\zeta + \zeta b_\lambda^\lambda\partial W^{(s-1)}/\partial\zeta - \zeta^2RK\partial W^{(s-2)}/\partial\zeta = F_{33}{}^{33(0)}\tau_{(s-3)}^{33} + \ldots$$
$$\ldots + F_{33}{}^{33(k)}\tau_{(s-3-k)}{}^{33} + \ldots + F_{33}{}^{\lambda\mu(0)}[a_{\xi\mu}a_{\nu\lambda}\tau_{(s-2)}{}^{\xi\nu} - \zeta R(a_{\xi\mu}b_{\nu\lambda} + 2a_{\nu\lambda}b_{\xi\mu})\tau_{(s-3)}{}^{\xi\nu} +$$
$$+ \zeta^2R^2(2b_{\xi\mu}b_{\nu\lambda} + a_{\nu\lambda}b_\xi^\alpha b_{\mu\alpha})\tau_{(s-4)}{}^{\xi\nu} - \zeta^3R^3b_\xi^\alpha b_{\mu\alpha}b_{\nu\lambda}\tau_{(s-5)}{}^{\xi\nu}] + \ldots + F_{33}{}^{\lambda\mu(k)}[\ldots]_{(s-k)} + \ldots$$

$$^1/_2R^{-1}[-\nabla_\alpha' W^{(s-1)} + Rb_\alpha^\lambda u_\lambda{}^{(s-1)} + \partial u_\alpha{}^{(s)}/\partial\zeta - \zeta Rb_\alpha^\lambda\partial u_\lambda{}^{(s-1)}/\partial\zeta] -$$
$$-{}^1/_2\zeta b_\lambda^\lambda[\ldots]_{(s-1)} + {}^1/_2\zeta^2RK[\ldots]_{(s-2)} = F_{\alpha 3}{}^{\lambda 3(0)}[a_{\xi\lambda}(\tau_{(s-3)}{}^{\xi 3} + \tau_{(s-3)}{}^{3\xi}) -$$
$$-\zeta Rb_{\xi\lambda}(2\tau_{(s-4)}{}^{\xi 3} + \tau_{(s-4)}{}^{3\xi}) + \zeta^2R^2b_\xi^\nu b_{\lambda\nu}\tau_{(s-5)}{}^{\xi 3}] + \ldots + F_{\alpha 3}{}^{\lambda 3(k)}[\ldots]_{(s-k)} + \ldots \tag{3.10}$$

$$
\begin{gathered}
{}^1/_2R^{-1}\{\nabla_\alpha' u_\beta^{(s)} + \nabla_\beta' u_\alpha^{(s)} + 2Rb_{\alpha\beta}W^{(s)} - \zeta R\,[b_\beta^\lambda(\nabla_\alpha' u_\lambda^{(s-1)} + Rb_{\lambda\alpha}W^{(s-1)}) + \\
+ b_\alpha^\lambda(\nabla_\beta' u_\lambda^{(s-1)} + Rb_{\lambda\beta}W^{(s-1)})]\} - {}^1/_2\zeta b_\lambda^\lambda\{\ldots\}_{(s-1)} + {}^1/_2\zeta^2 RK\{\ldots\}_{(s-2)} = \\
= F_{\alpha\beta}^{\lambda\mu(0)}\,[a_{\xi\mu}a_{\nu\lambda}\tau_{(s-1)}^{\xi\nu} - \zeta R\,(a_{\xi\mu}b_{\nu\lambda} + 2a_{\nu\lambda}b_{\xi\mu})\,\tau_{(s-2)}^{\xi\nu} + \\
+ \zeta^2R^2(2b_{\xi\mu}b_{\nu\lambda} + a_{\nu\lambda}b_\xi^{\ \alpha}b_{\mu\alpha})\,\tau_{(s-3)}^{\xi\nu} - \zeta^3R^3b_\xi^\eta b_{\mu\eta}b_{\nu\lambda}\tau_{(s-4)}^{\xi\nu}] + \ldots \\
\ldots + F_{\alpha\beta}^{\lambda\mu(k)}[\ldots]_{(s-k)} + \ldots + F_{\alpha\beta}^{33(0)}\tau_{(s-2)}^{33} + \ldots + F_{\alpha\beta}^{33(k)}\tau_{(s-2-k)}^{33} + \ldots
\end{gathered}
$$

Рассмотрим нулевое приближение уравнений (3.3) и нулевое и первое приближения уравнений (3.10)

$$
\begin{gathered}
\nabla_\alpha'\tau_{(0)}^{\ \alpha\beta} + \partial\tau_{(0)}^{3\beta}/\partial\zeta = 0, \qquad Rb_{\alpha\beta}\tau_{(0)}^{\ \alpha\beta} + \partial\tau_{(0)}^{\ 33}/\partial\zeta = 0, \qquad c_{\lambda\beta}\tau_{(0)}^{\ \lambda\beta} = 0 \\
\tau_{(0)}^{\ 3\lambda} = \tau_{(0)}^{\ \lambda 3}, \quad \partial W^{(0)}/\partial\zeta = 0, \quad \partial u_\alpha^{(0)}/\partial\zeta = 0, \qquad \nabla_\beta' u_\alpha^{(0)} + \nabla_\alpha' u_\beta^{(0)} + 2Rb_{\alpha\beta}W^{(0)} = 0 \\
\partial W^{(1)}/\partial\zeta = 0, \qquad \partial u_\alpha^{(1)}/\partial\zeta - \nabla_\alpha' W^{(0)} + Rb_\alpha^{\ \lambda}u_\lambda^{(0)} = 0 \qquad (3.11) \\
{}^1/_2R^{-1}\{\nabla_\alpha' u_\beta^{(1)} + \nabla_\beta' u_\alpha^{(1)} + 2Rb_{\alpha\beta}W^{(1)} - \zeta R\,[b_\beta^\lambda(\nabla_\alpha' u_\lambda^{(0)} + Rb_{\lambda\alpha}W^{(0)}) + \\
+ b_\alpha^\lambda(\nabla_\beta' u_\lambda^{(0)} + Rb_{\lambda\beta}W^{(0)})]\} = F_{\alpha\beta}^{\lambda\mu(0)}a_{\xi\mu}a_{\nu\lambda}\tau_{(0)}^{\ \xi\nu}
\end{gathered}
$$

Из (3.11) видно, что $\tau_{(0)}^{\alpha\beta}$ зависят от ζ линейно, следовательно, $\tau_{(0)}^{\alpha\beta} = \zeta a(\xi^1, \xi^2) + b(\xi^1, \xi^2)$. Интегрируя (3.11) и учитывая условия (3.8), получаем, что $b \equiv 0$, т. е. $\tau_{(0)}^{\alpha\beta}$ являются однородными функциями по ζ. Учитывая это, дальнейшее интегрирование системы (3.11) с учетом однородных граничных условий (3.8) дает

$$
\begin{gathered}
W^{(0)} = w^{(0)}(\xi^1, \xi^2), \qquad u_\alpha^{(0)} = v_\alpha^{(0)}(\xi^1, \xi^2), \qquad \nabla_\beta' v_\alpha^{(0)} + \nabla_\alpha' v_\beta^{(0)} + 2Rb_{\alpha\beta}w^{(0)} = 0 \\
W^{(1)} = w^{(1)}(\xi^1, \xi^2), \qquad u_\alpha^{(1)} = \zeta(\nabla_\alpha' W^{(0)} - Rb_\alpha^{\ \lambda}v_\lambda^{(0)}) \qquad (3.12) \\
{}^1/_2\zeta R^{-1}[\nabla_\alpha'(\nabla_\beta' w^{(0)} - Rb_\beta^\lambda v_\lambda^{(0)}) + \nabla_\beta(\nabla_\alpha' w^{(0)} - Rb_\alpha^\lambda v_\lambda^{(0)}) - \\
- Rb_\beta^\lambda(\nabla_\alpha' u_\lambda^{(0)} + Rb_{\lambda\alpha}w^{(0)}) - Rb_\alpha^{\ \lambda}(\nabla_\beta' u_\alpha^{(0)} + Rb_{\lambda\beta}w^{(0)})] = F_{\alpha\beta}^{\lambda\mu(0)}a_{\xi\mu}a_{\nu\lambda}\tau_{(0)}^{\ \xi\nu} \\
\tau_{(0)}^{\ 3\beta} = {}^1/_2(1-\zeta^2)\,\nabla_\alpha'\tau_{(0)}^{\ \alpha\beta}/\zeta, \qquad \tau_{(0)}^{\ 33} = {}^1/_2(1-\zeta^2)\,Rb_{\alpha\beta}\tau_{(0)}^{\ \alpha\beta}/\zeta \qquad (3.13)
\end{gathered}
$$

По аналогии с изотропными оболочками, нетрудно проверить, что уравнения (3.12) и (3.13) определяют напряженное состояние, тесно связанное с чисто моментным напряженным состоянием классической теории анизотропных оболочек.

Важно также отметить, что в работах С. А. Амбарцумяна и других авторов [5] напряжения $\tau^{3\alpha}$ в форме (3.13) и в более общей форме брались в качестве гипотезы. Здесь это получается как результат асимптотического интегрирования уравнений теории упругости, что является доказательством правильности этих допущений (в рамках точности этих теорий).

4. Напряженные состояния с большим показателем изменяемости. Рассмотрим напряженные и деформированные состояния, которые быстро меняются как по переменной ϑ^3, так и по переменным ϑ^1 и ϑ^2. Для описания этих состояний применим замену независимых переменных по формулам

$$
\vartheta^\alpha = \xi^\alpha R / K_{(\alpha)}, \qquad \vartheta^3 = h\zeta \qquad (4.1)
$$

и будем считать, что по (ξ^1, ξ^2, ζ) изменяемость напряженного и деформированного состояния невелика; здесь $K_{(\alpha)}$ — большое, по сравнению с единицей, безразмерное число, с увеличением которого увеличивается и изменяемость рассматриваемого напряженного и деформированного состояния. Следуя [6], примем $K_{(\alpha)} = (h^*)^{-t\alpha}$, $t_\alpha = p_\alpha / q_\alpha$, здесь t_α — показатель изменяемости в направлении ϑ^α — линии, p_α, q_α — целые положительные числа. Произведя в (1.12) замену (4.1), получим

$$
\begin{gathered}
R\nabla_\lambda A^{\alpha\beta} = K_{(\lambda)}\nabla_\lambda^* A^{\alpha\beta}, \qquad R\nabla_\lambda A_\alpha = K_{(\lambda)}\Delta_\lambda^* A_\alpha, \ldots \\
\nabla_\lambda^* A^{\alpha\beta} = \partial A^{\alpha\beta}/\partial\xi^\lambda + (\Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha}A^{\mu\beta} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\beta}A^{\alpha\mu})\,R / K_{(\lambda)} \qquad (4.2) \\
\nabla_\lambda^* A_\alpha = \partial A_\alpha/\partial\xi^\lambda - \Gamma_{\alpha\lambda}^{\mu}A_\mu R / K_{(\lambda)}
\end{gathered}
$$

Учитывая (4.1), (4.2), уравнения (1.11), (1.9) и (1.22) будут преобразованы к виду

$$h^*K_{(\alpha)}\nabla_\alpha{}^*\tau^{\alpha\beta} - h^*Rb_\alpha{}^\beta\tau^{\alpha 3} + \frac{\partial\tau^{3\beta}}{\partial\zeta} = 0, \qquad h^*K_{(\alpha)}\nabla_\alpha{}^*\tau^{\alpha 3} + h^*Rb_{\alpha\beta}\tau^{\alpha\beta} + \frac{\partial\tau^{33}}{\partial\zeta} = 0$$

$$c_{\lambda\beta}(\tau^{\lambda\beta} - h^*\zeta Rb_\alpha{}^\lambda\tau^{\alpha\beta}) = 0, \qquad \tau^{3\lambda} = \tau^{\lambda 3} - h^*\zeta Rb_\mu^\lambda\tau^{\mu 3}$$

$$-\frac{\vartheta}{R}\frac{\partial W}{\partial\zeta} = h^*\Big[\sum_{s=0}^{s=S} h^{*s}F_{33}^{33(s)}\tau^{33} + \sum_{s=0}^{s=S} h^{*(s)}F_{33}^{\lambda\mu\,(s)}g_{\xi\mu}\tau^{\xi\nu}(a_{\nu\lambda} - h^*\zeta Rb_{\nu\lambda})\Big]$$

$$\tfrac{1}{2}R^{-1}\vartheta(-h^*K_{(\alpha)}\nabla_\alpha{}^*W + h^*Rb_\alpha^\lambda u_\lambda + \partial u_\alpha/\partial\zeta - h^*R\zeta b_\alpha^\lambda\partial u_\lambda/\partial\zeta) = \tag{4.3}$$

$$= h^*\Big[\sum_{s=0}^{s=S} h^{*s}F_{\alpha 3}^{\lambda 3\,(s)}\tau^{\xi 3}g_{\xi\lambda} + \sum_{s=0}^{s=S} h^{*s}F_{\alpha 3}^{3\lambda\,(s)}\tau^{3\xi}(a_{\xi\lambda} - h^*\zeta Rb_{\xi\lambda})\Big]$$

$$\tfrac{1}{2}R^{-1}\vartheta\{K_{(\beta)}\nabla_\beta{}^*u_\alpha + K_{(\alpha)}\nabla_\alpha{}^*u_\beta + 2b_{\alpha\beta}RW - h^*R\zeta[b_\beta^\lambda(K_\alpha\nabla_\alpha{}^*u_\lambda + Rb_{\lambda\alpha}W) +$$

$$+ b_\alpha^\lambda(K_{(\beta)}\nabla_\beta{}^*u_\lambda + Rb_{\lambda\beta}W)]\} = \sum_{s=0}^{s=S} h^{*s}F_{\alpha\beta}^{33\,(s)}\tau^{33} + \sum_{s=0}^{s=S} h^{*s}F_{\alpha\beta}^{\lambda\mu\,(s)}g_{\xi\mu}\tau^{\xi\nu}(a_{\nu\lambda} - h^*R\zeta b_{\nu\lambda})$$

Рассмотрим напряженное состояние, имеющее одинаковый показатель изменяемости в направлении обеих координатных линий. При этом будем считать, что показатель изменяемости ненулевой, т. е.

$$K_{(1)} = K_{(2)} = K = h^{*(-t)}, \quad t_{(1)} = t_{(2)} = t = p/q$$

Обозначим $\eta = (h^*)^{-1/q}$. Отсюда

$$h^* = \eta^{-q}, \qquad K = \eta^p \tag{4.4}$$

Рассмотрим случай с большой изменяемостью, т. е. когда $t > 1/2$ $(2p > q)$. Примем, что $p < q$ $(t < 1)$. Решение системы (4.3) будем искать в виде

$$Q = \eta^r\sum_{s=0}^{s=S}\eta^{-s}Q_{(s)}, \qquad V = \eta^r\sum_{s=0}^{s=S}\eta^{-s}V^{(s)} \tag{4.5}$$

Здесь Q — любое из напряжений, V — любое из перемещений согласно (3.1). Для этого случая существуют два варианта непротиворечивых значений r. Первый из них имеет вид

$$\begin{aligned}&\tau^{\alpha\beta}\to r = \varkappa + q, \quad \tau^{\alpha 3}\to r = \varkappa + p, \quad \tau^{33}\to r = \varkappa + 2p - q,\\ &u_\alpha\to r = \varkappa + q - p, \qquad W\to r = \varkappa + 2q - 2p\end{aligned} \tag{4.6}$$

Значениям (4.6) соответствует следующая система уравнений:

$$\partial_\alpha\tau_{(s)}{}^{\alpha\beta} + \partial\tau_{(s)}{}^{3\beta}/\partial\zeta - Rb_\alpha^\beta\tau_{(s-q)}{}^{\alpha 3} + R[\Gamma_{\mu\alpha}^\alpha\tau_{(s-p)}{}^{\mu\beta} + \Gamma_{\mu\alpha}^\beta\tau_{(s-p)}{}^{\mu\alpha}] = 0 \tag{4.7}$$

$$\partial_\alpha\tau_{(s)}{}^{\alpha 3} + \partial\tau_{(s)}{}^{33}/\partial\zeta + R\Gamma_{\mu\alpha}^\alpha\tau_{(s-p)}{}^{\mu 3} + Rb_{\alpha\beta}\tau_{(q-2p+s)}^{\alpha\beta} = 0$$

$$c_{\lambda\beta}[\tau_{(s)}{}^{\lambda\beta} - \zeta Rb_\alpha^\lambda\tau_{(s-q)}{}^{\alpha\beta}] = 0, \qquad \tau_{(s)}{}^{3\lambda} = \tau_{(s)}{}^{\lambda 3} - \zeta Rb_\mu^\lambda\tau_{(s-q)}{}^{\mu 3}$$

$$-R^{-1}\partial W^{(s)}/\partial\zeta + \zeta b_\lambda^\lambda\partial W^{(s-q)}/\partial\zeta - \zeta^2RK\partial W^{(s-2q)}/\partial\zeta = F_{33}^{33\,(0)}\tau_{(s+4p-4q)}^{33} + \ldots$$

$$\ldots + F_{33}^{33\,(k)}\tau_{(s+4p-4q-kq)}^{33} + \ldots + F_{33}^{\lambda\mu\,(0)}[a_{\xi\mu}a_{\nu\lambda}\tau_{(s+2p-2q)}^{\xi\nu} -$$

$$-R\zeta(a_{\xi\mu}b_{\nu\lambda} + 2a_{\nu\lambda}b_{\xi\mu})\tau_{(s+2p-3q)}^{\xi\nu}] + R^2\zeta^2(b_{\xi\mu}b_{\nu\lambda} + a_{\nu\lambda}b_\xi^\alpha b_{\alpha\mu})\tau_{(s+2p-4q)}^{\xi\nu} -$$

$$-R^3\zeta^3b_\xi{}^\alpha b_{\alpha\mu}b_{\nu\lambda}\tau_{(s+2p-5q)}^{\xi\nu}] + \ldots + F_{33}^{\lambda\mu\,(k)}[\cdots]_{(s-kq)} + \ldots$$

$$\tfrac{1}{2}R^{-1}[-\partial_\alpha W^{(s)} + \partial u_\alpha{}^{(s)}/\partial\zeta + Rb_\alpha^\lambda u_\lambda{}^{(s-q)} - R\zeta b_\alpha^\lambda\partial u_\lambda{}^{(s-q)}/\partial\zeta] - \tfrac{1}{2}\zeta b_\nu^\nu[\cdots]_{(s-q)} +$$

$$+\tfrac{1}{2}\zeta^2RK[\cdots]_{(s-2q)} = F_{\alpha 3}^{\lambda 3\,(0)}[a_{\xi\lambda}\tau_{(s+2p-3q)}^{\xi 3} - 2\zeta Rb_{\xi\lambda}\tau_{(s+2p-3q)}^{\xi 3} +$$

$$+\zeta^2R^2b_\xi^\mu b_{\lambda\mu}\tau_{(s+2p-4q)}^{\xi 3}] + F_{\alpha 3}^{3\lambda\,(0)}[a_{\xi\lambda}\tau_{(s+2p-2q)}^{3\xi} - \zeta Rb_{\xi\lambda}\tau_{(s+2p-3q)}^{3\xi}] + \ldots$$

$$\ldots + F_{\alpha 3}^{3\lambda\,(k)}[\cdots]_{(s-kq)} + \ldots$$

$$\begin{aligned}
&{}^1/_2R^{-1}\{\partial_\beta u_\alpha{}^{(s)}+\partial_\alpha u_\beta{}^{(s)}-2R\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}u_\mu{}^{(s-p)}+2Rb_{\alpha\beta}W^{(s+q-2p)}-\\
&\quad -R\zeta\,[b_\beta^\lambda(\partial_\alpha u_\lambda{}^{(s-q)}-R\Gamma_{\alpha\lambda}^{\mu}u_\mu{}^{(s-p-q)}+Rb_{\lambda\alpha}W^{(s-2p)})+b_\alpha^\lambda(\partial_\beta u_\lambda{}^{(s-q)}-\\
&\quad -R\Gamma_{\beta\lambda}^{\mu}u_\mu{}^{(s-p-q)}+Rb_{\lambda\beta}W^{(s-2p)})]\}-{}^1/_2\zeta b_\lambda^\lambda\{\cdots\}_{(s-q)}+{}^1/_2\zeta^2RK\,\{\cdots\}_{(s-2q)}=\\
&\quad =F_{\alpha\beta}^{\lambda\mu\,(0)}\,[a_{\xi\mu}a_{\nu\lambda}\tau_{(s)}{}^{\xi\nu}-\zeta R\,(a_{\xi\mu}b_{\nu\lambda}+2a_{\nu\lambda}b_{\xi\mu})\,\tau_{(s-q)}{}^{\xi\nu}+\zeta^2R^2\,(a_{\nu\lambda}b_\xi^\alpha b_{\alpha\mu}+\\
&\quad +2b_{\xi\mu}b_{\nu\lambda})\,\tau_{(s-2q)}{}^{\xi\nu}-R^3\zeta^3b_\xi^\alpha b_{\alpha\mu}b_{\nu\lambda}\tau_{(s-3q)}{}^{\xi\nu}]+\ldots+F_{\alpha\beta}^{\lambda\mu\,(k)}\,[\cdots]_{(s-kq)}+\ldots\\
&\quad \ldots+F_{\alpha\beta}^{33\,(0)}\tau^{33}_{(s+2p-2q)}+\ldots+F_{\alpha\beta}^{33\,(k)}\tau^{33}_{(s+2p-2q-kq)}+\ldots
\end{aligned}$$

Другая непротиворечивая комбинация значений r для этого случая будет

$$\begin{aligned}
&\tau^{\alpha\beta}\to r=\varkappa+q,\qquad \tau^{\alpha 3}\to r=\varkappa+p,\qquad \tau^{33}\to r=\varkappa+2p-q\\
&u_\alpha\to r=\varkappa+q-p,\qquad W\to\varkappa<r<\varkappa+2q-2p
\end{aligned}\tag{4.8}$$

Ей соответствует система уравнений, головная система которой будет иметь вид (ввиду громоздкости этой системы приводим только головную систему) (4.9)

$$\begin{aligned}
&\partial_\alpha\tau_{(0)}{}^{\alpha\beta}+\partial\tau_{(0)}{}^{3\beta}/\partial\zeta=0,\quad \partial_\alpha\tau_{(0)}{}^{\alpha 3}+\partial\tau_{(0)}{}^{33}/\partial\zeta=0,\quad c_{\lambda\beta}\tau_{(0)}{}^{\lambda\beta}=0,\quad \tau_{(0)}{}^{3\lambda}=\tau_{(0)}{}^{\lambda 3}\\
&\partial W^{(0)}/\partial\zeta=0,\quad \partial u_\alpha{}^{(0)}/\partial\zeta=0,\quad {}^1/_2R^{-1}\,[\partial_\beta u_\alpha{}^{(0)}+\partial_\alpha u_\beta{}^{(0)}]=F_{\alpha\beta}^{\lambda\mu\,(0)}a_{\xi\mu}a_{\nu\lambda}\tau_{(0)}{}^{\xi\nu}
\end{aligned}$$

Для случая $p=q$ непротиворечивая комбинация значений (4.6) сохраняется, однако в этом случае получаем другую систему уравнений (4.10)

$$\partial_\alpha\tau_{(s)}{}^{\alpha\beta}+\partial\tau_{(s)}{}^{3\beta}/\partial\zeta+R\,[\Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha}\tau_{(s-p)}{}^{\mu\beta}+\Gamma_{\mu\alpha}^{\beta}\tau_{(s-p)}{}^{\mu\alpha}]-Rb_\alpha^\beta\tau_{(s-p)}{}^{\alpha 3}=0$$

$$\partial_\alpha\tau_{(s)}{}^{\alpha 3}+\partial\tau_{(s)}{}^{33}/\partial\zeta+R\Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha}\tau_{(s-p)}{}^{\mu 3}+Rb_{\alpha\beta}\tau_{(s-p)}{}^{\alpha\beta}=0$$

$$c_{\lambda\beta}\,[\tau_{(s)}{}^{\lambda\beta}-\zeta Rb_\alpha^\lambda\tau_{(s-p)}{}^{\alpha\beta}]=0,\qquad \tau_{(s)}{}^{3\lambda}=\tau_{(s)}{}^{\lambda 3}-\zeta Rb_\mu^\lambda\tau_{(s-p)}{}^{\mu 3}$$

$$\begin{aligned}
&-R^{-1}\partial W^{(s)}/\partial\zeta+\zeta b_\lambda^\lambda\partial W^{(s-p)}/\partial\zeta-\zeta^2RK\partial W^{(s-2p)}/\partial\zeta=F_{33}^{33\,(0)}\tau_{(s)}{}^{33}+\ldots\\
&\ldots+F_{33}^{33\,(k)}\tau^{33}_{(s-kp)}+\ldots+F_{33}^{\lambda\mu\,(0)}\,[a_{\xi\mu}a_{\nu\lambda}\tau_{(s)}{}^{\xi\nu}-\zeta R\,(a_{\xi\mu}b_{\nu\lambda}+2a_{\nu\lambda}b_{\xi\mu})\,\tau^{\xi\nu}_{(s-p)}+\\
&+R^2\zeta^2\,(b_{\xi\mu}b_{\nu\lambda}+a_{\nu\lambda}b_\xi^\alpha b_{\alpha\mu})\,\tau_{(s-2p)}{}^{\xi\nu}-R^3\zeta^3b_\xi^\alpha b_{\alpha\mu}b_{\nu\lambda}\tau_{(s-3p)}{}^{\xi\nu}]+\ldots\\
&\ldots+F_{33}^{\lambda\mu\,(k)}\,[\cdots]_{(s-kp)}+\ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&{}^1/_2R^{-1}\,[-\partial_\alpha W^{(s)}+\partial u_\alpha{}^{(s)}/\partial\zeta+Rb_\alpha^\lambda u_\lambda{}^{(s-p)}-R\zeta b_\alpha^\lambda\partial u_\lambda{}^{(s-p)}/\partial\zeta]-\\
&\quad -{}^1/_2\zeta b_\nu^\nu\,[\cdots]_{(s-p)}+{}^1/_2\zeta^2RK\,[\cdots]_{(s-2p)}=F_{\alpha 3}^{\lambda 3\,(0)}\,[a_{\xi\lambda}\tau_{(s)}{}^{\xi 3}-2\zeta Rb_{\xi\lambda}\tau_{(s-p)}{}^{\xi 3}+\\
&\quad +\zeta^2R^2b_\xi^\mu b_{\lambda\mu}\tau_{(s-2p)}{}^{\xi 3}]+F_{\alpha 3}^{3\lambda\,(0)}\,[a_{\xi\lambda}\tau_{(s)}{}^{3\xi}-\zeta Rb_{\xi\lambda}\tau_{(s-p)}{}^{3\xi}]+\ldots\\
&\quad +\ldots F_{\alpha 3}^{\lambda 3\,(k)}\,[\cdots]_{(s-kp)}+\ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&{}^1/_2R^{-1}\,\{\partial_\beta u_\alpha{}^{(s)}+\partial_\alpha u_\beta{}^{(s)}-2R\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}u_\mu{}^{(s-p)}+2Rb_{\alpha\beta}W^{(s-p)}-R\zeta\,[b_\beta^\lambda\,(\partial_\lambda u_\lambda{}^{(s-p)}-\\
&\quad -R\Gamma_{\alpha\lambda}^{\mu}u_\mu{}^{(s-2p)}+Rb_{\lambda\alpha}W^{(s-2p)})+b_\alpha^\lambda\,(\partial_\beta u_\lambda{}^{(s-p)}-R\Gamma_{\beta\lambda}^{\mu}u_\mu{}^{(s-2p)}+Rb_{\lambda\beta}W^{(s-2p)})]\}-\\
&\quad -{}^1/_2\zeta b_\lambda^\lambda\,\{\cdots\}_{(s-p)}+{}^1/_2\zeta^2RK\,\{\cdots\}_{(s-2p)}=F_{\alpha\beta}^{\lambda\mu\,(0)}\,[a_{\xi\mu}a_{\nu\lambda}\tau^{\xi\nu}_{(s)}-\\
&\quad -\zeta R\,(a_{\xi\mu}b_{\nu\lambda}+2a_{\nu\lambda}b_{\xi\mu})\,\tau_{(s-p)}{}^{\xi\nu}+\zeta^2R^2\,(a_{\nu\lambda}b_\xi^\alpha b_{\alpha\mu}+2b_{\xi\mu}b_{\nu\lambda})\,\tau_{(s-2p)}{}^{\xi\nu}-\\
&\quad -R^3\zeta^3b_\xi^\alpha b_{\alpha\mu}b_{\nu\lambda}\tau_{(s-3p)}{}^{\xi\nu}]+\ldots+F_{\alpha\beta}^{\lambda\mu\,(k)}\,[\cdots]_{(s-kp)}+\ldots+F_{\alpha\beta}^{33\,(0)}\tau_{(s)}{}^{33}+\ldots\\
&\quad \ldots+F_{\alpha\beta}^{33\,(k)}\tau_{(s-kp)}{}^{33}
\end{aligned}$$

Нетрудно показать, что полученными тут уравнениями (4.7), (4.9) и (4.10) описываются напряженные состояния при первом приближении, эквивалентные классической теории напряженных состояний с большим показателем изменяемости.

5. Вспомогательный итерационный процесс. Рассмотрим напряженные состояния с неодинаковой изменяемостью в направлении линий ϑ^1 и ϑ^2. Для определенности будем считать, что наибольшая изменяемость имеет место вдоль линий ϑ^1. Примем, что $K_{(1)} = h^{*-1} = \eta$, $K_{(2)} = \eta^0$.

Покажем, что в этом случае существуют напряженные состояния, принципиально отличные от рассмотренных выше. Применив замену переменных по формулам

$$\vartheta^1 = Rh^*\xi^1, \qquad \vartheta^2 = R\xi^2, \qquad \vartheta^3 = h\zeta \tag{5.1}$$

будем искать решения уравнений (4.3) в виде (4.5). Тогда для r можно указать две непротиворечивые комбинации значений. Первой из них будет

$$\begin{gathered}(\tau^{11}, \tau^{22}, \tau^{33}, \tau^{31}, \tau^{13}) \to r = \varkappa - 1, \quad (\tau^{12}, \tau^{21}, \tau^{23}, \tau^{32}) \to r = \varkappa \\ (u_1, W) \to r = \varkappa - 2, \quad u_2 \to r = \varkappa - 1\end{gathered} \tag{5.2}$$

Этим значениям r будет соответствовать следующая система уравнений:

$$\begin{aligned}&\partial_1\tau_{(s)}^{11} + \partial_2\tau_{(s)}^{21} + R\,[(2\Gamma_{11}^{\,1} + \Gamma_{12}^{\,2})\,{\tau_{(s-1)}}^{11} + \Gamma_{22}^{\,1}{\tau_{(s-1)}}^{22}] + R\,[(2\Gamma_{12}^{\,1} + \Gamma_{22}^{\,2})\,\tau_{(s)}^{21} + \\ &\qquad + \Gamma_{21}^{\,1}\tau_{(s)}^{12}] - Rb_1^1\tau_{(s-1)}^{13} - Rb_2^1\tau_{(s)}^{23} + \partial{\tau_{(s)}}^{31}/\,\partial\zeta = 0\end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}&\partial_1{\tau_{(s)}}^{12} + \partial_2{\tau_{(s-2)}}^{22} + R\,[(\Gamma_{11}^{\,1} + 2\Gamma_{21}^{\,2})\,{\tau_{(s-1)}}^{12} + \Gamma_{12}^{\,2}{\tau_{(s-1)}}^{21} + \\ &\qquad + {\tau_{(s-2)}}^{22}(\Gamma_{21}^{\,2} + 2\Gamma_{22}^{\,2}) + \Gamma_{11}^{\,2}\tau_{(s-2)}^{11}] - Rb_1^2\tau_{(s-2)}^{13} - Rb_2^2\tau_{(s-1)}^{23} + \partial{\tau_{(s)}}^{32}/\,\partial\zeta = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\partial_1{\tau_{(s)}}^{13} + \partial_2{\tau_{(s)}}^{23} + R\,(\Gamma_{11}^{\,1} + \Gamma_{12}^{\,2})\,{\tau_{(s-1)}}^{13} + R{\tau_{(s)}}^{23}(\Gamma_{21}^{\,1} + \Gamma_{22}^{\,2}) + \\ &\qquad + R\,(b_{11}{\tau_{(s-1)}}^{11} + b_{22}{\tau_{(s-1)}}^{22}) + R\,(b_{12}{\tau_{(s)}}^{12} + b_{21}{\tau_{(s)}}^{21}) + \partial{\tau_{(s)}}^{33}/\,\partial\zeta = 0\end{aligned}$$

$$c_{12}{\tau_{(s)}}^{12} + c_{21}{\tau_{(s)}}^{21} - \zeta R\,[c_{12}(b_1^1\tau_{(s-1)}^{12} + b_2^1\tau_{(s-2)}^{22}) + c_{21}(b_1^2\tau_{(s-1)}^{11} + b_2^2\tau_{(s-1)}^{21})] = 0$$

$$\tau_{(s)}^{31} = \tau_{(s)}^{13} - \zeta R\,[b_1^1\tau_{(s-1)}^{13} + b_2^1\tau_{(s)}^{23}], \qquad \tau_{(s)}^{32} = \tau_{(s)}^{23} - \zeta R\,[b_1^2\tau_{(s-2)}^{13} + b_2^2\tau_{(s-1)}^{23}]$$

$$\begin{aligned}&-R^{-1}\partial W^{(s)}/\,\partial\zeta + \zeta b_\lambda^\lambda\partial W^{(s-1)}/\,\partial\zeta - \zeta^2RK\partial W^{(s-2)}/\,\partial\zeta = F_{33}^{\,33\,(0)}\tau_{(s)}^{33} + \ldots \\ &\quad \ldots + F_{33}^{\,33\,(k)}\tau_{(s-k)}^{33} + \ldots + F_{33}^{\,\lambda\mu\,(0)}\,[a_{\nu\mu}a_{\nu\lambda}{\tau_{(s)}}^{\nu\nu} - \zeta R\,(a_{\nu\mu}b_{\nu\lambda} + 2a_{\nu\lambda}b_{\nu\mu})\,{\tau_{(s-1)}}^{\nu\nu} + \\ &\qquad + \zeta^2R^2\,(a_{\nu\lambda}b_\nu^\alpha b_{\alpha\mu} + 2b_{\nu\mu}b_{\nu\lambda})\,{\tau_{(s-2)}}^{\nu\nu} - R^3\zeta^3b_\nu^\alpha b_{\alpha\mu}b_{\nu\lambda}{\tau_{(s-3)}}^{\nu\nu} - \\ &\qquad - \zeta R\,(a_{\nu\mu}b_{\eta\lambda} + 2a_{\eta\lambda}b_{\nu\mu})\,{\tau_{(s)}}^{\nu\eta} + R^2\zeta^2\,(a_{\eta\lambda}b_\nu^\alpha b_{\alpha\mu} + 2b_{\nu\mu}b_{\eta\lambda})\,{\tau_{(s-1)}}^{\nu\eta} - \\ &\qquad - R^3\zeta^3b_\nu^\alpha b_{\alpha\mu}b_{\eta\lambda}\tau_{(s-2)}^{\nu\eta}] + \ldots + F_{33}^{\,\lambda\mu\,(k)}\,[\cdots]_{(s-k)} + \ldots \qquad (\eta \neq \nu)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&{}^1\!/_2R^{-1}\,[-\partial_1W^{(s)} + Rb_1^2{u_2}^{(s)} + \partial{u_1}^{(s)}/\,\partial\zeta + Rb_1^1{u_1}^{(s-1)} - \zeta R\,(b_1^1\partial{u_1}^{(s-1)}/\,\partial\zeta + \\ &\qquad + b_1^2\partial{u_2}^{(s)}/\,\partial\zeta)] - {}^1\!/_2\zeta b_\lambda^\lambda\,[\cdots]_{(s-1)} + {}^1\!/_2\zeta^2RK\,[\cdots]_{(s-2)} = F_{13}^{\,\lambda 3\,(0)}\,[a_{1\lambda}{\tau_{(s)}}^{13} - \\ &\qquad - 2\zeta Rb_{1\lambda}(\tau_{(s)}^{23} + \tau_{(s-1)}^{13}) + \zeta^2R^2b_1^\alpha b_{\alpha\lambda}(\tau_{(s-2)}^{13} + \tau_{(s-1)}^{23}) - \zeta Rb_{2\lambda}{\tau_{(s)}}^{32}] + \\ &\qquad + F_{13}^{\,3\lambda\,(0)}\,[a_{1\lambda}\tau_{(s)}^{31} - \zeta Rb_{1\lambda}\tau_{(s-1)}^{31}] + \ldots + F_{13}^{\,\lambda 3\,(k)}\,[\cdots]_{(s-k)} + \ldots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&{}^1\!/_2R^{-1}\,[\partial u_2^{(s)}/\,\partial\zeta - \partial_2W^{(s-2)} + Rb_2^1{u_1}^{(s-2)} + Rb_2^2{u_2}^{(s-1)} - \\ &\qquad - R\zeta\,(b_2^1\partial u_1^{(s-2)}/\,\partial\zeta + b_2^2\partial u_2^{(s-1)}/\,\partial\zeta)] - {}^1\!/_2\zeta b_\lambda^\lambda\,[\cdots]_{(s-1)} + {}^1\!/_2\zeta^2RK\,[\cdots]_{(s-2)} = \\ &\qquad = F_{23}^{\,\lambda 3\,(0)}\,[a_{1\lambda}\tau_{(s-1)}^{13} - 2\zeta R\,(b_{1\lambda}\tau_{(s-2)}^{13} + b_{2\lambda}\tau_{(s-1)}^{23}) + a_{2\lambda}\tau_{(s)}^{23} + \\ &\qquad + \zeta^2R^2\,(b_1^\alpha b_{\alpha\lambda}\tau_{(s-3)}^{13} + b_2^\alpha b_{\alpha\lambda}\tau_{(s-2)}^{23})] + F_{23}^{\,3\lambda\,(0)}\,[a_{1\lambda}\tau_{(s-1)}^{31} - \\ &\qquad - \zeta R\,(b_{1\lambda}\tau_{(s-2)}^{31} + b_{2\lambda}\tau_{(s-2)}^{32}) + a_{2\lambda}\tau_{(s-1)}^{32}] + \ldots + F_{23}^{\,\lambda 3\,(k)}\,[\cdots]_{(s-k)} + \ldots\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&R^{-1}\{\partial_1 u_1^{(s)} - R(\Gamma_{11}^1 u_1^{(s-1)} + \Gamma_{11}^2 u_2^{(s)}) + b_{11}RW^{(s-1)} - \zeta R\,[b_1^1(\partial_1 u_1^{(s-1)} - R(\Gamma_{11}^1 u_1^{(s-2)} + {}\\
&+ \Gamma_{11}^2 u_2^{(s-1)}) + Rb_{11}W^{(s-2)}) + b_1^2(\partial_1 u_2^{(s)} - R(\Gamma_{12}^1 u_1^{(s-2)} + \Gamma_{12}^2 u_2^{(s-1)}) + Rb_{21}W^{(s-2)})]\} - {}\\
&\quad - \zeta b_\lambda^\lambda\{\cdots\}_{(s-1)} + \zeta^2 RK\{\cdots\}_{(s-2)} = F_{11}^{33\,(0)}\tau_{(s)}^{33} + \ldots + F_{11}^{33\,(k)}\tau_{(s-k)}^{33} + \ldots\\
&\quad \ldots + F_{11}^{\lambda\mu\,(0)}\,[a_{\nu\lambda}a_{\nu\mu}\tau_{(s)}^{\nu\nu} - \zeta R\,(a_{\nu\mu}b_{\nu\lambda} + 2a_{\nu\lambda}b_{\nu\mu})\,\tau_{(s-1)}^{\nu\nu} + {}\\
&+ \zeta^2R^2(2b_{\nu\lambda}b_{\nu\mu} + a_{\nu\lambda}b_\nu^\xi b_{\mu\xi})\,\tau_{(s-2)}^{\nu\nu} - \zeta^3R^3 b_{\nu\lambda}b_\nu^\xi b_{\mu\xi}\tau_{(s-3)}^{\nu\nu} - \zeta R\,(a_{\eta\mu}b_{\nu\lambda} + 2a_{\nu\lambda}b_{\eta\mu})\,\tau_{(s)}^{\eta\nu} + {}\\
&+ \zeta^2R^2(2b_{\nu\lambda}b_{\eta\mu} + a_{\nu\lambda}b_\xi b_{\mu\xi})\,\tau_{(s-1)}^{\eta\nu} - \zeta^3R^3 b_{\nu\lambda}b_\eta^\xi b_{\mu\xi}\tau_{(s-2)}^{\eta\nu}] + \ldots + F_{11}^{\lambda\mu\,(k)}\,[\cdots]_{(s-k)} + \ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&{}^1/_2 R^{-1}\{\partial_2 u_1^{(s-2)} - 2R\,(\Gamma_{12}^1 u_1^{(s-2)} + \Gamma_{12}^2 u_2^{(s-1)}) + \partial_1 u_2^{(s)} + 2b_{12}RW^{(s-2)} - {}\\
&\quad - \zeta R\,[b_2^1(\partial_1 u_1^{(s-2)} - R\,(\Gamma_{11}^1 u_1^{(s-3)} + \Gamma_{11}^2 u_2^{(s-2)}) + Rb_{11}W^{(s-3)}) + {}\\
&\quad + b_2^2(\partial_1 u_2^{(s-1)} - R\,(\Gamma_{12}^1 u_1^{(s-3)} + \Gamma_{12}^2 u_2^{(s-2)}) + Rb_{21}W^{(s-3)}) + {}\\
&\quad + b_1^1(\partial_2 u_1^{(s-3)} - R\,(\Gamma_{12}^1 u_1^{(s-3)} + \Gamma_{12}^2 u_2^{(s-2)}) + Rb_{12}W^{(s-3)}) + {}\\
&+ b_1^2(\partial_2 u_2^{(s-1)} - R\,(\Gamma_{22}^1 u_1^{(s-3)} + \Gamma_{22}^2 u_2^{(s-3)}) + Rb_{22}W^{(s-3)})]\} - {}^1/_2\zeta b_\lambda^\lambda\{\cdots\}_{(s-1)} + {}\\
&\quad + {}^1/_2\zeta^2 RK\{\cdots\}_{(s-2)} = F_{12}^{33\,(0)}\tau_{(s-1)}^{33} + \ldots + F_{12}^{33\,(k)}\tau_{(s-k-1)}^{33} + \ldots\\
&\ldots + F_{12}^{\lambda\mu\,(0)}\,[a_{\nu\lambda}a_{\nu\mu}\tau_{(s-1)}^{\nu\nu} - \zeta R\,(a_{\nu\mu}b_{\nu\lambda} + 2a_{\nu\lambda}b_{\nu\mu})\,\tau_{(s-2)}^{\nu\nu} + \zeta^2R^2(2b_{\nu\lambda}b_{\nu\mu} + a_{\nu\lambda}b_\nu^\xi b_{\mu\xi})\,\tau_{(s-3)}^{\nu\nu} - {}\\
&\quad - \zeta^3R^3 b_{\nu\lambda}b_\nu^\xi b_{\mu\xi}\tau_{(s-4)}^{\nu\nu} + a_{\nu\lambda}a_{\eta\mu}\tau_{(s)}^{\eta\nu} - \zeta R\,(a_{\eta\mu}b_{\nu\lambda} + 2a_{\nu\lambda}b_{\eta\mu})\,\tau_{(s-1)}^{\eta\nu} + {}\\
&+ \zeta^2R^2(2b_{\nu\lambda}b_{\eta\mu} + a_{\nu\lambda}b_\eta^\xi b_{\mu\xi})\,\tau_{(s-2)}^{\eta\nu} - \zeta^3R^3 b_{\nu\lambda}b_\eta^\xi b_{\mu\xi}\tau_{(s-3)}^{\eta\nu}] + \ldots + F_{12}^{\lambda\mu\,(k)}\,[\cdots]_{(s-k)} + \ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&R^{-1}\{\partial_2 u_2^{(s)} - R\,(\Gamma_{22}^1 u_1^{(s-1)} + \Gamma_{22}^2 u_2^{(s)}) + b_{22}RW^{(s-1)} - R\zeta\,[b_2^1(\partial_2 u_1^{(s-2)} + {}\\
&\quad + R\,(\Gamma_{12}^1 u_1^{(s-2)} + \Gamma_{12}^2 u_2^{(s-1)}) + Rb_{12}W^{(s-2)}) + b_2^2(\partial_2 u_2^{(s-1)} + R\,(\Gamma_{22}^1 u_1^{(s-2)} + {}\\
&+ \Gamma_{22}^2 u_2^{(s-1)}) + Rb_{22}W^{(s-2)})] - \zeta b_\lambda^\lambda\{\cdots\}_{(s-1)} + \zeta^2 RK\{\cdots\}_{(s-2)} = F_{22}^{33\,(0)}\tau_{(s)}^{33} + \ldots\\
&\ldots + F_{22}^{33\,(k)}\tau_{(s-k)}^{33} + \ldots + F_{22}^{\lambda\mu\,(0)}\,[a_{\nu\lambda}a_{\nu\mu}\tau_{(s)}^{\nu\nu} - \zeta R\,(a_{\nu\mu}b_{\nu\lambda} + 2a_{\nu\lambda}b_{\nu\mu})\,\tau_{(s-1)}^{\nu\nu} + {}\\
&+ \zeta^2R^2(2b_{\nu\lambda}b_{\nu\mu} + a_{\nu\lambda}b_\nu^\xi b_{\mu\xi})\,\tau_{(s-2)}^{\nu\nu} - \zeta^3R^3 b_{\nu\lambda}b_\nu^\xi b_{\mu\xi}\tau_{(s-3)}^{\nu\nu} - \zeta R\,(a_{\eta\mu}b_{\nu\lambda} + 2a_{\nu\lambda}b_{\eta\mu})\,\tau_{(s)}^{\eta\nu} + {}\\
&+ \zeta^2R^2(2b_{\nu\lambda}b_{\eta\mu} + a_{\nu\lambda}b_\eta^\xi b_{\mu\xi})\,\tau_{(s-1)}^{\eta\nu} - \zeta^3R^3 b_{\nu\lambda}b_\eta^\xi b_{\mu\xi}\tau_{(s-2)}^{\eta\nu}] + \ldots + F_{22}^{\lambda\mu\,(k)}\,[\cdots]_{(s-k)} + \ldots
\end{aligned}
$$

$$(\eta \neq \nu)$$

Когда срединная поверх ость оболочки отнесена к ортогональным координатам, тогда

$$a_{ij} = 0, \qquad \Gamma_{iji}^{r} = 0 \qquad (i \neq j \neq r \neq i)$$

и система уравнений (5.3) заметно упрощается.

Второй непротиворечивой комбинацией значений r будет

$$(\tau^{11}, \tau^{22}, \tau^{33}, \tau^{13}, \tau^{31}) \to r = \varkappa, \quad (\tau^{12}, \tau^{21}, \tau^{23}, \tau^{32}) \to r = \varkappa - 1$$

$$(u_1, W) \to r = \varkappa - 1, \quad u_2 \to r = \varkappa - 2$$

Этим значениям r будет соответствовать некоторая последовательность систем уравнений, получаемых вышеописанным образом. Ввиду громоздкости этих уравнений напишем головную систему этих уравнений (5.4)

$$
\begin{aligned}
&\partial_1\tau_{(0)}^{11} + \partial\tau_{(0)}^{31}/\partial\zeta = 0, \quad \partial_1\tau_{(0)}^{12} + \partial_2\tau_{(0)}^{22} + R\,(\Gamma_{21}^1 + 2\Gamma_{22}^2)\,\tau_{(0)}^{22} + R\Gamma_{11}^2\tau_{(0)}^{11} - {}\\
&\quad - Rb_1^2\tau_{(0)}^{13} + \partial\tau_{(0)}^{32}/\partial\zeta = 0, \quad \tau_{(0)}^{31} = \tau_{(0)}^{13}, \quad \partial_1\tau_{(0)}^{13} + \partial\tau_{(0)}^{33}/\partial\zeta = 0\\
&\tau_{(0)}^{32} = \tau_{(0)}^{23} - \zeta Rb_1^2\tau_{(0)}^{13}, \quad c_{12}\tau_{(0)}^{12} + c_{21}\tau_{(0)}^{21} - \zeta R\,[c_{21}b_1^2\tau_{(0)}^{11} + c_{12}b_2^1\tau_{(0)}^{22}] = 0\\
&\quad - R^{-1}\partial W_{(0)}/\partial\zeta = F_{33}^{33}\tau_{(0)}^{33} + F_{33}^{\lambda\mu\,(0)}a_{1\mu}a_{1\lambda}\tau_{(0)}^{11} + F_{33}^{\lambda\mu\,(0)}a_{2\mu}a_{2\lambda}\tau_{(0)}^{22}\\
&{}^1/_2 R^{-1}\,[-\partial_1 W^{(0)} + \partial u_1^{(0)}/\partial\zeta] = F_{13}^{3\lambda\,(0)}a_{1\lambda}\tau_{(0)}^{13} + F_{31}^{3\lambda\,(0)}a_{1\lambda}\tau_{(0)}^{31}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&{}^1/_2R^{-1}[-\partial_2W^{(0)}+\partial u_2^{(0)}/\partial\zeta+Rb_2^1u_1^{(0)}-R\zeta b_2^1\partial u_1^{(0)}/\partial\zeta]=\\
&\qquad=F_{32}^{3\lambda\,(0)}(a_{2\lambda}\tau_{(0)}^{23}-2\zeta Rb_{1\lambda}\tau_{(0)}^{13})+F_{23}^{3\lambda\,(0)}(a_{2\lambda}\tau_{(0)}^{32}-\zeta Rb_{1\lambda}\tau_{(0)}^{31})\\
&R^{-1}\partial_1u_1^{(0)}=F_{11}^{33(0)}\tau_{(0)}^{33}+F_{11}^{\lambda\mu(0)}a_{\nu\lambda}a_{\nu\mu}\tau_{(0)}^{\nu\nu}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&{}^1/_2R^{-1}[\partial_2u_1^{(0)}-2R\Gamma_{12}^1u_1^{(0)}+\partial_1u_2^{(0)}+2b_{12}RW^{(0)}-\zeta Rb_2^1\partial_1u_1^{(0)}]=F_{12}^{\lambda\mu\,(1)}a_{\nu\lambda}a_{\nu\mu}\tau_{(0)}^{\nu\nu}-\\
&-\zeta RF_{12}^{\lambda\mu\,(0)}(a_{\nu\mu}b_{\nu\lambda}+2a_{\nu\lambda}b_{\nu\mu})\tau_{(0)}^{\nu\nu}+F_{12}^{\lambda\mu}a_{\nu\lambda}a_{\eta\mu}\tau_{(0)}^{\eta\nu}+F_{12}^{33\,(1)}\tau_{(0)}^{33}\qquad(\eta\neq\nu)
\end{aligned}
$$

$$F_{22}^{33\,(0)}\tau_{(0)}^{33}+F_{22}^{\lambda\mu\,(0)}a_{\nu\lambda}a_{\nu\mu}\tau_{(0)}^{\nu\nu}=0$$

Если принять в последних шести уравнениях (5.4)

$$F_{33}^{33\,(0)}=1/E,\qquad F_{33}^{\lambda\mu\,(0)}=-\sigma/Ea^{\lambda\mu},\qquad F_{31}^{3\lambda\,(0)}=[(1+\sigma)/E]\,\delta_1^\lambda$$

$$F_{32}^{3\lambda\,(0)}=[(1+\sigma)/E]\,\delta_2^\lambda$$

$$F_{11}^{33\,(0)}=-\sigma/Ea_{11},\quad E_{12}^{\lambda\mu\,(0)}=[(1+\sigma)/E]\,\delta_1^\mu\delta_2^\mu$$

$$F_{11}^{\lambda\mu\,(0)}=[(1+\sigma)/E]\,\delta^\lambda\delta_1^\mu-\sigma/Ea^{\lambda\mu}a_{11}$$

$$F_{12}^{\lambda\mu\,(1)}=2\sigma/E\zeta Rb_{12}a^{\lambda\mu},\qquad F_{12}^{33\,(1)}=2\sigma/E\zeta Rb_{12},\qquad F_{22}^{33\,(0)}=-\sigma/Ea_{22}$$

$$F_{22}^{\lambda\mu\,(0)}=[(1+\sigma)/E]\,\delta_2^\lambda\delta_2^\mu-\sigma/Ea^{\lambda\mu}a_{22},\qquad a_{ij}=0\quad(\text{при } i\neq j)$$

от эти уравнения превращаются в уравнения для изотропных оболочек [1].

При нулевом приближении второе, четвертое, шестое, девятое, одиннадцатое равенства (5.3) образуют самостоятельную подсистему уравнений относительно $\tau_{(0)}^{12}$, $\tau_{(0)}^{21}$, $\tau_{(0)}^{23}$, $\tau_{(0)}^{32}$, $u_2^{(0)}$ и по смыслу совпадают с уравнениями классической задачи кручения анизотропного стержня относительно оси ξ^2. В системе (5.4) первое, третье, четвертое, седьмое, восьмое, десятое и двенадцатое уравнения образуют самостоятельную подсистему уравнений относительно неизвестных $\tau_{(0)}^{11}$, $\tau_{(0)}^{22}$, $\tau_{(0)}^{33}$, $\tau_{(0)}^{13}$, $\tau_{(0)}^{31}$, $u_1^{(0)}$, $W^{(0)}$. По смыслу они совпадают с уравнениями задачи о плоской деформации в плоскости $\xi^1\zeta$.

Напряженное и деформированное состояния в анизотропной оболочке представим теперь в виде суммы двух напряженных и деформированных состояний, определяемых основным и вспомогательным итерационными процессами, и потребуем, чтобы определяемые таким образом напряжения удовлетворяли граничным условиям (2.6). Помимо этих условий, определяемые таким образом напряжения и перемещения должны удовлетворять условиям закрепления на краях. По-видимому, можно так комбинировать основные и вспомогательные процессы, чтобы выполнить с произвольной точностью краевые условия для оболочек. Этот вопрос для пластин был подробно рассмотрен в работе [2], для оболочек он требует особого рассмотрения.

Автор признателен С. А. Амбарцумяну за ценные указания и благодарит А. Л. Гольденвейзера за обсуждение этой работы.

Поступила 30 III 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 1963, т. 27, вып. 4.
2. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.
3. Green A. E., Zerna W. Theoretical elasticity Oxford Clarendon Press, 1954.
4. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.— Л., Гостехиздат, 1934.
5. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. М., Физматгиз, 1961.
6. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М., Гостехиздат, 1953.