РЕШЕНИЕ ПРИ ПОМОЩИ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО СТАТИЧЕСКОЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

М. Мишику, К. Теодосиу

(Бухарест)

Реальные тела могут обладать начальной неоднородностью вследствие включения постороннего материала, композиции в одном теле различных материалов или дефектов материала, а также и индуктивной неоднородностью, вызванной наличием внешних полей и главным образом термическим полем. Известно, что операторы, определяющие составные законы для вязко-упругих материалов, содержат очень чувствительные к изменениям температуры параметры. В случае неоднородного термического поля эти параметры зависят от пространственных координат. Эффект этой индуктивной неоднородности на распределение напряжений, вызванных внешними силами, значительно больше и длительней, чем эффект напряжений, вызванных самим термическим полем [1]; пренебрежение им ведет даже в самых простых случаях к физически неприемлемым решениям.

Исследованию плоской задачи неоднородных упругих тел посвящен ряд работ. Часть этих работ, например [2-4], исходит из упрощающей гипотезы изменения одного модуля упругости, предполагая коэффициент Пуассона постоянным; другая, как, например, [5], рассматривает случай тел, состоящих из объединения дизъюнктивных однородных упругих областей.

Авторами [6-7] были предложены формулы для комплексного отображения напряжений и перемещений, справедливые для упругих и вязко-упругих тел с непрерывной однородностью общего вида в плоском и осесимметрическом случае. В настоящей работе излагается метод решения статической плоской задачи теории упругости для неоднородных тел путем последовательных приближений на основе применения отображений типа Колосова [8, 9], Мусхелишвили [10] и конформных преобразований [1]. Получение решения для областей с неоднородностью общего вида нуждается в знании решения, соответствующего тем же областям в однородной среде.

§ 1. Основные уравнения и формулировка граничных задач. Введем в рассмотрение уравнения квазистатического равновесия геометрические уравнения и составные уравнения неоднородной вязко-упругой среды, занимающей область R

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0, \quad \varepsilon_{ij} = {}^1/_2(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad s_{ij} = e_{ij} * dG_1, \quad \sigma_{kk} = (\varepsilon_{kk} - 3\alpha T) * dG_2 \tag{1.1}$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - {}^1/_3\sigma_{kk}\delta_{ij}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - {}^1/_3\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \tag{1.2}$$

Здесь σ_{ij} — тензор напряжений; ε_{ij} — тензор деформации; u_i — составляющие упругого перемещения; X_i — массовые силы; $T = T(x_i)$ — температура, предполагаемая стационарной в точке $(x_i) \equiv (x_1, x_2, x_3)$ и измеренная относительно естественного состояния тела; $\alpha = \alpha(x_i)$ — коэффициент, зависящий от природы материала; $G_1 = G_1(x_i, t)$, $G_2 = G_2(x_i, t)$ — функции, определяющие вязко-упругое поведение среды, а $*$ представляет собой конволюционное произведение типа Стильтьеса соответствующих функций [2].

---

[1] Ниже будет показано (§ 1), что квазистатическую задачу теории вязко-упругости при наличии стационарного термического поля можно свести формально при помощи преобразования Лапласа к упруго-статической задаче для неоднородного тела, причем последнюю можно решить также указанным в работе методом. Однако получение решения вязко-упругой задачи требует выполнения обратного преобразования, что связано с довольно большими вычислительными трудностями.

[2] Рассматриваемые здесь составные уравнения — релаксационного типа; аналогичным образом можно трактовать и интегральные составные соотношения типа ползучести или дифференциальные соотношения. Обозначения и наименования, применяемые в этом параграфе, имеются в работе [11].

Предположим, что G_1, G_2, σ_{ij}, X_i, ε_{ij} (f) принадлежат к классу H^1, и имеют порядок O [exp $(p_0 t)$] при $t \to \infty$ для $(x_i) \in R$, причем p_0 — произвольная действительная постоянная; применяя преобразование Лапласа к уравнениям (1.1), получим

$$\sigma_{ij,j}^* + X_i^* = 0, \qquad \varepsilon_{ij}^* = {}^1/_2(u_{i,j}^* + u_{j,i}^*) \qquad (f^*(x_i, p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(x_i, t)\, dt, \ \operatorname{Re} p > p_0) \tag{1.3}$$
$$s_{ij}^* = pG_1^* e_{ij}^*, \qquad \sigma_{kk}^* = pG_2^* (\varepsilon_{kk}^* - 3\alpha T^*)$$

В случае плоских задач, вводя обозначения $\sigma_{11} = \sigma_x$, $\sigma_{12} = \tau_{xy}, \ldots$; $\varepsilon_{11} = \varepsilon_x$, $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{xy}, \ldots$; $u_1 = u$, $u_2 = v$, получим из (1.2) и (1.3)

$$\frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial y} + X^* = 0, \qquad \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^*}{\partial y} + Y^* = 0 \tag{1.4}$$

$$\varepsilon_x^* = \frac{\partial u^*}{\partial x}, \qquad \varepsilon_y^* = \frac{\partial v^*}{\partial y}, \qquad \varepsilon_{xy}^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^*}{\partial y} + \frac{\partial v^*}{\partial x}\right) \tag{1.5}$$

$$\sigma_x^* = \lambda^* (\varepsilon_x^* + \varepsilon_y^*) + 2\mu^* \varepsilon_x^* - k^* T^*, \qquad \sigma_y^* = \lambda^* (\varepsilon_x^* + \varepsilon_y^*) + 2\mu^* \varepsilon_y^* - k^* T^* \tag{1.6}$$

$$\tau_{xy}^* = 2\mu^* \varepsilon_{xy}^*, \qquad \tau_{yz}^* = \tau_{zx}^* = 0 \tag{1.7}$$

где в случае плоского деформированного состояния

$$\lambda^* = {}^1/_3 p (G_2^* - G_1^*), \qquad 2\mu^* = pG_1^*, \qquad k^* = p\alpha G_2^* \tag{1.8}$$

$$\sigma_z^* = \frac{G_2^* - G_1^*}{2G_2^* + G_1^*} (\sigma_x^* + \sigma_y^*) - \frac{3G_1^* G_2^* p\alpha T^*}{2G_2^* + G_1^*}, \qquad \varepsilon_z^* = 0 \tag{1.9}$$

а в случае плоского напряженного состояния

$$\lambda^* = \frac{G_1^* (G_2^* - G_1^*)\, p}{2G_1^* + G_2^*}, \qquad 2\mu^* = pG_1^*, \qquad k^* = \frac{3G_1^* G_2^* p\alpha}{2G_1^* + G_2^*} \tag{1.10}$$

$$\varepsilon_z^* = \frac{G_1^* - G_2^*}{2G_1^* + G_2^*} (\varepsilon_x^* + \varepsilon_y^*) + \frac{3G_2^*}{2G_1^* + G_2^*} \alpha T^*, \qquad \sigma_z^* = 0 \tag{1.11}$$

Уравнения (1.4) — (1.7) те же, что и в случае плоской задачи неоднородных упругих тел [7]. Ниже для простоты записи звездочки опускаются.

В дальнейшем изложении предположим, что ε_x, ε_y, ε_{xy} и, следовательно, σ_x, σ_y, τ_{xy} будут равномерными и непрерывными функциями вместе с их первыми и вторыми частными производными в области D, занятой упругим телом, и что $X = X(x, y)$, $Y = Y(x, y)$ — аналитические функции от x и y в односвязной области D_+, полностью содержащей область D. Уравнения (1.4) можно еще написать в виде

$$\frac{\partial}{\partial \bar z} (\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}) - \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_x + \sigma_y) = X - iY \tag{1.12}$$

$$\left(\begin{matrix} z = x + iy, \\ \bar z = x - iy, \end{matrix} \qquad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \ \frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\right)$$

Уравнение (1.12) удовлетворяется тождественно, если положим

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\frac{\partial^2 F}{\partial z\, \partial \bar z}, \qquad \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 4\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - M(z, \bar z) \tag{1.13}$$

Здесь $F(z, \bar z)$ аналитическая функция от z и $\bar z$ в области $(D, \bar D)$; она принимает действительные значения и допускает частные непрерывные производные первых четырех порядков [1], а

$$-M(z, \bar z) = \int_0^{\bar z} \left[X\left(\frac{z + \bar z}{2}, \frac{z - \bar z}{2i}\right) - iY\left(\frac{z + \bar z}{2}, \frac{z - \bar z}{2i}\right)\right] d\bar z \tag{1.14}$$

будет аналитической функцией переменных z и $\bar z$ в области $(D_+, \bar D_+)$.

[1] Здесь через $\bar D$ и $\bar D_+$ обозначены области, симметрические соответственно областям D и D_+ относительно действительной оси. Будем считать, что начало координат принадлежит области D.

Из (1.5) и (1.6) можно вывести соотношения между составляющими напряжения σ_x, σ_y, τ_{xy} и составляющими перемещения u, v в виде

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial z}=-\frac{1}{4\mu}(\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy})=-\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}+\frac{M}{4\mu} \qquad \begin{pmatrix} U=u+iv \\ \bar{U}=u-iv \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{z}}=\frac{\varkappa-1}{4\mu}(\sigma_x+\sigma_y+2kT)=\frac{\varkappa-1}{\mu}\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial\bar{z}}+\frac{k(\varkappa-1)}{2\mu}T \qquad \left(\varkappa=\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\right) \tag{1.16}$$

Уравнение совместимости можно получить путем исключения U из уравнения (1.15). Получим условие (1.17)

$$\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}-\frac{M}{4\mu}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{z}^2}-\frac{\bar{M}}{4\mu}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}\left[\frac{\varkappa-1}{\mu}\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial\bar{z}}+\frac{k(\varkappa-1)}{2\mu}T\right]=0$$

которое можно еще написать

$$\frac{\partial^4 F}{\partial z^2\partial\bar{z}^2}+A_1\frac{\partial^3 F}{\partial z\partial\bar{z}^2}+\bar{A}_1\frac{\partial^3 F}{\partial z^2\partial\bar{z}}+A_2\frac{\partial^2 F}{\partial\bar{z}^2}+\bar{A}_2\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}+A_3\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial\bar{z}}=f(z,\bar{z}) \tag{1.18}$$

где

$$f(z,\bar{z})=\frac{\mu}{\varkappa+1}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\bar{z}^2}\frac{M}{4\mu}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{\bar{M}}{4\mu}-\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}\left(\frac{k(\varkappa-1)}{2\mu}T\right)\right\}$$

$$A_1=\frac{\partial}{\partial z}\ln\frac{\varkappa+1}{\mu},\qquad A_2=\frac{\mu}{\varkappa+1}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{1}{\mu},\qquad A_3=\frac{\mu}{\varkappa+1}\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}} \tag{1.19}$$

Предположим, что $A_i(z,\bar{z})$ и $f(z,\bar{z})$ — аналитические функции переменных z, $\bar{z}$ в области $(D,\bar{D})$. Можно доказать, что любое решение уравнения (1.18), допускающее частные производные первых четырех порядков, непрерывные в $(D,\bar{D})$, будет аналитической функцией переменных z и $\bar{z}$ в этой области. Отсюда следует, что вышеуказанная гипотеза о непрерывности в D составляющих напряжения и их первых и вторых производных включает в себя аналитичность в D этих составляющих, что обобщает результат Н. И. Мусхелишвили в случае однородных тел ([10], § 32).

Из соотношений (1.13) следует, что напряженное состояние зависит непосредственно не от F, а от ее частных производных второго порядка. Обозначая, например,

$$2\frac{\partial F(z,\bar{z})}{\partial\bar{z}}\equiv G(z,\bar{z}) \tag{1.20}$$

уравнение (1.18) можно еще написать

$$\frac{\partial^3 G}{\partial z^2\partial\bar{z}}+\mathrm{Re}\left(2A_1\frac{\partial^2 G}{\partial z\partial\bar{z}}+2A_2\frac{\partial G}{\partial\bar{z}}+A_3\frac{\partial G}{\partial z}\right)=2f(z,\bar{z}) \tag{1.21}$$

или в виде

$$\frac{\partial^3 G}{\partial z^2\partial\bar{z}}+\mathrm{Re}\left[\frac{\partial^2(B_1G)}{\partial z\partial\bar{z}}+\frac{\partial(B_2G)}{\partial z}+\frac{\partial(B_3G)}{\partial\bar{z}}+B_4G\right]=2f(z,\bar{z}) \tag{1.22}$$

где (1.23)

$$B_1=2A_1,\qquad B_2=A_3-\frac{\partial A_1}{\partial\bar{z}},\qquad B_3=2\left(A_2-\frac{\partial A_1}{\partial z}\right),\qquad B_4=2\frac{\partial^2 A_1}{\partial z\partial\bar{z}}-2\frac{\partial A_2}{\partial\bar{z}}-\frac{\partial A_3}{\partial z}$$

В обозначениях (1.20) соотношения (1.13) примут вид

$$\sigma_x+\sigma_y=2\frac{\partial G}{\partial z},\qquad \sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2\frac{\partial\bar{G}}{\partial z}-M(z,\bar{z}) \tag{1.24}$$

Уравнение (1.22) можно переписать в виде

$$\frac{\partial^3}{\partial z^2\partial\bar{z}}[G(z,\bar{z})+IG(z,\bar{z})-F_0(z,\bar{z})]=0,\qquad F_0(z,\bar{z})\equiv 2\int_0^z dz\int_0^z dz\int_0^{\bar{z}} f(z,\bar{z})\,d\bar{z}$$

$$IG(z,\bar{z})\equiv\int_0^z \mathrm{Re}\left[B_1G+\int_0^{\bar{z}}B_2G\,d\bar{z}+\int_0^z B_3G\,dz+\int_0^z dz\int_0^{\bar{z}}B_4G\,d\bar{z}\right]dz \tag{1.25}$$

Из (1.25) получим

$$G(z,\bar{z})+IG(z,\bar{z})-F_0(z,\bar{z})=\varphi(z)+z\overline{\varphi_1(z)}+\overline{\psi(z)} \tag{1.26}$$

Здесь $\varphi(z)$, $\varphi_1(z)$, $\psi(z)$ — произвольные функции, голоморфные в D.

Из (1.19), (1.20) и (1.26) вытекает, однако, что производная по z от функции $G(z, \bar{z}) + IG(z, \bar{z}) - F_0(z, \bar{z})$ будет функцией, принимающей действительные значения; налагая условие, чтобы и производная по z от функции $\varphi(z) + z\overline{\varphi_1(z)} + \overline{\psi(z)}$ была действительной функцией, получим $\varphi_1(z) \equiv \varphi'(z)$, и, следовательно, (1.26) можно еще написать в виде

$$G(z, \bar{z}) + IG(z, \bar{z}) = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} + F_0(z, \bar{z}) \tag{1.27}$$

Пусть теперь C будет границей области D, описанной уравнением $t = t(s)$, где $t(s)$ — аффикс точки на C, соответствующей криволинейной абсциссе s, измеренной от произвольно выбранного начала на C. Очевидно, положим, что $t(s + l) = t(s)$ и $t(s_1) \neq t(s_2)$, если $0 < s_1 < s_2 < l$, где l — длина кривой C.

В случае первой основной граничной задачи известные составляющие внешнего напряжения $\sigma_{nx} = \sigma_{nx}(s)$, $\sigma_{ny} = \sigma_{ny}(s)$, приложенные к контуру C, связаны с граничными значениями напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy} известными соотношениями

$$\sigma_{nx} = \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y), \qquad \sigma_{ny} = \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) \tag{1.28}$$

где n — внешняя нормаль к контуру C.

Соотношения (1.28) можно переписать в виде[1]

$$\sigma_{nx} + i\sigma_{ny} = (\sigma_x + i\tau_{xy})\, y'(s) - (\tau_{xy} + i\sigma_y)\, x'(s), \quad t(s) = x(s) + iy(s) \tag{1.29}$$

Из (1.24) получим

$$\tau_{xy} + i\sigma_y = i\left(\frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial \bar{z}}\right) - i\overline{M}(\bar{z}, z), \qquad \sigma_x + i\tau_{xy} = \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} + \overline{M}(\bar{z}, z)$$

Подставляя $\tau_{xy} + i\sigma_y$ в (1.29) и замечая, что

$$\frac{\partial G}{\partial z} t'(s) + \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} \overline{t'(s)} = \frac{dG}{ds} \qquad (t(s) = x(s) + iy(s))$$

получим

$$\sigma_{nx} + i\sigma_{ny} = -i\frac{dG}{ds} + i\overline{M(s)}\,\overline{t'(s)}$$

Отсюда, интегрируя по s, имеем

$$G(s) = i\int_0^s (\sigma_{nx} + i\sigma_{ny})\, ds + \int_0^s \overline{M(s)}\,\overline{t'(s)}\, ds + c \equiv H(s) \qquad (c = \mathrm{const}) \tag{1.30}$$

Из соотношений (1.13) следует, что если заданы составляющие напряжения, то функция $G(z, z)$ будет определена с точностью до постоянной. Следовательно, можно принять $c = 0$ в уравнении (1.30), учитывая то, что в результате этого выбора функция $G(z, \bar{z})$ будет вполне определенной напряженным состоянием.

Решение первой основной граничной задачи сводится, следовательно, к определению решения $G(z, \bar{z})$, удовлетворяющего уравнению (1.21) или эквивалентному уравнению (1.27) и граничному условию (1.30). После решения этой задачи составляющие напряжения определяются при помощи соотношений (1.24).

Для решения второй основной граничной задачи применим ее формулировку в перемещениях. Учитывая соотношения (1.15), уравнение равновесия (1.12) можно написать в перемещениях в виде

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left[\frac{\mu}{\varkappa - 1}\left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial \overline{U}}{\partial \bar{z}}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial U}{\partial \bar{z}}\right) = P(z, \bar{z}), \qquad P(z, \bar{z}) \equiv \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(kT) - \frac{1}{4}(X + iY) \tag{1.31}$$

---

[1] Обозначим через $f(s)$ или $f(t, \bar{t})$ граничное значение некоторой функции $f(z, \bar{z})$, непрерывной в $(D, \overline{D})$ при $z \in D$, $z \to C$, $\bar{z} \in \overline{D}$, $\bar{z} \to \overline{C}$, и через $f'(s)$ — производную от $f(s)$ по s.

Уравнение (1.31) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left\{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\frac{\partial(\mu U)}{\partial z}+\frac{1}{\varkappa-1}\frac{\partial(\mu\bar{U})}{\partial\bar{z}}-\frac{1}{\varkappa-1}\frac{\partial\mu}{\partial z}U-\frac{1}{\varkappa-1}\frac{\partial\mu}{\partial\bar{z}}\bar{U}-\right.$$

$$\left.-\int_0^{\bar{z}}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\mu}{\partial\bar{z}}U\right)+P(z,\bar{z})\right]d\bar{z}\right\}=0$$

Отсюда следует

$$\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\frac{\partial(\mu U)}{\partial z}+\frac{1}{\varkappa-1}\frac{\partial(\mu\bar{U})}{\partial\bar{z}}-\frac{1}{\varkappa-1}\frac{\partial\mu}{\partial z}U-\frac{1}{\varkappa-1}\frac{\partial\mu}{\partial\bar{z}}\bar{U}-$$

$$-\int_0^{\bar{z}}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\mu}{\partial\bar{z}}U\right)+P(z,\bar{z})\right]d\bar{z}=\varphi'(z) \qquad (1.32)$$

где $\varphi(z)$ — произвольная голоморфная в D функция. Исключая $\partial(\mu\bar{U})/\partial\bar{z}$ из уравнения (1.32) и его комплексно-сопряженного уравнения, можно получить

$$(\varkappa+1)\mu U(z,\bar{z})+JU(z,\bar{z})=\varkappa\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)}-\int_0^z\frac{\partial\varkappa}{\partial z}\varphi(z)\,\partial z+P_0(z,\bar{z})$$

$$P_0(z,\bar{z})\equiv\int_0^z\left[\varkappa\int_0^{\bar{z}}P(z,\bar{z})\,d\bar{z}-\int_0^z\bar{P}(\bar{z},z)\,dz\right]dz \qquad (1.33)$$

$$JU(z,\bar{z})=-\int_0^z\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial z}+\mu\frac{\partial\varkappa}{\partial z}\right)U+\frac{\partial\mu}{\partial\bar{z}}\bar{U}+\varkappa\int_0^{\bar{z}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\mu}{\partial\bar{z}}U\right)d\bar{z}-\right.$$

$$\left.-\int_0^z\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\frac{\partial\mu}{\partial z}\bar{U}\right)dz\right]dz \qquad (1.34)$$

Здесь $\psi(z)$ — произвольная функция, голоморфная в D.

Решение второй основной граничной задачи сводится, следовательно, к решению уравнения (1.31) или эквивалентного уравнения (1.33), принимающего заданные значения на границе, т. е. удовлетворяющего соотношению $U(s)=u(s)+iv(s)$, где (s) и $v(s)$ — составляющие упругого перемещения, заданные на C.

§ 2. **Применение конформного преобразования.** Предположим теперь, что путем конформного преобразования $z=\omega(\zeta)$ односвязная область D с границей C в плоскости $z=x+iy$ преобразуется в круг Δ с границей Γ, описываемой уравнением $|\zeta|=1$ в плоскости $\zeta=\xi+i\eta$, а $\omega(0)=0$.

Функция $\omega(\zeta)$ будет голоморфной в Δ, поэтому

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{\omega'(\zeta)}\frac{\partial}{\partial\zeta},\qquad \frac{\partial}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{\overline{\omega'(\zeta)}}\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}},\qquad dz=\omega'(\zeta)\,d\zeta,\qquad d\bar{z}=\overline{\omega'(\zeta)}\,d\bar{\zeta} \qquad (2.1)$$

Следовательно, соотношения (1.27) и (1.25) становятся

$$G^\circ(\zeta,\bar{\zeta})+J^\circ G^\circ(\zeta,\bar{\zeta})=\varphi(\zeta)+\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}\overline{\varphi'(\zeta)}+\overline{\psi(\zeta)}+F^\circ_0(\zeta,\bar{\zeta}) \qquad (2.2)$$

$$J^\circ G^\circ(\zeta,\bar{\zeta})=\int_0^\zeta\omega'(\zeta)\,\mathrm{Re}\left[B_1^\circ G^\circ+\int_0^{\bar{\zeta}}\overline{\omega'(\zeta)}\,B_2^\circ G^\circ\,d\bar{\zeta}+\int_0^\zeta\omega(\zeta)\,B_3^\circ G^\circ\,d\zeta+\right.$$

$$\left.+\int_0^\zeta\omega'(\zeta)\,d\zeta\int_0^{\bar{\zeta}}\overline{\omega'(\zeta)}\,B_4^\circ G^\circ\,d\bar{\zeta}\right]d\zeta \qquad (2.3)$$

$$F_0^\circ(\zeta,\bar{\zeta})=2\int_0^\zeta\omega'(\zeta)\,d\zeta\int_0^\zeta\omega'(\zeta)\,d\zeta\int_0^{\bar{\zeta}}\overline{\omega'(\zeta)}\,f[\omega(\zeta),\overline{\omega(\zeta)}]\,d\bar{\zeta} \qquad (2.4)$$

где $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ — произвольные функции, голоморфные в Δ, и обозначено

$$G^\circ(\overline{\zeta}, \zeta) \equiv G[\omega(\zeta), \overline{\omega(\zeta)}], \quad B_i^\circ(\zeta, \overline{\zeta}) \equiv B_i[\omega(\zeta), \overline{\omega(\zeta)}] \quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{2.5}$$

В преобразованной области граничное условие (1.30) становится

$$G^\circ(\sigma) = H^\circ(\sigma) \tag{2.6}$$

Здесь через $\sigma = e^{i\theta}$ обозначена криволинейная абсцисса на круге Γ, а функция $H^\circ(\sigma)$ определяется однозначно по $H(s)$, так как между аффиксами t и τ контуров C и Γ существует взаимно-однозначное соответствие $t = \omega(\tau)$.

Подставляя теперь (2.1) в (1.33) и (1.34), получим

$$(\varkappa + 1)\mu U^\circ(\zeta, \overline{\zeta}) + J^\circ U^\circ(\zeta, \overline{\zeta}) = \varkappa\varphi(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}\overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} - \int_0^\zeta \omega'(\zeta)\frac{\partial\varkappa}{\partial\zeta}\varphi(\zeta)\,d\zeta + P_0^\circ(\zeta, \overline{\zeta}) \tag{2.7}$$

$$J^\circ U^\circ(\zeta, \overline{\zeta}) = -\int_0^\zeta \left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial\zeta} + \mu\frac{\partial\varkappa}{\partial\zeta}\right)U^\circ + \frac{\omega'(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}\frac{\partial\mu}{\partial\zeta}\overline{U}^\circ + \varkappa\int_0^{\overline{\zeta}}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial\mu}{\partial\overline{\zeta}}U^\circ\right)d\overline{\zeta} - \frac{\omega'(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}\int_0^\zeta\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}\left(\frac{\partial\mu}{\partial\zeta}\overline{U}^\circ\right)d\zeta\right]d\zeta,$$

$$U^\circ(\zeta, \overline{\zeta}) \equiv U[\omega(\zeta), \overline{\omega(\zeta)}], \qquad P_0^\circ(\zeta, \overline{\zeta}) \equiv P_0[\omega(\zeta), \omega(\overline{\zeta})] \tag{2.8}$$

В преобразованной области граничное условие (1.35) будет

$$U^\circ(\sigma) = u^\circ(\sigma) + iv^\circ(\sigma)$$

где $u^\circ(\sigma)$ и $v^\circ(\sigma)$ определяются однозначно по $u(s)$ и $v(s)$.

§ 3. Способ последовательных приближений. Для решения граничных задач в случае неоднородных тел используем способ последовательных приближений, полагая, что первое приближение соответствует телу, подверженному тем же нагрузкам, но считаемому однородным [1], а последующие итерации вводят поправки на неоднородность. Решение первой основной граничной задачи можно построить, исходя из уравнений (2.2), (2.6), по схеме

$$G^\circ(\zeta, \overline{\zeta}) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n^\circ(\zeta, \overline{\zeta}) \tag{3.1}$$

$$G_1^\circ(\zeta, \overline{\zeta}) = \varphi_1(\zeta) + \frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}\overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} + F_0^\circ(\zeta, \overline{\zeta}) \tag{3.2}$$

$$G_n^\circ(\zeta, \overline{\zeta}) = \varphi_n(\zeta) + \frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}\overline{\varphi_n'(\zeta)} + \overline{\psi_n(\zeta)} - I^\circ G_{n-1}^\circ(\zeta, \overline{\zeta}) \quad (n \geqslant 2) \tag{3.3}$$

где $\varphi_n(\zeta)$ и $\psi_n(\zeta)$ $(n \geqslant 1)$ — голоморфные в Δ функции, определяющиеся из граничных условий

$$\varphi_1(\tau) + \frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}}\overline{\varphi_1'(\tau)} + \overline{\psi_1(\tau)} = H^\circ(\tau) - F_0^\circ(\tau, \overline{\tau}) \tag{3.4}$$

$$\varphi_n(\tau) + \frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}}\overline{\varphi_n'(\tau)} + \overline{\psi_n(\tau)} = J^\circ G_{n-1}^\circ(\tau, \overline{\tau}) \quad (n \geqslant 2) \tag{3.5}$$

Как видно из § 1, аннулирование аддитивной постоянной в граничном условии (1.30), соответственно (2.6), полностью определяет $G^\circ(\zeta, \overline{\zeta})$ через напряженное состояние. Однако при этом функции $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ не получаются вполне определенными из (2.2), и на них можно наложить дополнительные условия ([10], § 34)

$$\varphi(0) = 0, \qquad \operatorname{Im}\varphi'(0) = 0$$

Следовательно, в рассматриваемой схеме решения можно принять

$$\varphi_n(0) = 0, \qquad \operatorname{Im}\varphi_n'(0) = 0 \qquad (n \geqslant 1) \tag{3.6}$$

[1] В случае односвязного тела решение на первом этапе итерации здесь не рассматривается.

Решение последовательных граничных задач (3.4) и (3.5) можно осуществить способами, применяемыми в теории упругости для однородных тел: метод разложения в степенные ряды, интегральные методы и т. д.

В § 4 будет указан пример решения первой основной граничной задачи для круга, основанный на данном Н. И. Мусхелишвили решении при помощи степенных рядов для однородных упругих тел.

Сходимость ряда (3.1) зависит от условий, налагаемых на функции $H^\circ(\tau)$, $F_0^\circ(\xi, \bar{\xi})$, $\omega(\zeta)$, а также от изменений функций, вводящих неоднородность тела.

Решение второй основной граничной задачи можно построить, исходя из условий (2.7), (2.8), по схеме

$$U^\circ(\zeta, \bar{\zeta}) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n^\circ(\zeta, \bar{\zeta}) \tag{3.7}$$

$$(\varkappa+1)\mu U_1^\circ(\zeta, \bar{\zeta}) = \varkappa\varphi_1(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}\overline{\varphi_1'(\zeta)} - \overline{\psi_1(\zeta)} - \int_0^\zeta \omega'(\zeta)\frac{\partial\varkappa}{\partial\zeta}\varphi_1(\zeta)\,d\zeta + P_0^\circ(\zeta, \bar{\zeta})$$

$$(\varkappa+1)\mu U_n^\circ(\zeta, \bar{\zeta}) = \varkappa\varphi_n(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}\overline{\varphi_n'(\zeta)} - \overline{\psi_n(\zeta)} - \tag{3.8}$$

$$-\int_0^\zeta \omega'(\zeta)\frac{\partial\varkappa}{\partial\zeta}\varphi_n(\zeta)\,d\zeta - J^\circ \overset{\circ}{U}_{n-1}(\zeta, \bar{\zeta}) \qquad (n \geqslant 2) \tag{3.9}$$

Здесь $\varphi_n(\zeta)$ и $\psi_n(\zeta)$ $(n \geqslant 1)$ — голоморфные в Δ функции, определяющиеся из граничных условий

$$\varkappa\varphi_1(\tau) - \frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}}\overline{\varphi_1'(\tau)} - \overline{\psi_1(\tau)} - \int_0^\tau \omega'(\zeta)\frac{\partial\varkappa}{\partial\zeta}\varphi_1(\zeta)\,d\zeta = (\varkappa+1)\mu\,[u(\tau) + iv(\tau)] - P_0^\circ(\tau, \bar{\tau}) \tag{3.10}$$

$$\varkappa\varphi_n(\tau) - \frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}}\overline{\varphi_n'(\tau)} - \overline{\psi_n(\tau)} - \int_0^\tau \omega'(\zeta)\frac{\partial\varkappa}{\partial\zeta}\varphi_n(\zeta)\,d\zeta = J^\circ \overset{\circ}{U}_{n-1}(\tau, \bar{\tau}) \qquad (n \geqslant 2) \tag{3.11}$$

Как видно из (2.7), если задать $U^\circ(\tau, \bar{\tau})$, функции $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ не определяются однозначно; можно принять $\varphi(0) = 0$, причем это условие полностью определяет $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ посредством $U^\circ(\zeta, \bar{\zeta})$. Следовательно, в рассматриваемой схеме решения можно принять

$$\varphi_n(0) = 0 \qquad (n \geqslant 1) \tag{3.12}$$

причем функции $\varphi_n(\zeta)$, $\psi_n(\zeta)$ получаются вполне определенными.

Граничные задачи (3.10) и (3.11) отличаются от встречаемых в теории упругости для однородных тел присутствием интегрального члена. При принятии часто применяемой гипотезы[1] $\varkappa = \varkappa_0 = \text{const}$ соотношения (3.8) — (3.11) примут вид

$$(\varkappa_0+1)\mu U_1^\circ(\zeta, \bar{\zeta}) = \varkappa_0\varphi_1(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}\overline{\varphi_1'(\zeta)} - \overline{\psi_1(\zeta)} + P_0^\circ(\zeta, \bar{\zeta}) \tag{3.13}$$

$$(\varkappa_0+1)\mu U_n^\circ(\zeta, \bar{\zeta}) = \varkappa_0\varphi_n(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}\overline{\varphi_n'(\zeta)} - \overline{\psi_n(\zeta)} - J^\circ \overset{\circ}{U}_{n-1}(\zeta, \bar{\zeta}) \qquad (n \geqslant 2) \tag{3.14}$$

$$\varkappa_0\varphi_1(\tau) - \frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}}\overline{\varphi_1'(\tau)} - \overline{\psi_1(\tau)} = (\varkappa_0+1)\mu\,[u(\tau) + iv(\tau)] - \overset{\circ}{P}_0(\tau, \bar{\tau}) \tag{3.15}$$

$$\varkappa_0\varphi_n(\tau) - \frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}}\overline{\varphi_n'(\tau)} - \overline{\psi_n(\tau)} = J^\circ \overset{\circ}{U}_{n-1}(\tau, \bar{\tau}) \tag{3.16}$$

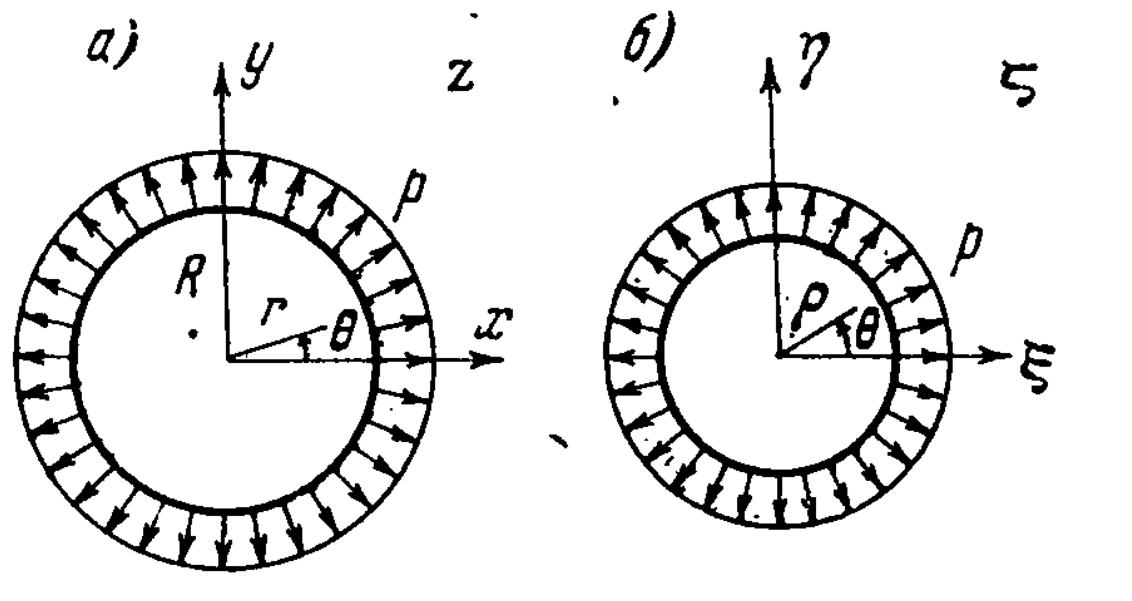
и решение последовательных граничных задач (3.10) и (3.11) можно осуществить способами, применяемыми в теории упругости для однородных тел.

---

[1] Эту гипотезу можно принять в первом приближении для любого неоднородного тела, так как $\varkappa$ зависит только от коэффициента Пуассона, изменяющегося в ... но узких пределах для всех известных материалов.

§ 4. **Пример расчета.** Решим первую основную граничную задачу для области D, ограниченной окружностью $|z| = R$, нагруженной по контуру равномерным радиальным растяжением интенсивности p (фиг. 1, *а*). Конформным преобразованием $z = R\zeta$, область D переходит в область Δ в комплексной плоскости ζ, представляющей внутренность единичного круга $|\zeta| = 1$ (фиг. 1, *б*).

Обозначим $z = re^{i\theta}$, $\zeta = \rho e^{i\theta}$ $(\rho = r / R)$. Вводя полярные составляющие напряжения σ_r, σ_θ, $\tau_{r\theta}$, получим из (1.24) выражения этих составляющих, соответствующих различным этапам итерации



Фиг. 1

$$\tau_{r\theta}^{(n)} = \frac{1}{R}\,\mathrm{Im}\left(\frac{\partial \overline{G}_n^{\,\circ}}{\partial \zeta}\, e^{2i\theta}\right)$$

$$\sigma_r^{(n)} = \frac{1}{R}\left[\frac{\partial \overline{G}_n^{\,\circ}}{\partial \zeta} - \mathrm{Re}\left(\frac{\partial \overline{G}_n^{\,\circ}}{\partial \zeta}\, e^{2i\theta}\right)\right] \qquad (4.1)$$

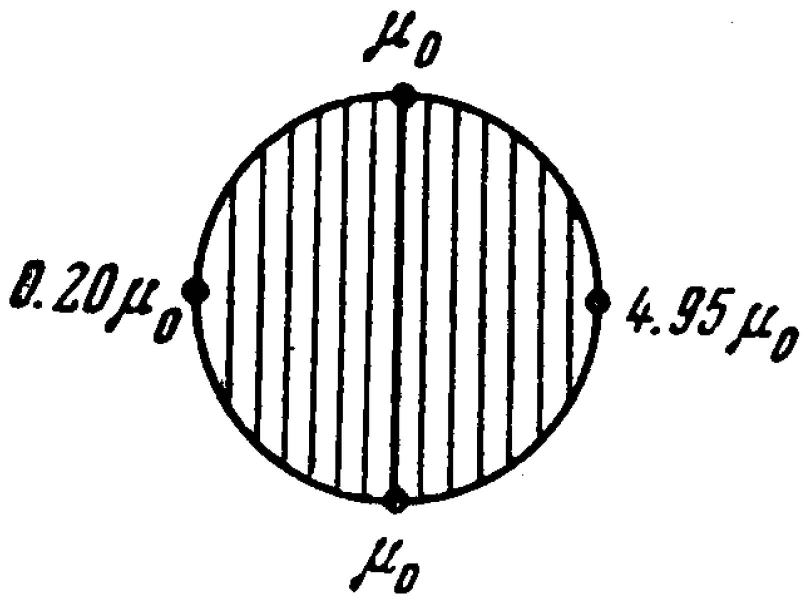
$$\sigma_\theta^{(n)} = \frac{1}{R}\left[\frac{\partial G_n^{\circ}}{\partial \zeta} + \mathrm{Re}\left(\frac{\partial \overline{G}_n^{\,\circ}}{\partial \zeta}\, e^{2i\theta}\right)\right]$$

Если составляющие напряжений по координатным осям, приложенным по контуру, в рассматриваемом случае будут $\sigma_{n\xi} = p\cos\theta$, $\sigma_{n\eta} = p\sin\theta$, то, учитывая, что $d\sigma = R d\theta$, из (1.30) получим

$$H^\circ(\theta) = iR\int_0^\theta (\sigma_{n\xi} + i\sigma_{n\eta})\, d\theta = ipR\int_0^\theta e^{i\theta} d\theta = pRe^{i\theta}$$

Рассмотрим неоднородность тела вида

$$\mu = \mu_0 \exp\left[\frac{\alpha}{R}(z + \bar{z})\right], \qquad \varkappa = \varkappa_0$$



Фиг. 2

Здесь α, $\varkappa_0$ — безразмерные постоянные, а μ_0 имеет ту же размерность, что и μ. Линии $\mu = \mathrm{const}$ при этом являются параллельными оси η (фиг. 2). Из формул (1.19), (1.23), (2.3) получим

$$J^\circ G^\circ(\zeta, \bar{\zeta}) = \int_0^\zeta \mathrm{Re}\left[-2\alpha G^\circ + \frac{(\varkappa_0 - 1)\alpha^2}{\varkappa_0 + 1}\int_0^{\bar{\zeta}} G^\circ d\bar{\zeta} + \frac{2\alpha^2}{\varkappa_0 + 1}\int_0^\zeta G^\circ d\zeta\right] d\zeta$$

Пользуясь теперь указанной в § 4 схемой решения, а также формулами решения первой основной граничной задачи в виде, данном Н. И. Мусхелишвили ([10], § 54), получим выражения функций $G_n^\circ(\zeta, \bar{\zeta})$ и соответствующих составляющих напряжения. Выражения напряжений σ_r, σ_θ, $\tau_{r\theta}$, соответствующих первым трем итерациям, будут

$$\sigma_r^{(1)} = \sigma_\theta^{(1)} = p, \qquad \tau_{r\theta}^{(1)} = 0$$

$$\sigma_r^{(2)} = \frac{p(\varkappa_0 - 1)\alpha^2}{2(\varkappa_0 + 1)}(1 - \rho^2), \qquad \sigma_\theta^{(2)} = \frac{p(\varkappa_0 - 1)\alpha^2}{2(\varkappa_0 + 1)}(1 - 3\rho^2), \qquad \tau_{r\theta}^{(2)} = 0$$

$$\sigma_r^{(3)} = \frac{p(\varkappa_0 - 1)\alpha^3}{24(\varkappa_0 + 1)^2}(1 - \rho^2)\left[2\alpha(\varkappa_0 - 1)(2 - \rho^2) + 8(\varkappa_0 + 1)\rho\cos\theta - \alpha(1 + \rho^2)\cos 2\theta\right]$$

$$\sigma_\theta^{(3)} = \frac{p(\varkappa_0 - 1)\alpha^3}{24(\varkappa_0 + 1)^2}\left[2\alpha(\varkappa_0 - 1)(2 - 9\rho^2 + 5\rho^4) + 8(\varkappa_0 + 1)(3 - 5\rho^2)\rho\cos\theta + \right.$$
$$\left. + \alpha(1 - 12\rho^2 + 15\rho^4)\cos 2\theta\right]$$

$$\tau_{r\theta}^{(3)} = \frac{p(\varkappa_0 - 1)\alpha^3}{24(\varkappa_0 + 1)^2}(1 - \rho^2)\left[8(\varkappa_0 + 1)\rho\sin\theta + \alpha(1 - 5\rho^2)\sin 2\theta\right]$$

В таблице приведены относительные значения напряжений σ_r и σ_θ для $\theta = 0$ при $\varkappa_0 = 1.8$, $\alpha = 0.8$, соответствующие первым трем этапам вычислениям, так что в таблице

$$\sigma_{r1} = \frac{\sigma_r^{(1)}}{p}, \quad \sigma_{r2} = \frac{\sigma_r^{(1)} + \sigma_r^{(2)}}{p}, \quad \sigma_{r3} = \frac{\sigma_r^{(1)} + \sigma_r^{(2)} + \sigma_r^{(3)}}{p} \quad \left(\begin{matrix}\sigma_{\theta1}, \sigma_{\theta2}, \sigma_{\theta3} \\ \text{аналогично}\end{matrix}\right)$$

В этом случае μ изменяется от $0.20\,\mu_0$ до $4.95\,\mu_0$ (фиг. 2). При $\theta = 0$ имеем $\tau_{r\theta}^{(n)} = 0$, $n \geqslant 1$, так как неоднородность и нагружение симметричны относительно оси ξ.

Таблица

Напряжение	ρ					
	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
σ_{r1}	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
σ_{r2}	1.09143	1.08777	1.07680	1.05851	1.03291	1.00000
σ_{r3}	1.09526	1.10063	1.09578	1.07863	1.04728	1.00000
$\sigma_{\theta1}$	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
$\sigma_{\theta2}$	1.09143	1.08046	1.04754	0.99269	0.91589	0.81714
$\sigma_{\theta3}$	1.09874	1.11280	1.09068	1.02310	0.90253	0.72282

Из приведенных в таблице значений видно, что присутствие неоднородности изменяет напряженное состояние как количественно (в данном случае максимальные значения напряжений σ_r и σ_θ изменяются на $+10\%$ и, соответственно, -28%), так и качественно (появляются касательные напряжения $\tau_{r\theta}$ даже при нагружениях с круговой симметрией).

Поступила 12 XI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Freudenthal A. M., Geiringer H. The mathematical theories of the inelastic continuum Encyclopedia of Physics. Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer, 1956, vol. 6.
2. Nowinski J., Turski S. Studium nad stanami naprężenia w ciałach sprężystych niejendorodnych., Arch. Mech. Stos., 1953, vol. 5, No 3.
3. Teodorescu P. P., Predeleanu M. Über das ebene Problem nichthomogener elastischer Körper. Acta tech. Acad. Sci. Hung., 1959, vol. 27, No 3—4.
4. Ду Цин-хуа. Плоская задача теории упругости неоднородной изотропной среды.— В кн.: Проблемы механики сплошной среды, М., Изд-во Акад. наук СССР, 1961.
5. Sherman D. I. On the problem of plane strain in non-homogeneous media. Nonhomogeneity in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press, London — NewYork— Los Angeles, 1959.
6. Mişicu M. Asupra reprezentării vectorului asociat cuasistatic şi dinamic al echilibrului mediilor continue neomogene, cu proprietăţi reologice cuasiliniare. Comun. Acad. R. P. R., 1962, vol. 12, No 8.
7. Misicu M., Teodosiu C. Asupra problemei axial-simetrice si a problemei plane a teoriei elasticitatii pentru corpuri izotrope neomogene. Com. Acad. R. P. R., 1962, vol. 12, No 8.
8. Колосов Г. В. Об одном приложении теории функций комплексного переменного к плоской задаче математической теории упругости. Юрьев. Тип. Маттисена, 1909.
9. Колосов Г. В. Применение комплексных диаграмм и теории функций комплексной переменной к теории упругости. М.— Л., Гл. ред. общетехн. дисциплин, 1935.
10. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 4-е. М., Изд-во Акад. наук СССР, 1954.
11. Gurtin M. E., Sternberg E. On the linear theory of viscoelasticity. Arch. Rational Mech. Annal., 1962, vol., 11, No 4.
12. Teodosiu C. Rezolvarea problemei plane a teoriei elasticităţii în cazul unor forţe masice oarecare Studii şi cercetări mec. apl. Acad. RPR, 1962, t. 13, No 6.