

## О РЕЗУЛЬТАТАХ СОПОСТАВЛЕНИЯ МЕТОДА СЕТОК И МЕТОДА ПЕРЕВАЛА ПРИ АНАЛИЗЕ ПЕРЕХОДНОГО ВОЛНОВОГО ПРОЦЕССА ДЕФОРМАЦИИ ПЛИТ

А. И. Мяннил, У. К. Нигул  
(Таллин)

В работе [1] изложен ряд результатов выявления областей обоснованной и эффективной применимости приближенных теорий и методов при анализе динамических переходных процессов деформации плит.

В данной заметке приводятся дополнительные данные о границе между областями эффективной применимости двух методов интегрирования уравнений теории типа Тимошенко, указанных в заглавии, и даются выводы относительно точности этих методов в зависимости от вычисляемых величин.

1. Пусть речь идет о динамических переходных волновых процессах деформации плит, зависящих от одной координаты срединной поверхности плиты и вызванных действием нагрузки, приложенной вдоль некоторой прямой или в небольшой области поверхности плиты. Предполагая, что цель заключается в определении компонентов волнового процесса, являющихся основными в смысле величины амплитуд, в работе [1] были выявлены на плоскости «время — координата» ориентировочные границы областей обоснованной и эффективной применимости приближенных методов интегрирования уравнений линейной теории упругости.

В частности, было установлено, что после прохождения первичным фронтом пути, равного нескольким толщинам плиты, допустимо заменить уравнения теории упругости уравнениями теории типа Тимошенко в области за условным фронтом поверхностных волн Релея, а в некоторых случаях — также в небольшой области перед указанным условным фронтом (исключением может оказаться непосредственная окрестность места приложения нагрузки). Область обоснованной применимости теории типа Тимошенко включает в себя область применимости теории Кирхгоффа, но существенно шире последней [1, 2]. Она характеризуется большими перемещениями и часто представляет основной интерес при решении конкретных задач. Аналогично обстоит дело в случае осесимметричных задач расчета цилиндрических и сферических оболочек. Поэтому важно располагать эффективной системой методом интегрирования уравнений теории типа Тимошенко. Для ее создания нужна информация о точности и эффективности предложенных расчетных методов (см. обзор [3]).

Рассмотрим систему из следующих приближенных методов интегрирования уравнений теории типа Тимошенко: *A* — вычисление контурных интегралов обращения преобразования Лапласа методом седловых точек, дающее асимптотическое при  $t \rightarrow \infty$  ( $t$  — время) приближение решения в точках, достаточно далеких от фронтов; *B* — прифронтная асимптотика, основывающаяся на разложении изображения Лапласа по целым отрицательным степеням  $s$  ( $s$  — параметр преобразования Лапласа); *B* — усовершенствованный вариант метода сеток, при котором аналитически (при помощи *B*) выделяются частные решения, переносящие разрывы искомых величин, а конечно-разностная схема метода сеток применяется для вычисления только той части решения, которая со своими первыми и вторыми производными, встречающимися в расчете, является непрерывной.

Методы *A*, *B* впервые были внедрены в работе [4] при расчете балки; метод *B* был предложен и использован в работах [5, 6] при расчете плит и сферической оболочки.

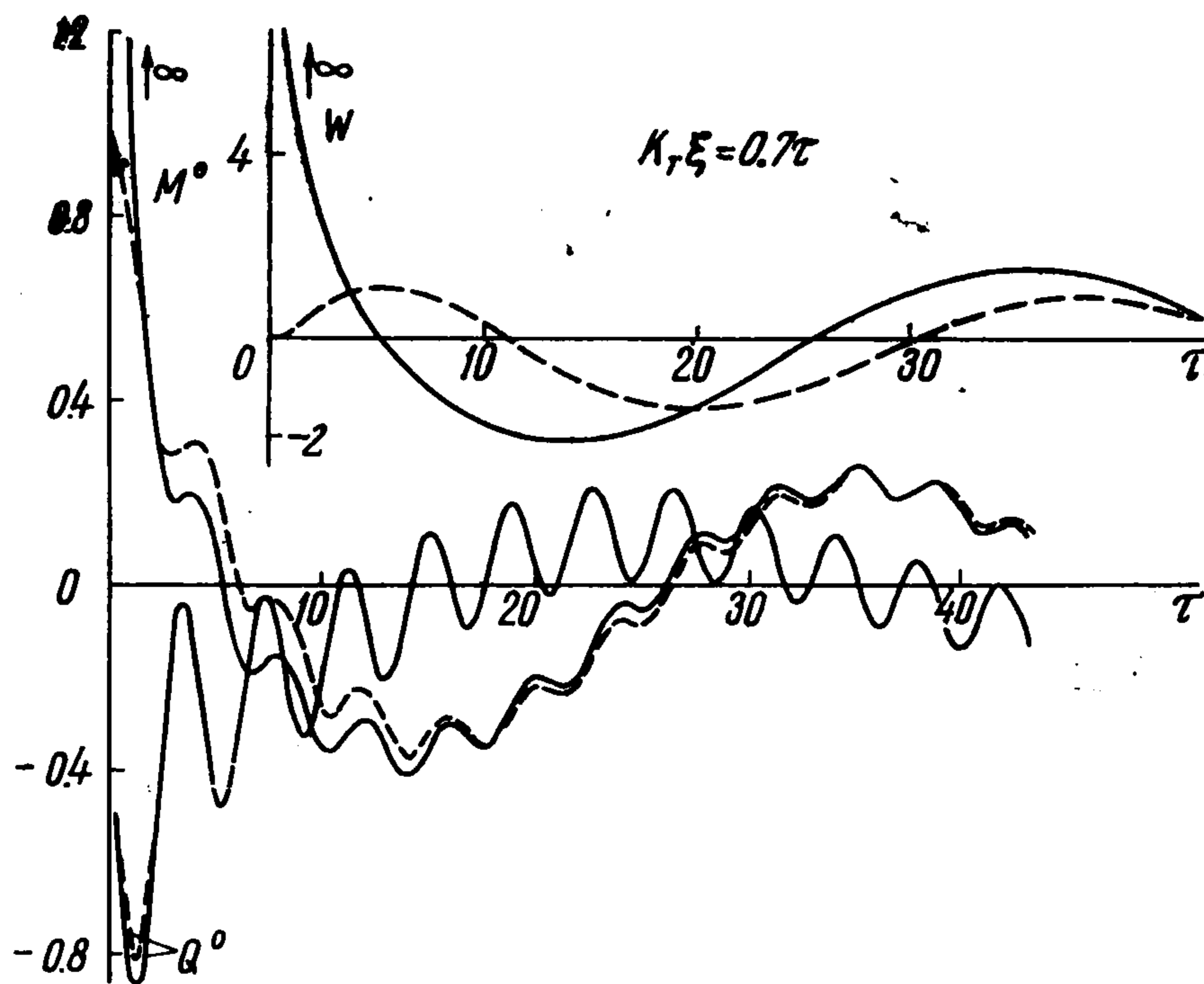
Сходство результатов по методам *B*, *B* в прифронтных зонах гарантируется автоматически. Однако представляет интерес сопоставление результатов по методам *A* и *B*. Во-первых, эффективность системы из методов интегрирования *A*, *B*, *B* существенно зависит от того, при каком значении времени  $t = t_1$  осуществим переход от применения метода *A* к применению метода *B*, ибо при расчете по схеме бесконечного или полубесконечного объекта (т. е. до отражения волн от опор) объем вычислений по методу *B* возрастает пропорционально  $t_1^2$ , а в случае схемы конечного объекта метод *A* имеет практическую ценность только при условии, что  $t_1$  существенно меньше времени про-

бега упругими волнами пути, равного характерному размеру срединной поверхности плиты. Во-вторых, заслуживает внимания применение асимптотического при  $t \rightarrow \infty$  метода *A* для проверки надежности недавно внедренного [5, 6] конечно-разностного метода *B*.

Выполненное в работе [1] сопоставление перемещений, вычисленных по методам *A* и *B* для полубесконечной плиты, нагруженной равномерно распределенным и внезапно приложенным краевым моментом, показало, что результаты становятся достаточно близкими лишь после прохождения упругими волнами пути, равного нескольким десяткам толщин плиты, и практически не дало информации о надежности метода *B*. Размеры плит весьма часто бывают порядка нескольких десятков их толщин (или меньше), поэтому указанный результат работы [1] вызывал сомнения о практической ценности метода *A* не только при интегрировании уравнений теории типа Тимошенко, а также при интегрировании уравнений теории упругости, реализованном, например, в работе [2].

Ниже показано, что сопоставление диаграмм изгибающего момента  $M$  и поперечной силы  $Q$ , вычисленных по методам *A* и *B*, дает гораздо более «благополучные» результаты для метода *A* и позволяет убедиться в надежности метода *B*.

Даем математическую постановку задачи, а также пояснение обозначений на фигуре. Детальные описания методов *A*, *B* опущены, поскольку они изложены соответственно в работах [2, 5].



2. Пусть  $E$  — модуль упругости,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $\rho$  — плотность материала,  $2h$  — толщина плиты,  $c_{II}$ ,  $c_T$  — скорости распространения первого и второго фронтов в теории типа Тимошенко,  $k_T^2$  — коэффициентов сдвига,  $\tau$  — безразмерное время,  $\xi$  — безразмерная (деленная на  $h$ ) продольная координата,  $W$  — безразмерное (деленное на  $h$ ) усредненное нормальное перемещение,  $\psi$  — угол поворота,  $M$ ,  $Q$  — изгибающий момент и поперечная сила,  $M^0$ ,  $Q^0$  — безразмерный изгибающий момент и безразмерная поперечная сила,  $\partial_\xi$ ,  $\partial_\tau$  — символы дифференцирования по  $\xi$  и  $\tau$ ,  $H(\tau)$  — единичная функция Хевисайда,  $l_\xi$ ,  $l_\tau$  — безразмерные шаги расчетной сетки. При этом

$$c_{II} = \left( \frac{E}{\rho(1-\nu^2)} \right)^{1/2}, \quad c_T = \left( \frac{Ek_T^2}{2\rho(1+\nu)} \right)^{1/2}, \quad k = \frac{c_T}{c_{II}}, \quad \tau = \frac{c_T t}{h} \quad (2.1)$$

$$M = \frac{Eh^2}{1+\nu} M^0, \quad Q = \frac{Eh}{1+\nu} Q^0 \quad (2.2)$$

$$M^0 = -\frac{2}{3(1-\nu)} \partial_\xi \psi, \quad Q^0 = k_T^2 (\partial_\xi W - \psi) \quad (2.3)$$

Уравнения движения теории типа Тимошенко представим в форме

$$(\partial_{\xi}^2 - \partial_{\tau}^2) W - \partial_{\xi} \psi = 0, \quad 3\partial_{\xi} W + (k^{-2}\partial_{\xi}^2 - \partial_{\tau}^2 - 3) \psi = 0 \quad (2.4)$$

Рассмотрим выходящего типа волновой процесс деформации полубесконечной плиты, вызванный внезапно приложенным краевым моментом, равномерно распределенным по краю  $\xi = 0$ . Примем нулевые начальные условия; краевые условия

$$M^{\circ}(0, \tau) = \frac{2C}{3-3\nu} H(\tau), \quad W(0, \tau) = 0, \quad C = \text{const} \quad (2.5)$$

и численные коэффициенты  $\nu = 0.3$ ,  $k_{\tau}^2 = 0.860$ ,  $C = 1$ .

3. Если определить преобразование Лапласа по формулам

$$\int_0^{\infty} F(\xi, \tau) e^{-s\tau} d\tau = F^L(\xi, s), \quad F(\xi, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F^L(\xi, s) e^{s\tau} ds \quad (3.1)$$

то изображение решения рассматриваемой задачи является следующим:

$$W^L = C \sum_{j=1}^2 B_{Wj} e^{-\lambda_j \xi}, \quad \psi^L = C \sum_{j=1}^2 B_{\psi j} e^{-\lambda_j \xi} \quad (3.2)$$

Здесь

$$B_{Wj} = -\frac{(-1)^j}{s(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}, \quad B_{\psi j} = \frac{(-1)^j (s^2 - \lambda_j^2)}{s\lambda_j (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \quad (3.3)$$

$$\lambda_j = \left( \frac{s^2}{2} \left[ (1+k^2) \pm (1-k^2) \left( 1 - \frac{12k^2}{s^2(1-k^2)^2} \right)^{1/2} \right] \right)^{1/2} \quad (j=1, 2) \quad (3.4)$$

При вычислении  $\lambda_j$  по формуле (3.4) следует подобрать знаки таким образом, что  $\text{Re } \lambda_j > 0$  при  $\text{Re } s > 0$ . Формулы для  $M^{\circ L}$ ,  $Q^{\circ L}$  легко получить на основе (2.3), (3.2), (3.3).

Выражения изображений (3.2) не поддались точному обращению. Однако асимптотическое при  $\tau \rightarrow \infty$  приближение легко может быть построено методом перевала (методом А), используя седловые точки на мнимой оси  $s = i\omega$  ( $\omega$  — вещественная величина). При каждом на плоскости  $\tau, \xi$  конкретном выбранном луче  $\xi / \tau = r = \text{const} < 1$  существуют две пары седловых точек, расположенных симметрично относительно точки  $s = 0$ . В расчетах были использованы формулы первого приближения метода перевала и вспомогательные численные данные, приведенные в работе [2]. Результаты для  $W$ ,  $M^{\circ}$  и  $Q^{\circ}$  на луче  $k_{\tau} r = 0.7$  показаны на фигуре сплошной линией. Отметим, что были рассмотрены и другие лучи, принадлежащие к той части области применения теории типа Тимошенко, где применение теории Кирхгоффа не обосновано.

4. Для реализации расчета методом В были предварительно исследованы фронтовые разрывы. Применяя метод В (т. е. разложение выражений  $B_{Wj}$ ,  $B_{\psi j}$ ,  $\lambda_j$  по целым отрицательным степеням  $s$ ), были выявлены следующие частные решения:

$$W_0 = \left[ \frac{(\tau - k\xi)^2}{2(1-k^2)} H(\tau - k\xi) - \frac{(\tau - \xi)^2}{2(1-k^2)} H(\tau - \xi) \right] C, \quad \psi_0 = \frac{\tau - k\xi}{k} H(\tau - k\xi) C \quad (4.1)$$

переносящие фронтовые разрывы.

Полное решение было построено в форме

$$W = W_0 + W_1, \quad \psi = \psi_0 + \psi_1 \quad (4.2)$$

При этом функции  $W_1, \psi_1$ , непрерывные вместе со своими первыми и вторыми производными, были вычислены на плоскости  $\tau, \xi$  по методу сеток. Во внутренних точках области  $0 < \xi < \tau k^{-1}$ , за исключением первых точек за фронтом  $\xi = \tau k^{-1}$ , величины  $W_1, \psi_1$  были вычислены из неоднородных уравнений, полученных из (2.4) подстановкой

(4.2); у края  $\xi = 0$ , на фронте  $\xi = \tau k^{-1}$  и в первых зафронтных точках величины  $W_1, \psi_1$  были определены соответственно на основе условий (2.5) и на основе фронтных условий

$$W_1 = \psi_1 = 0, \quad \partial_\xi W_1 = \partial_\xi \psi_1 = 0 \quad \text{при } \xi = \tau k^{-1} \quad (4.3)$$

В расчетах были приняты безразмерные шаги  $l_\xi = 0, 1, l_\tau = 1/2kl_\xi$ .

Используя формулы (2.3), по  $W$  и  $\psi$  были найдены  $M^\circ, Q^\circ$ . На фигуре результаты расчета показаны пунктирной линией.

б. Результаты расчетов (см. фиг.) показывают, что диаграммы для  $M^\circ, Q^\circ$ , вычисленные по методам  $A, B$ , хорошо совпадают уже после прохождения упругими волнами пути, равного нескольким толщинам плиты, причем это совпадение улучшается с ростом  $\tau$ ; близких результатов для  $W$  можно ожидать лишь при весьма больших значениях  $\tau$ .

Анализ указанных результатов позволяет сделать следующие обобщающие выводы.

(1) Предложенный в работах [5-6] усовершенствованный вариант метода сеток (метод  $B$ ) надежен.

(2) Метод  $A$  (формулы первого приближения метода перевала при обращении контурных интегралов формального решения) имеет существенно различные области применимости для различных величин.

(3) Большая эффективность метода  $A$  при вычислении  $M^\circ, Q^\circ$ , по сравнению с его эффективностью при вычислении  $W$ , не является свойственной только рассмотренной задаче. Причина этого явления в следующем. Путь интегрирования при вычислении контурных интегралов обращения может быть подобран как состоящий из участков: (а) прохода седловых точек, (б) обхода особых точек. Метод  $A$  аппроксимирует вклад участков (а), но не учитывает вклад участков (б). Последний является менее существенным для быстрее колеблющихся величин ( $M^\circ, Q^\circ$ ).

В связи с выводами (2), (3) любопытно отметить, что в рамках теории Кирхгоффа контурные интегралы преобразования Лапласа обратимы для данной задачи точно, причем для  $Q^\circ$  метод  $A$  дает точную формулу, для  $M^\circ$  — хорошее приближение уже при небольших  $\tau$ , а для нормальных перемещений — практически приемлемое приближение лишь при весьма больших  $\tau$ .

Первым автором выполнено программирование расчетов для ЭЦВМ «Минск-2», а вторым — теоретическая часть работы.

Поступила 2 VII 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Н и г у л У. К. О методах и результатах анализа переходных волновых процессов изгиба упругой плиты. Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-матем. и техн. н., 1965, т. 14, № 3.
2. Н и г у л У. К. Применение трехмерной теории упругости к анализу волнового процесса изгиба полубесконечной плиты при кратковременно действующей краевой нагрузке. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6.
3. А й н о л а Л. Я., Н и г у л У. К. Волновые процессы деформации упругих плит и оболочек (обзор). Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-матем. и техн. н., 1965, т. 14, № 1.
4. Flügg e W., Z a j a c E. E. Bending impact waves in beams. Ingr-Arch., 1959, В. 28, S. 59.
5. В е к с л е р Н. Д., М я н н и л А. И., Н и г у л У. К. Применение метода сеток в теории типа Тимошенко для исследования переходных волновых процессов деформации плит конечных размеров. Прикладна механіка АН Укр. ССР, 1965, т. 1, вып. 12.
6. В е к с л е р Н. Д., Н и г у л У. К. К применению теории типа Тимошенко при осесимметричном волновом процессе деформации сферической оболочки. Механика твердого тела, 1966, № 1.