Из фиг. 4 видно, что в рассматриваемом интервале значений числа Прандтля P имеется монотонная неустойчивость, причем ее возникновение связано с «изотермическими» возмущениями: ось G пересекается либо вещественным μ-уровнем, либо одним из вещественных уровней, образовавшихся при «распаде» комплексно-сопряженной пары. Интересно, что хотя с изменением числа P в рассматриваемом интервале P спектр перестраивается довольно существенно, критическое значение числа Грассгофа, определяющее нейтральное возмущение, меняется слабо.

Автор благодарит Г. З. Гершуни за постановку задачи и помощь в работе.

Поступила 9 XI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З. Об устойчивости плоского конвективного движения жидкости. Ж. техн. физ. 1953, т. 23, № 10.
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О двух типах неустойчивости конвективного движения между параллельными вертикальными плоскостями. Изв. высш. учебн. завед., Физика, 1958, № 4.
3 Бирих Р. В., Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О спектре возмущений плоскопараллельных течений при малых числах Рейнольдса. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1954.

О НЕЕДИНСТВЕННОСТИ СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ГОРЕНИЯ

Р. Д. Бачелис, В. Г. Меламед (Москва)

Как известно [1], одномерный процесс горения газовой смеси описывается нелинейной системой дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\alpha(U)\frac{\partial U}{\partial x}\right] + F(U)C, \qquad \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\alpha_1(U)\frac{\partial C}{\partial x}\right] - F(U)C \qquad (0.1)$$

$$F(U) \equiv 0, \quad u \in [0, U_0], \quad F(U) > 0, \quad U > U_0$$

Здесь U — температура смеси, $C \geqslant 0$ — концентрация активного вещества, $F(U)C$ — скорость реакции, $\alpha(U) > 0$ — коэффициент теплопроводности, $\alpha_1(U) > 0$ — коэффициент диффузии.

Ищем решение системы специального вида, называемое стационарным

$$U = u(y), \quad C = c(y), \quad y = x + \lambda t, \quad \lambda = \mathrm{const} > 0$$

удовлетворяющее условиям

$$u(-\infty) < u(y) < u(\infty), \qquad c(-\infty) > c(y) > c(\infty)$$

При этом система (0.1) примет вид

$$\lambda\frac{du}{dy} = \frac{d}{dy}\left[\alpha(u)\frac{du}{dy}\right] + F(u)c, \qquad \lambda\frac{dc}{dy} = \frac{d}{dy}\left[\alpha_1(u)\frac{dc}{dy}\right] - F(u)c \qquad (0.2)$$

причем легко доказать, что $u'(y) > 0$ при всех y. Задаем для решения системы (0.2) следующие условия:

$$u(-\infty) = 0, \qquad c(-\infty) = c_0 > 0, \qquad c(\infty) = 0$$

Из существования $u(\pm\infty)$ и $c(\pm\infty)$ следует, что $c'(\pm\infty) = u'(\pm\infty) = 0$, если последние существуют. Из (0.2) имеем

$$\lambda[c(y) + u(y) - c_0 - u(-\infty)] = \alpha(u)\,du/dy + \alpha_1(u)\,dc/dy$$

Отсюда, в свою очередь,

$$c(-\infty) + u(-\infty) = c(\infty) + u(\infty), \quad \text{или} \quad u(\infty) = u_+ = c_0$$

Учитывая $u' > 0$, принимаем u в качестве независимого переменного.

Введем обозначения

$$v(u) = \alpha(u)\, du\, /\, dy > 0, \qquad \alpha(u) F(u) = f(u)$$

$$f(u) > 0, \quad u > u_*, \quad f(u) \equiv 0, \quad u \in [0, u_0], \ \alpha(u) / \alpha_1(u) = \beta(u) > 0 \tag{0.3}$$

В результате система (0.2) принимает вид

$$v' = \lambda - \frac{f(u) c}{v}, \qquad c' = \beta(u) \left[\frac{\lambda}{v}(c + u - u) - 1\right] \tag{0.4}$$

при условиях $v(0) = 0$, $v(u_+) = c(u_+) = 0$.

Так как $f(u) \equiv 0$, $u \in [0, u_*]$, то последнее эквивалентно

$$v(u_*) = \lambda u_* \tag{0.5}$$

Требуется определить $c(u)$ и $v(u)$ на $[0, u_+]$ (тем самым, с точностью до параллельного переноса по оси y, будут определены $u(y)$ и $c(y)$), а также константу λ.

В работе [2] доказано существование решения системы (0.4), (0.5) в частном случае при $\beta(u) = \text{const}$. Доказано также, что при $\beta(u) = \text{const} > 1$ решение этой системы единственно. Вопрос об единственности в общем случае остается, таким образом, открытым. Другой частный случай при $\beta \equiv 1$ приводит систему (0.4), (0.5) к одному уравнению, рассмотренному в [1] (где было доказано существование и единственность решения), а также в [3,4].

В связи с этим существовало предположение, что система (0.4), (0.5) имеет единственное решение при любых $f(u)$ и $\beta(u)$, удовлетворяющих ограничениям (0.3). В настоящей работе путем построения противоречащего примера доказывается, что, несмотря на выполнение (0.3), единственность может и не иметь места.

Допустим, что при некоторой комбинации значений u_*, u_+ и функций $f(u)$, $\beta(u)$ система (0.4), (0.5) имеет два решения $v_i(u)$, $c_i(u)$ $(i = 1, 2)$. Введем обозначения

$$a(u) = c_2(u) / c_1(u), \tag{0.6}$$

$$b(u) = v_2(u) / v_1(u) \tag{0.7}$$

при $u \in [u_*, u_+)$. Значения $a(u_+)$ и $b(u_+)$ определяются предельным переходом.

Найдем $f(u)$, $\beta(u)$ и u_+ через u_*, λ_1, λ_2, $a(u)$, $b(u)$. Для этого сначала составим систему дифференциальных уравнений для определения $v_1(u)$, u_+ и $c_1(u)$ через u_*, λ_1, λ_2, $a(u)$ и $b(u)$. Из (0.6) и (0.7) имеем после преобразований

$$c_1' = \frac{a' c_1 [\lambda_1 (c_1 + u - u_+) - v_1]\, b}{(\lambda_2 - \lambda_1 b)\, a c_1 + (\lambda_2 - \lambda_1 a b)(u - u_+) + (a - 1)\, b v_1} \tag{0.8}$$

Как будет доказано ниже, (0.7) имеет особые точки, что исключает задание начального условия. Из (0.6) и (0.5) следует $b(u) = \lambda_2 / \lambda_1$, $u \in [0, u_*]$. Очевидно, что на $(0, u_+)$ функция $b(u)$ непрерывно дифференцируема. Следовательно, $b'(u_*) = 0$. На $[0, u_+)$ имеем $b(u) > 0$. Подставляя в (0.4) оба предполагаемых решения, исключая $f(u)$ и используя (0.6), получим

$$\frac{(\lambda_2 - v_2') v_2}{(\lambda_1 - v_1') v_1} = \frac{c_2}{c_1} = a(u), \qquad u \in (u_0, u_+) \tag{0.9}$$

Отсюда, согласно (0.6), получаем уравнение для определения $v_1(u)$

$$v_1' = \frac{b b'}{a - b^2} v_1 + \frac{a \lambda_1 - b \lambda_2}{a - b^2}, \quad v_1(u_0) = \lambda_1 u_0 \quad \text{или} \quad v_1' - \lambda_1 = \frac{b (b' v_1 - \lambda_2 + b \lambda_1)}{a - b^2} \tag{0.10}$$

Очевидно, что (0.8) может быть решено независимо от (0.7). Из (0.4), (0.3), а также требований, накладываемых на $c(u)$ и $v(u)$, следует $v_1' - \lambda_1 < 0$, т. е.

$$\frac{b' v_1 - \lambda_2 + b \lambda_1}{a - b^2} < 0 \tag{0.11}$$

Пусть теперь λ_1, λ_2, $a(u)$, $b(u)$, $u \in [u_0, \infty)$ заданы заранее, а не получены в результате решения (0.4), (0.5). Кроме того, как и раньше, задано u_*. Решая (0.7), (0.8) можно получить $v_1(u)$, u_+, $c_1(u)$, а через них $f(u)$ и $\beta(u)$. При этом должны выполняться следующие условия.

1) $v_1(u)$ должно хотя бы один раз обратиться в нуль при $u > u_*$. Ближайшая к u_0 точка пересечения с осью абсцисс будет принята за u_+, после чего отрезок (u_+, ∞) исключается из рассмотрения.

2) На $[u_*, u_+]$ должно существовать хотя бы одно непрерывное решение (0.8), обращающееся в нуль при $u = u_+$.

3) Полученные $f(u)$ и $\beta(u)$ должны быть непрерывны, дифференцируемы и удовлетворять условиям $f(u_0) = 0$, $f(u) > 0$ при $u \in (u_*, u_+]$.

Что касается полуинтервала $[0, u_*)$, то на нем $f(u) \equiv 0$ уже определена, в качестве $\beta(u)$ может быть взята любая положительная функция, дифференцируемая на $[0, u_*)$, а также в точке склеивания $u = u_*$.

В § 1 производится построение функций $a(u)$ и $b(u)$, в § 2 определяется $v_1(u)$ и доказывается существование u_+; в § 3 доказано, что $v_1' - \lambda_1 < 0$ на $(u_*, u_+]$, что необходимо для доказательства положительности $f(u)$ на этом полуинтервале; в § 4 определяется $c_1(u)$. На плоскости $c_1 u$ уравнение (0.7) имеет две особые точки, одна из которых есть $(u_+, 0)$. Доказывается существование единственной интегральной линии, проходящей через обе особые точки. Доказывается что для точек указанной линии $c_1'(u) < 0$. Это используется для доказательства положительности $\beta(u)$.

§ 1. Установим достаточные условия, которые следует наложить на $f(u)$ и $\beta(u)$, чтобы выполнялись перечисленные требования. Возьмем произвольное $u_1 > u_0$ и построим на $[u_*, u_1]$ любую дважды непрерывно дифференцируемую функцию $b(u)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$b(u_*) = \lambda_2 / \lambda_1, \quad b'(u_0 + 0) = 0, \quad b'(u) < 0, \quad u \in (u_0, u_1) \tag{1.1}$$
$$b'(u_1 - 0) = 0, \quad b(u_1) \in (0, \lambda_1 / \lambda_2)$$

Далее выберем произвольное $B \in (\lambda_1 / \lambda_2, 1)$ и построим на (u_1, ∞) любую дважды непрерывно дифференцируемую функцию $b(u)$, удовлетворяющую условиям

$$b(u_1 + 0) = b(u_1), \quad b'(u_1 + 0) = 0, \quad b''(u_1 + 0) = b''(u_1 - 0), \quad \lim_{u\to\infty} b(u) = B$$
$$0 < b'(u) < \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 u}, \qquad u \in (u_1, \infty) \tag{1.2}$$

Очевидно, что можно подобрать функцию $b(u)$, удовлетворяющую последнему неравенству и стремящуюся при $u \to \infty$ к любому значению, большему $b(u_1)$, в частности, к выбранному B. Возможность удовлетворения остальных условий очевидна.

Построим также на $[u_0, u_1]$ любую дважды непрерывно дифференцируемую функцию $a(u)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$a(u_0) \in \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1 b(u_1)}\right), \quad a(u_1) \in \left(a(u_0), \frac{\lambda_2}{\lambda_1 b(u_1)}\right), \quad a'(u) > 0 \tag{1.3}$$
$$u \in [u_0, u_1), \quad a'(u_1 - 0) = 0, \quad a''(u_1 - 0) < 0$$

Выберем произвольное

$$A \in (\max\{1, a(u_1)\, b(u_1)\, B\}, B\lambda_2 / \lambda_1)$$

На (u_1, ∞) построим любую, дважды непрерывно дифференцируемую функцию $a(u)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$a(u_1 + 0) = a(u_1), \qquad a'(u_1 + 0) = 0, \qquad a''(u_1 + 0) = a''(u_1 - 0)$$
$$a'(u) < 0, \quad u \in (u_1, \infty), \quad \lim_{u\to\infty} a(u) = A, \quad a(u) < \frac{A}{Bb(u)}, \quad u \in [u_1, \infty) \tag{1.4}$$

Существование функции, удовлетворяющей первым четырем условиям (1.4), очевидно. Кроме того, из вышеизложенного следует

$$A < A / B < \lambda_2 / \lambda_1 < \lambda_2^2 / \lambda_1^2 < a(u_1)$$

Отсюда вытекает существование функции, удовлетворяющей пятому условию (1.4). Возможность удовлетворения также и последнего условия (1.4) следует из того, что функция $A \,/\, Bb\,(u)$ при изменении u от u_1 до ∞ монотонно убывает соответственно

$$\text{от} \quad \frac{A}{Bb\,(u_1)} > a\,(u_1) \quad \text{до} \quad \frac{A}{Bb\,(\infty)} = \frac{A}{B^2} > A = a\,(\infty)$$

Из построения функций $a\,(u)$ и $b\,(u)$ следует, что обе они дважды непрерывно дифференцируемы на $[u_0, \infty)$ и, в частности, в точке u_1, где было произведено склеивание.

Докажем существование такого $h > 0$, что для построенных функций $a\,(u)$ и $b\,(u)$ на $[u_0, \infty)$ справедливо неравенство

$$a\,(u) - b^2\,(u) \geqslant h \tag{1.5}$$

Пусть $u \in [u_0, u_1]$. Тогда из (1.1) и (1.3) следует

$$a\,(u) - b^2\,(u) \geqslant a\,(u_0) - b^2\,(u_0) = a\,(u_0) - \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2 > 0$$

Пусть теперь $u \in (u_1, \infty)$. Тогда, в силу (1.2) и (1.4), следует $a\,(u) - b^2\,(u) > > A - B^2 > 0$. Полагая $h = \min\,\{a\,(u_0) - (\lambda_2 \,/\, \lambda_1)^2, A - B^2\}$, получаем (1.5).

Кроме того, докажем существование такого $H > 0$, что для всех $u \in [u_0, \infty)$

$$a(u) - b^2(u) \leqslant H \tag{1.6}$$

Действительно, в точке $u = u_1$ функция $a\,(u)$ принимает максимальное значение, $b\,(u)$ — минимальное. Следовательно, $a\,(u) - b^2\,(u) \leqslant a\,(u_1) - b^2\,(u_1)$.

Полагая $H = a\,(u_1) - b^2\,(u_1)$, получаем (1.6). Отметим также, что

$$b\,(u) < \lambda_2 \,/\, \lambda_1, \quad u > u_0, \quad a\,(u) > 1, \quad u \geqslant u_0, \quad b\,(u) < 1, \quad u \geqslant u_1 \tag{1.7}$$

§ 2. Построив таким образом $a\,(u)$ и $b\,(u)$, $u \in [u_0, \infty)$, определим $v_1\,(u)$ из (0.9) при начальном условии $v_1\,(u_0) = \lambda_1 u_0$

$$v_1\,(u) = X\,(u)\,Y\,(y) \qquad \left(X\,(u) = \exp \int\limits_{u_0}^{u} \frac{bb'}{a - b^2}\,ds, Y\,(u) = \int\limits_{u_0}^{u} \frac{\lambda_1 a - \lambda_2 b}{(a - b^2)\,X\,(s)}\,ds + \lambda_1 u_0\right) \tag{2.1}$$

Докажем существование $p > 0$ такого, что при всех $u \in [u_0, \infty)$ имеем

$$X\,(u) \leqslant p \tag{2.2}$$

Пусть $u \in [u_0, u_1]$. В силу (1.1) и (1.5), имеем $X'\,(u) \leqslant 0$. Отсюда $X\,(u) \leqslant X\,(u_0)$. Пусть теперь $u \in (u_1, \infty)$. Тогда

$$X\,(u) = X\,(u_1) \exp \int\limits_{u_1}^{u} \frac{bb'}{a - b^2}\,ds \leqslant X\,(u_1) \exp \frac{1}{2h}\,[b^2\,(u) - b^2\,(u_1)] <$$

$$< X\,(u_1) \exp \frac{1}{2h}\,[B^2 - b^2\,(u_1)]$$

Полагая

$$p = \max\left\{X\,(u_0),\ X\,(u_1) \exp \frac{1}{2h}\,[B^2 - b^2\,(u_0)]\right\}$$

получаем (2.2). Учитывая, что $X'(u) > 0$ при $u > u_1$, получаем существование $X\,(\infty)$. Отметим, что, так как при $u \in [u_0, u_1]$ имеем $\lambda_1 a - \lambda_2 b \geqslant \lambda_1 a\,(u_0) - \lambda_2 b\,(u_0) > 0$, то $v_1\,(u) > 0$ на этом отрезке.

Докажем теперь существование такого $u_+ > u_1$, что $v_+ = 0$, $v\,(u) > 0$, $u < u_+$.

Рассмотрим $Y'\,(u)$ на $[u_1, \infty)$. Очевидно, что $Y'\,(u_1) > 0$. При увеличении u от u_1 до ∞ функция $\lambda_1 a - \lambda_2 b$ будет, в силу вышесказанного, монотонно убывать, причем

$$\lim_{u \to \infty}\,(\lambda_1 a - \lambda_2 b) = \lambda_1 A - \lambda_2 B < 0$$

Таким образом, $Y'\,(u)$ сменит знак в некоторой точке $u = u_2 > u_1$, и при $u > u_2$ функция $Y\,(u)$ будет монотонно убывать. Выйти на горизонтальную асимптоту она не сможет, так как

$$\lim_{u \to \infty} Y'\,(u) = \frac{\lambda_1 A - \lambda_2 B}{(A - B^2)\,X\,(\infty)} < 0$$

Таким образом, установлено существование искомой точки u_+.

Заметим, что попутно доказано $\lambda_1 a(u_+) - \lambda_2 b(u_+) < 0$. Следовательно из (0.8) имеем $v'(u_+) < 0$. Все дальнейшие рассуждения будем проводить только при $u \leqslant u_+$.

§ 3. Докажем, что

$$v_1' - \lambda_1 < 0, \qquad u \in (u_0, u_+) \tag{3.1}$$

Из (0.10) с учетом (1.1), (1.5) и (1.7), следует выполнение (3.1) на $(u_0, u_1]$. В силу (0.5), имеем,

$$v_1(u) < \lambda_1 u, \qquad u \in (u_0, u_1]$$

Докажем теперь, что $v_1(u) < \lambda_1 u$ также на $(u_1, u_+]$. Предположим противное, т. е. найдется $u = u_2 \in (u_1, u_+]$ такое, что $v_1(u_2) = \lambda_1 u_2$.

Если указанная точка не единственна, то за u_2 принимается ближайшее к u_1. Тогда, согласно теореме Лагранжа, найдется $u_3 \in (u_1, u_2)$ такое, что

$$v_1'(u_3) = \frac{\lambda_1 u_2 - v_1(u_1)}{u_2 - u_1} > \lambda_1$$

С другой стороны, так как $v_1(u_3) < \lambda_1 u_3$, то, учитывая (1.2) и (0.9), будем иметь

$$v_1'(u_3) - \lambda_1 = \frac{b(b'v_1 - \lambda_2 + b\lambda_1)}{a - b^2} < \frac{(v_1 / \lambda_1 u - 1)(\lambda_2 - \lambda_1 b)\, b}{a - b^2} < 0$$

что невозможно. Теперь, пользуясь (1.2), получим

$$b'v_1 - \lambda_2 + b\lambda_1 < b'\lambda_1 u - \lambda_2 + b\lambda_1 < 0$$

Отсюда, согласно (0.9), имеем

$$v_1' - \lambda_1 < 0, \qquad u \in (u_1, u_+)$$

Таким образом, (3.1) доказано.

§ 4. Определив, таким образом на $[u_0, u_+]$ функцию $v_1(u)$ и, тем самым, $v_2(u)$ (поскольку $b(u)$ известно), дадим определение $c_1(u)$. Рассмотрим (0.7) в области E:

$$u \in [u_0, u_+],\ c_1 \in [0, L(u)],\ L(u) = v_1 / \lambda_1 + u_+ - u$$

(фигура). В силу доказанных свойств функции $v_1(u)$, имеем

$$L'(u_0) = 0, \qquad L'(u) < 0, \qquad u \in (u_0, u_+] \tag{4.1}$$

Очевидно также, что

$$L(u) > 0, \qquad u \in [u_0, u_+),\ L(u_+) = 0$$

Перепишем (0.8) в виде

$$c_1' = \frac{a'\varphi(u, c_1)}{\psi(u, c_1)}, \qquad \varphi(u, c_1) = c_1[\lambda_1(c_1 + u - u_+) - v_1]\, v_2 \tag{4.2}$$

$$\psi(u, c_1) = (\lambda_2 v_1 - \lambda_1 v_2)\, a c_1 + (\lambda_2 v_1 - a\lambda_1 v_2)(u - u_+) + (a - 1)\, v_1 v_2$$

Очевидно, что на верхней $c_1 = L(u)$ и нижней $c_1 = 0$ границах области E имеем $\varphi(u, c_1) = 0$. Во внутренних точках и на интервале $u = u_0$, $0 < c_1 < L(u_0)$ имеем $\varphi(u, c_1) < 0$. Рассмотрим поведение ψ в области E. На верхней границе имеем после преобразований, согласно (1.7) и (1.1),

$$\psi[u, L(u)] = (u_+ - u)\, \lambda_2 v_1 (a - 1) + v_1^2 (a\lambda_2 / \lambda_1 - b) > 0, \qquad u \in [u_0, u_+)$$

На нижней границе имеем после преобразований

$$\psi(u, 0) = [\lambda_1(u_+ - u) + v_1]\left[a(u)\, b(u) - \frac{\lambda_2(u - u_+) - v_2}{\lambda_1(u - u_+) - v_1}\right] v_1$$

Согласно теореме Коши, найдется $u^* \in (u, u_+)$ такое, что

$$\frac{\lambda_2(u - u_+) - v_2(u)}{\lambda_1(u - u_+) - v_1(u)} = \frac{\lambda_2 - v_2'(u^*)}{\lambda_1 - v_1'(u^*)} = \frac{a(u^*)}{b(u^*)}$$

Отсюда

$$\psi(u, 0) = [\lambda_1(u_+ - u) + v_1]\left[a(u)\, b(u) - \frac{a(u^*)}{b(u^*)}\right] v_1$$

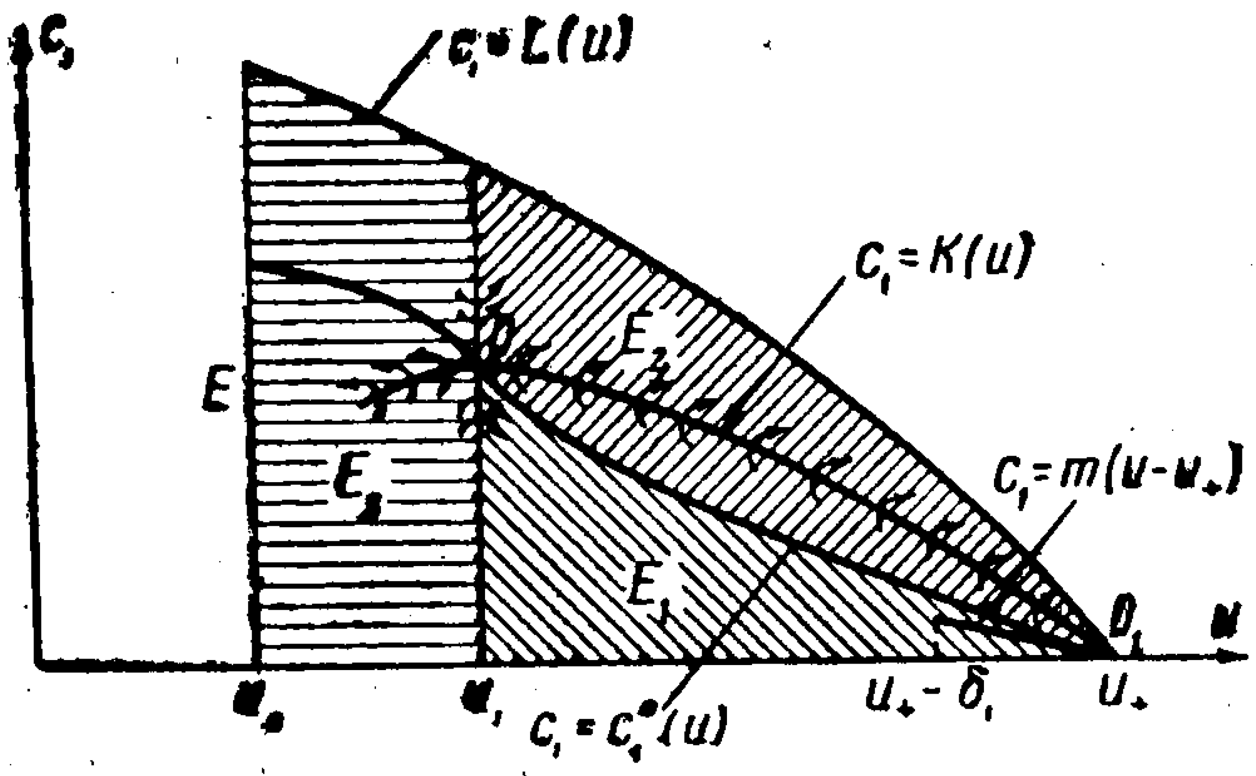
Пусть теперь $u \in [u_1, u_+)$. Тогда, согласно (1.4) и (1.8),

$$a(u)\,b(u) - \frac{a(u^*)}{b(u^*)} < a(u)\,b(u) - A\,/\,B < 0$$

Таким образом, при $u \in [u_1, u_+)$ имеем $\psi(u, 0) < 0$.

Функция $\psi(u, c_1)$ при любом фиксированном значении u линейно зависит от c_1 и имеет на верхней и нижней границах различные знаки при $u \in [u_1, u_+)$. Отсюда на $[u_1, u_+)$ внутри E найдется линия $c_1 = K(u)$ такая, что $\psi[u, K(u)] = 0$, при $c_1 \in [0, K(u))$ (область E_1) имеем $\psi < 0$, при $c_1 \in (K(u), L(u)]$ (область E_2) имеем $\psi > 0$. Очевидно, что

$$\lim_{u \to u_+ - 0} K(u) = 0$$



Вследствие того, что $a' < 0$ при $u \in (u_1, u_+)$ и $\varphi(u, c_1) < 0$ из (4.2), внутри E_1 имеем $c_1' < 0$.

Аналогично, внутри E_2 имеем $c_1' > 0$. Рассмотрим точку $O\,[u_1, K(u_1)]$. Согласно (4.2) эта точка является особой, поскольку в ней $a' = 0$ и $\psi = 0$. Способом, указанным в [5], устанавливаем, что точка O является седловиной, и наклон сепаратрисы имеет два ненулевых, различных по знаку значения. Рассмотрим сепаратрису $c_1^\circ(u)$, выходящую из точки O с отрицательным наклоном. Очевидно, что при движении вправо $c_1^\circ(u)$ попадает в область E_1 и не сможет пересечь на (u_1, u_+) ни $c_1 = 0$, в силу теоремы единственности, ни $c_1 = K(u)$ — в силу того, что $K'(u)$ конечно, а наклон интегральных линий (0.8) при $c_1 = K(u) - 0$ равен $-\infty$. Таким образом, $c_1^\circ(u)$ попадает в точку $O_1(u_+, 0)$. Последняя также является особой.

Докажем, что $c_1^\circ(u_+) < 0$. Рассмотрим функцию двух переменных

$$Z(u, m) = \frac{a'b\,[\lambda_1(m+1)(u - u_+) - v_1]}{(\lambda_2 - \lambda_1 b)\,am + \lambda_2 - \lambda_1 ab + (a - 1)\,bv_1\,(u - u_+)^{-1}}$$

Очевидно,

$$\lim_{\substack{u \to u_+ - 0 \\ m \to 0}} Z(u, m) = 0 \qquad (v_1(u_+) = 0)$$

$$\lim_{u \to u_+ - 0}\left[\lambda_2 - \lambda_1 ab + \frac{(a-1)\,bv_1}{u - u_+}\right] = \lambda_2 - \lambda_1 a(u_+)\,b(u_+) + [a(u_+) - 1]\,b(u_+)\,v_1'(u_+) =$$

$$= \frac{a(u_+)\,[1 - b^2(u_+)]\,[\lambda_2 - \lambda_1 b(u_+)]}{a - b^2} > 0$$

где $v_1'(u_+)$ из (0.9). Следовательно, существуют $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ такие, что

$$Z(u, m) < 1 \text{ при } u_+ - \delta_1 < u < u_+ \text{ и } -\delta_2 < m < 0 \qquad (4.3)$$

Выберем произвольное значение $m \in (-\min\{\delta_2, c_1^\circ(u_+ - \delta_1)/\,\delta_1\}, 0)$. Из условия $m > -c_1^\circ(u_+ - \delta_1)\,/\,\delta_1$ следует, что

$$c_1^\circ(u_+ - \delta_1) > -m\delta_1$$

При дальнейшем движении вправо линия $c_1^\circ(u)$ не сможет пересечь на $(u_+ - \delta_1, u_+)$ отрезок прямой $c_1 = m(u - u_+)$. Действительно, так как $0 > m > -\delta_2$, то (4.3) выполнено. Умножив (4.3) на m, убеждаемся, что собственный наклон рассматриваемого отрезка m меньше наклона интегральной линии в любой его точке $mZ(u, m)$. Следовательно,

$$c_1^{\circ\prime}(u_+) \leqslant m < 0$$

что и требовалось доказать.

Наконец, продолжим $c_1^\circ(u)$ из точки O_1 влево. Обозначим часть E, не вошедшую в E_1 и E_2, через E_3 (фигура). Аналогично тому, как было сделано при изучении областей E_1 и E_2, убеждаемся, что, в силу смены знака a' при переходе u через u_1, при

$$c_1 \in (\max\{0, K(u)\}, L(u))$$

имеем $c_1' < 0$, а для тех u, для которых $K(u) > 0$, при $c_1 \in (0, K(u))$ имеем $c_1' > 0$. В E_3 линия $c_1^\circ(u)$ не пересечет $L(u)$, так как на $L(u)$ наклон интегральных линий (0.7) равен нулю, а $L'(u) < 0$ при $u > u_0$.

Докажем, что $c_1^{\circ\prime}(u) < 0$ при $u \in [u_0, u_1)$. В силу непрерывности найдется такое $\delta > 0$, что при $u \in [u_1 - \delta, u_1]$ имеем $L(u) > K(u) > 0$.

Очевидно, что при $u \in [u_1 - \delta, u_1)$ линия $c_1^\circ(u)$ окажется выше, чем $K(u)$.

Остается доказать, что при дальнейшем движении влево $c_1^{\circ\prime} < 0$.

Предположим противное. Это означает, что в некоторой точке $u_2 \in [u_0, u_1 - \delta)$ либо $c_1^{\circ\prime} = 0$, либо $c_1^{\circ\prime} = \infty$. Пусть u_2 — ближайшая к $u_1 - \delta$ точка с указанной особенностью. Случай $c_1^{\circ\prime} = 0$ невозможен, так как на $(u_2, u_1 - \delta)$ имеем $c_1^{\circ\prime} < 0$, откуда $c_1^\circ(u_2) > c_1^\circ(u_1 - \delta) > 0$, в то же время $c_1^\circ(u_2) < L(u_2)$, и таким образом, имеем $a'\varphi[u_2; c_1(u_2)] \neq 0$.

Докажем, что случай $c_1^{\circ\prime} = \infty$ также невозможен. Действительно, если $u_2 > u_0$, то при $c_1 = K(u_2) + 0$ имеем $c_1' = -\infty$, при $c_1 = K(u_2) - 0$ имеем $c_1' = \infty$, $|K'(u_2)| < \infty$. Если же $u_2 = u_0$, то $K(u_0) = -\infty$, а $c_1(u_0) > 0$. Следовательно, никакая интегральная линия при движении справа налево не пересечет на $[u_0, u_1)$ линию $c_1 = K(u)$. Итак, доказано существование решения (0.8) $c_1 = c_1^\circ(u)$, удовлетворяющего следующим условиям:

$$\begin{gathered} c_1^\circ(u_+) = 0, \quad c_1^{\circ\prime}(u) < 0, \quad u \in [u_0, u_+], \quad 0 < c_1^\circ(u) \\ u \in [u_0, u_+), \quad c_1^\circ(u) < \frac{v_1}{\lambda_1} + u_+ - u, \quad u \in [u_0, u_+) \end{gathered} \tag{4.4}$$

Подставляя $\lambda = \lambda_1$, $c = c_1^\circ(u)$, $c' = c_1^{\circ\prime}(u)$, $v = v_1(u)$ в (0.4) находим $\beta(u)$. Из (4.4) следует, что $\beta(u) > 0$ при $u \in [u_0, u_+]$. Подставляя, кроме того, $v = v_1(u)$ и $v' = v_1'(u)$ в (0.4), получаем $f(u)$. Так как

$$v_1' - \lambda_1 < 0, \quad c_1 > 0, \quad v_1 > 0, \quad u \in (u_0, u_+)$$

получаем на указанном интервале $f(u) > 0$. В силу того, что

$$v'_1(u_+) - \lambda_1 < 0, \quad c^\circ_1(u_+) = 0, \quad c_1^{\circ\prime}(u_+) < 0, \quad v_1(u_+) = 0, \quad v_1'(u_+) < 0$$

из (0.4) по правилу Лопиталя получаем $f(u_+) > 0$. Из $v_1'(u_0) = \lambda_1$, $c_1^\circ(u_0) > 0$, $v_1(u_0) > 0$ получаем $f(u_0) = 0$. Доопределяем на $[0, u_0)$ функцию $f(u)$, полагая ее тождественно равной нулю, а также $\beta(u)$ произвольным образом при условии ее положительности и непрерывности.

Таким образом, найдено u_+, а также на $[u_0, u_+]$ найдены $f(u)$ и $\beta(u)$, удовлетворяющие ограничениям (0.3), при которых система (0.4), (0.5) имеет по крайней мере два решения:

$$\lambda = \lambda_1, \quad v = v_1(u), \quad c = c_1^\circ(u)$$

$$\lambda = \lambda_2, \quad v = v_2(u) = b(u)\, v_1(u), \quad c = c_2(u) = a(u)\, c_1^\circ(u)$$

Поступила 23 II 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Н. Б. К теории распространения пламени. Ж. физ. химии, 1948, т. 22, № 1.
2. Канель Н. И. О стационарных решениях для системы уравнений теории горения. Докл. АН СССР, 1963, т. 149, № 2.
3. Баренблатт Г. И., Зельдович Я. Б. Об устойчивости распространения пламени. ПММ, 1957, т. 21, вып. 6.
4. Гельфанд И. М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений. Успехи мат. наук, 1959, т. 14, № 2.
5. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. Гостехиздат, 1945.