

О МАЛЫХ ВЗМУЩЕНИЯХ КОНВЕКТИВНОГО ДВИЖЕНИЯ МЕЖДУ ВЕРТИКАЛЬНЫМИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ

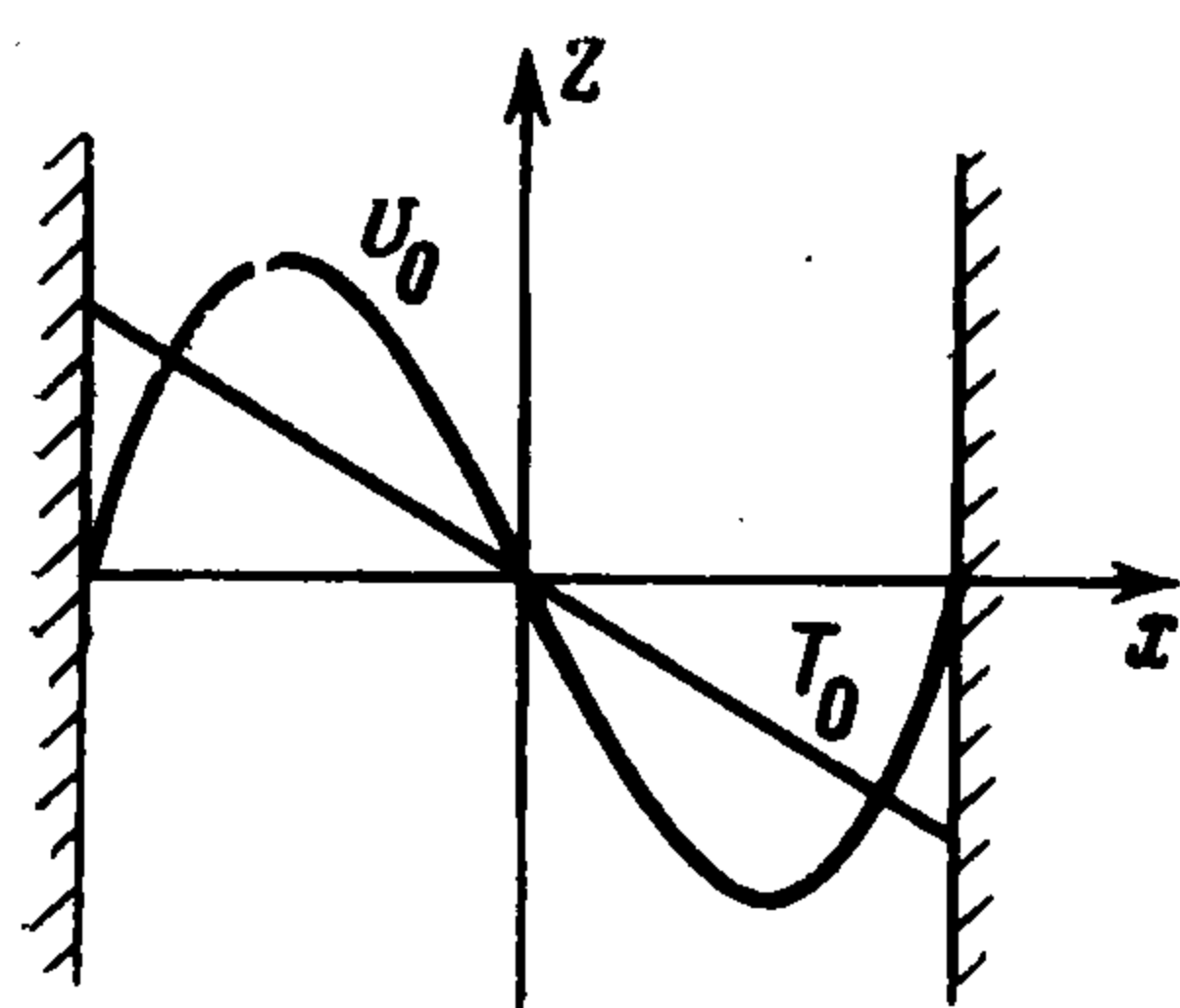
Р. Н. Рудаков (Пермь)

Рассматривается плоский вертикальный слой вязкой несжимаемой жидкости, заключенный между двумя бесконечными равномерно нагретыми плоскостями. Известно, что при сколь угодно малой разности температур между плоскостями начинается конвективное движение жидкости. Устойчивость данного движения исследовалась в работах [1, 2], где было рассмотрено поведение нейтральных возмущений и показано, что кризис стационарного течения вызывается монотонными и колебательными возмущениями при сравнительно малых значениях числа Грассгофа. Для исследования устойчивости был применен метод Галеркина. Решения составлялись из линейных комбинаций базисных функций — полиномов, удовлетворяющих граничным условиям. Лучшее приближение было использовано в работе [2], в которой для аппроксимации возмущений функции тока и температуры выбиралось по две базисных функции.

В данной статье исследуется поведение нормальных возмущений в покоящейся жидкости и конвективном потоке при малой разности температур между плоскостями. Возмущения и их декременты разлагаются в ряды по малому параметру — числу Грассгофа, а обычный метод теории возмущений позволяет определить собственные функции и спектры декрементов с учетом квадратичных поправок. Исследуется зависимость спектра от числа Прандтля P и показывается, что при $P \ll 1$ он переходит в спектр изотермической задачи [3]. Для установления характера пересечения уровней используется метод Галеркина в приближении четырех базисных функций. Полученные этим методом спектры декрементов позволяют также проследить за возникновением монотонной неустойчивости в достаточно широком интервале чисел Прандтля.

1. В бесконечном вертикальном канале шириной $2L$ при постоянной разности температур 2θ между плоскостями устанавливается стационарное движение с профилями безразмерной скорости $v_0 = 1/8 (x^3 - x)$ и безразмерной температуры $T_0 = -x$. Направление осей указано на фиг. 1.

Рассмотрим малые плоские возмущения скорости $u(x, z, t)$ и температуры $\vartheta(x, z, t)$. Функцию тока возмущений $\Psi(x, z, t)$ введем соотношениями $u_x = -d\Psi/dz$, $u_z = d\Psi/dx$. Из обычных уравнений свободной конвекции [4] получим для малых плоских возмущений краевую задачу



Фиг. 1

$$\Delta^2 \Psi - \frac{\partial}{\partial t} \Delta \Psi + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = G \left(v_0 \frac{\partial}{\partial z} \Delta \Psi - v_0'' \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)$$

$$\left(\Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{1}{P} \Delta \vartheta - \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = G \left(v_0 \frac{\partial \vartheta}{\partial z} - T_0' \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)$$

$$\left(G = \frac{g\beta\theta L^3}{\nu^2}, \quad P = \frac{\nu}{\kappa} \right)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \vartheta = 0 \quad \text{при } x = \pm 1 \quad (1.1)$$

Здесь G — число Грассгофа; P — число Прандтля; ν — кинематическая вязкость; g — ускорение свободного падения; β — коэффициент теплового расширения; уравнения записаны в безразмерных переменных; в качестве единиц расстояния, времени, температуры и скорости приняты соответственно величины L , L^2/ν , θ и $g\beta\theta L^2/\nu$.

Будем рассматривать нормальные возмущения вида

$$\Psi(x, z, t) = \Phi(x) e^{-(\lambda t + ikz)}, \quad \vartheta(x, z, t) = T(x) e^{-(\lambda t + ikz)} \quad (1.2)$$

Здесь k — вещественное положительное волновое число, λ — комплексный декремент, действительная часть которого характеризует быстроту нарастания (затухания) возмущений, а мнимая — их фазовую скорость. После подстановки (1.2) в (1.1)

получим уравнения для амплитуд возмущений

$$\begin{aligned} \Delta^2 \Phi + \lambda \Delta \Phi + T' &= a H \Phi, \quad \frac{1}{P} \Delta T + \lambda T = -a (v_0 T + \Phi) \\ \Phi(\pm 1) &= \Phi'(\pm 1) = T(\pm 1) = 0 \\ \Delta &= \frac{\partial}{\partial x^2} - k^2, \quad H \Phi = v_0'' \Phi - v_0 \Delta \Phi, \quad a = ikG \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по x .

2. При малой разности температур между плоскостями, т. е. при малых значениях параметра a , для определения спектра собственных значений λ и собственных функций краевой задачи (1.3) можно воспользоваться методом теории возмущений. Разложим амплитуды возмущений и декременты λ по степеням малого параметра a

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi^{(0)} + a \Phi^{(1)} + a^2 \Phi^{(2)} + \dots, \quad T = T^{(0)} + a T^{(1)} + a^2 T^{(2)} + \dots \\ \lambda &= \lambda^{(0)} + a^2 \lambda^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

В разложении декремента λ оставлены только четные степени a , поскольку λ не меняется при замене a на $-a$ для нечетных невозмущенных профилей скорости v_0 и температуры T_0 (аналогичным образом дело обстоит и в случае возмущений изотермических потоков с нечетным профилем [3]). Подставив разложения (2.1) в амплитудные уравнения (1.3) и выделив члены с параметром a в нулевой, первой, второй и т. д. степенях, получим уравнения последовательных приближений

$$\Delta^2 \Phi^{(0)} + \lambda^{(0)} \Delta \Phi^{(0)} + T^{(0)'} = 0, \quad P^{-1} \Delta T^{(0)} + \lambda^{(0)} T^{(0)} = 0 \quad (2.2)$$

$$\Delta^2 \Phi^{(1)} + \lambda^{(0)} \Delta \Phi^{(1)} + T^{(1)'} = H \Phi^{(0)}, \quad P^{-1} \Delta T^{(1)} + \lambda^{(0)} T^{(1)} = -v_0 T^{(0)} - \Phi^{(0)} \quad (2.3)$$

$$\Delta^2 \Phi^{(2)} + \lambda^{(0)} \Delta \Phi^{(2)} + T^{(2)'} = H \Phi^{(1)} - \lambda^{(2)} \Delta \Phi^{(0)}$$

$$P^{-1} \Delta T^{(2)} + \lambda^{(0)} T^{(2)} = -v_0 T^{(1)} - \Phi^{(1)} - \lambda^{(2)} T^{(0)} \quad (2.4)$$

Граничные условия вытекают из (1.3)

$$\Phi^{(n)}(\pm 1) = \Phi^{(n)'}(\pm 1) = T^{(n)}(\pm 1) = 0 \quad (2.5)$$

3. Уравнения нулевого приближения (2.2) описывают возмущения при $a = 0$, т. е. при одинаковой температуре плоскостей. Структура уравнений позволяет выделить два типа возмущений: 1) изотермические, для которых $T^{(0)} = 0$, и 2) неизотермические, соответствующие $T^{(0)} \neq 0$.

Для амплитуды и декрементов изотермических возмущений имеем

$$\Delta^2 \varphi^{(0)} + \mu^{(0)} \Delta \varphi^{(0)} = 0, \quad \varphi^{(0)}(\pm 1) = \varphi^{(0)'}(\pm 1) = 0 \quad (3.1)$$

Из (3.1) определяется спектр собственных функций определенной четности с дискретным спектром собственных значений $\mu_i^{(0)}$. Нормированные четные решения имеют вид

$$\varphi_i^{(0)} = \frac{\operatorname{ch} kx}{\operatorname{ch} k} - \frac{\operatorname{ch} \xi_i^{(0)} x}{\operatorname{ch} \xi_i^{(0)}} \quad (i = 0, 2, 4, \dots) \quad (\xi_i^{(0)2} = k^2 - \mu_i^{(0)} < 0) \quad (3.2)$$

Собственные значения $\mu_i^{(0)}$ находятся из характеристического уравнения

$$k \operatorname{th} k - \xi_i^{(0)} \operatorname{th} \xi_i^{(0)} = 0 \quad (i = 0, 2, 4, \dots) \quad (3.3)$$

Если в (3.2) заменить ch на sh и в (3.3) — th на cth , то получатся нечетные решения $\varphi_i^{(0)}$ со спектром $\mu_i^{(0)}$ ($i = 1, 3, 5, \dots$).

Все декременты $\mu_i^{(0)}$ вещественны и положительны [3]. Они не зависят от числа Прандтля и определяются только волновым числом k . При всех k декременты возрастают в последовательности $\mu_0^{(0)}, \mu_1^{(0)}, \mu_2^{(0)}, \dots$. Собственные функции удовлетворяют условию ортогональности

$$\int_{-1}^1 \varphi_i^{(0)} \Delta \varphi_k^{(0)} dx = 0 \quad (i \neq k) \quad (3.4)$$

Неизотермические возмущения описываются системой уравнений

$$\Delta^2 \Phi^{(0)} + \nu^{(0)} \Delta \Phi^{(0)} + T^{(0)'} = 0, \quad P^{-1} \Delta T^{(0)} + \nu^{(0)} T^{(0)} = 0 \quad (3.5)$$

с граничными условиями (2.5). Спектр декрементов $\nu_i^{(0)}$ и возмущений температуры $T_i^{(0)}$ определяется из уравнения теплопроводности (3.5)

$$\nu_i^{(0)} = P^{-1} [1/4 \pi^2 (i+1)^2 + k^2] \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

$$T_i^{(0)} = \begin{cases} \cos \rho_i^{(0)} x & (i = 0, 2, 4, \dots) \\ \sin \rho_i^{(0)} x & (i = 1, 3, 5, \dots) \end{cases} \quad \rho_i^{(0)2} = P \nu_i^{(0)} - k^2 > 0 \quad (3.6)$$

Возмущения температуры ортогональны

$$\int_{-1}^1 T_i^{(0)} T_k^{(0)} dx = 0 \quad (i \neq k) \quad (3.7)$$

Из-за наличия конвективных сил температурные возмущения приводят к возникновению возмущений скорости. Амплитуды возмущений скорости $\Phi_i^{(0)}$ находятся из (3.5) по известным $T_i^{(0)}$ и $\nu_i^{(0)}$, даваемым формулами (3.6). Четным возмущениям температуры соответствуют нечетные функции $\Phi_i^{(0)}$ ($i = 0, 2, 4, \dots$)

$$\Phi_i^{(0)} = \frac{(-1)^i \rho_i^{(0)} \sin \rho_i^{(0)}}{P(P-1) \nu_i^{(0)2}} \left[\frac{q_i^{(0)} \operatorname{ch} q_i^{(0)} \operatorname{sh} kx - k \operatorname{ch} k \operatorname{sh} q_i^{(0)} x}{k \operatorname{ch} k \operatorname{sh} q_i^{(0)} - q_i^{(0)} \operatorname{sh} k \operatorname{ch} q_i^{(0)}} + \frac{\sin \rho_i^{(0)} x}{\sin \rho_i^{(0)}} \right] \quad (P \neq 1)$$

$$\Phi_i^{(0)} = \frac{1}{2\nu_i^{(0)}} \left[\frac{(-1)^i}{k \operatorname{ch} k} (\rho_i^{(0)} \sin \rho_i^{(0)} \operatorname{sh} kx - \rho_i^{(0)} \operatorname{sh} k \sin \rho_i^{(0)} x) + x \cos \rho_i^{(0)} x \right] \quad (P = 1)$$

$$(q_i^{(0)2} = k^2 - \nu_i^{(0)})$$

Если в (3.8) сделать замену $\sin \leftrightarrow \cos$ и $\operatorname{sh} \leftrightarrow \operatorname{ch}$, то получатся четные функции $\Phi_i^{(0)}$ ($i = 1, 3, 5, \dots$), соответствующие нечетным возмущениям температуры.

Итак, в покоящейся жидкости возникают монотонно затухающие возмущения двух типов — изотермические, спектр декрементов которых не зависит от числа Прандтля, и неизотермические, декременты которых убывают с ростом числа Прандтля пропорционально $1/P$. При $P = 1$ ($k \neq 0$) в спектре чередуются неизотермические и изотермические уровни в порядке $\nu_0^{(0)}, \mu_0^{(0)}, \nu_1^{(0)}, \mu_1^{(0)}, \nu_2^{(0)}, \mu_2^{(0)}, \dots$ (фиг. 2, ϵ ; $G = 0$). При уменьшении или увеличении числа P происходит разрежение или сгущение спектра ν -уровней при фиксированном положении μ -уровней.

Так, при $P \ll 1$ нижнюю часть спектра образуют изотермические уровни, а при $P \gg 1$ нижние уровни — неизотермические (фиг. 2, δ, ζ ; $G = 0$).

4. Исследуем поведение возмущений в движущейся жидкости при малой разности температур между плоскостями. Поправки к собственным функциям нулевого приближения будем искать в виде разложений по полным системам функций $\{T_i^{(0)}\}$ и $\{\Phi_i^{(0)}\}$

$$T_i^{(n)} = \sum_k a_{ik}^{(n)} T_k^{(0)}, \quad \Phi_i^{(n)} = \sum_k b_{ik}^{(n)} \Phi_k^{(0)} \quad (4.1)$$

Приведем коэффициенты разложений (4.1), необходимые для вычисления квадратичных поправок «изотермических» и «неизотермических» возмущений: $\mu_i^{(2)}$ и $\nu_i^{(2)}$.

Для нахождения $\mu_i^{(2)}$ необходимо знать $T_i^{(1)}$, $\Phi_i^{(1)}$ и $T_i^{(2)}$. Соответствующие коэффициенты разложений находятся обычным образом из уравнений последовательных приближений (2.3), (2.4)

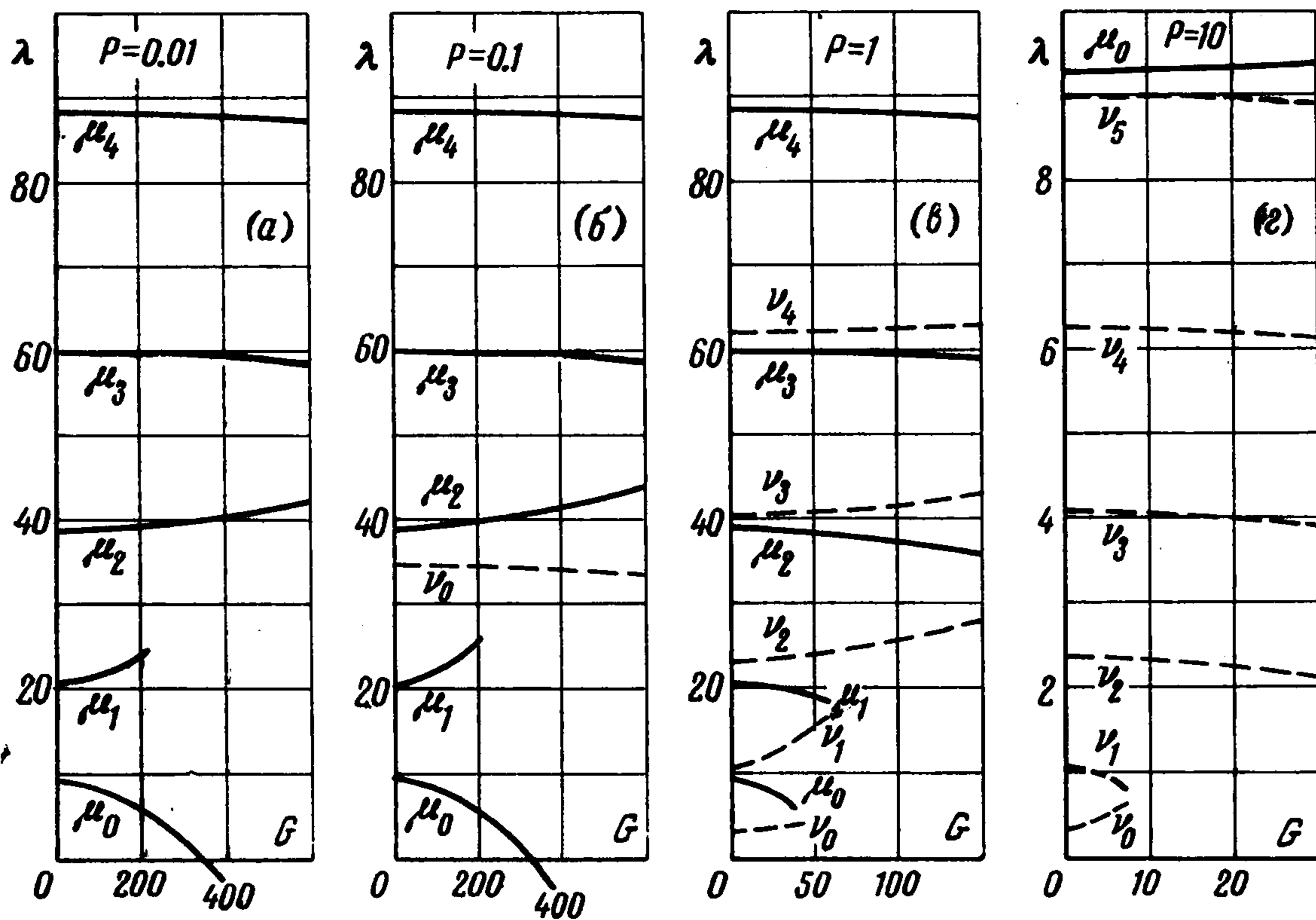
$$a_{ik}^{(1)} = - \frac{C_{ki}}{\mu_i^{(0)} - \nu_k^{(0)}}, \quad b_{ik}^{(1)} = \frac{1}{\mu_i^{(0)} - \mu_k^{(0)}} \left(H_{ki} + \sum_l \frac{C_{il} D_{lk}}{\mu_i^{(0)} - \nu_l^{(0)}} \right)$$

$$a_{ik}^{(2)} = \frac{1}{\mu_i^{(0)} - \nu_k^{(0)}} \left[\sum_l \frac{C_{li} B_{lk}}{\mu_i^{(0)} - \nu_l^{(0)}} - \sum_{m \neq i} \frac{C_{km}}{\mu_i^{(0)} - \mu_m^{(0)}} \left(H_{mi} + \sum_l \frac{C_{li} D_{lm}}{\mu_i^{(0)} - \nu_l^{(0)}} \right) \right] \quad (4.2)$$

Здесь введены следующие обозначения для матричных элементов:

$$\begin{aligned} H_{mn} &= \frac{1}{J_m} \int \varphi_m^{(0)} H \varphi_n^{(0)} dx, & D_{mn} &= \frac{1}{J_n} \int T_m^{(0)'} \varphi_n^{(0)} dx \\ C_{mn} &= \frac{1}{Y_m} \int T_m^{(0)} \varphi_n^{(0)} dx, & B_{mn} &= \frac{1}{Y_m} \int T_m^{(0)} v_0 T_n^{(0)} dx \\ J_m &= \int \varphi_m^{(0)} \Delta \varphi_m^{(0)} dx, & Y_m &= \int T_m^{(0)2} dx \end{aligned} \quad (4.3)$$

Интегрирование везде в пределах от -1 до 1 . Коэффициенты $b_{ii}^{(1)}$ равны нулю, что следует из условия нормировки в случае нечетного невозмущенного профиля скорости.



Фиг. 2

Для квадратичной поправки $\mu_i^{(2)}$ получим формулу

$$\begin{aligned} \mu_i^{(2)} &= \sum_{m \neq i} \frac{H_{im} H_{mi}}{\mu_i^{(0)} - \mu_m^{(0)}} + \sum_{m \neq i} \sum_n \frac{H_{im} C_{ni} D_{nm} + H_{mi} D_{ni} C_{nm}}{(\mu_i^{(0)} - \mu_m^{(0)}) (\mu_i^{(0)} - \nu_n^{(0)})} - \\ &- \sum_n \sum_l \frac{D_{ni} C_{li}}{(\mu_i^{(0)} - \nu_n^{(0)}) (\mu_i^{(0)} - \nu_l^{(0)})} \left(B_{nl} - \sum_{m \neq i} \frac{C_{nm} D_{lm}}{\mu_i^{(0)} - \mu_m^{(0)}} \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Аналогичные формулы получаются и для «неизотермических» возмущений

$$\begin{aligned} b_{ik}^{(0)} &= -\frac{D_{ik}}{\nu_i^{(0)} - \mu_k^{(0)}}, & a_{ik}^{(1)} &= \frac{1}{\nu_i^{(0)} - \nu_k^{(0)}} \left(-B_{ki} + \sum_l \frac{D_{il} C_{kl}}{\nu_i^{(0)} - \mu_l^{(0)}} \right) \\ b_{ik}^{(1)} &= -\frac{1}{\nu_i^{(0)} - \mu_k^{(0)}} \left[\sum_l \frac{D_{il} H_{kl}}{\nu_i^{(0)} - \mu_l^{(0)}} + \sum_{m \neq i} \frac{D_{mk}}{\nu_i^{(0)} - \nu_m^{(0)}} \left(-B_{mi} + \sum_l \frac{D_{il} C_{ml}}{\nu_i^{(0)} - \mu_l^{(0)}} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$v_i^{(2)} = \sum_{m \neq i} \frac{B_{im} B_{mi}}{v_i^{(0)} - v_m^{(0)}} - \sum_{m \neq i} \sum_n \frac{B_{im} D_{in} C_{mn} + B_{mi} C_{in} D_{mn}}{(v_i^{(0)} - v_m^{(0)}) (v_i^{(0)} - \mu_n^{(0)})} +$$

$$+ \sum_n \sum_l \frac{C_{in} D_{il}}{(v_i^{(0)} - \mu_n^{(0)}) (v_i^{(0)} - \mu_l^{(0)})} \left(H_{nl} + \sum_{m \neq i} \frac{D_{mn} C_{ml}}{v_i^{(0)} - v_m^{(0)}} \right) \quad (4.6)$$

где $a_{ii}^{(1)} = 0$ из условия нормировки, а все матричные элементы определяются формулами (4.3). Явные выражения матричных элементов громоздки и здесь не приводятся.

Суммирование ведется по невозмущенным μ - и ν -уровням. Эти суммы в поправках к данному уровню характеризуют соответственно его взаимодействие с изотермическими и неизотермическими уровнями.

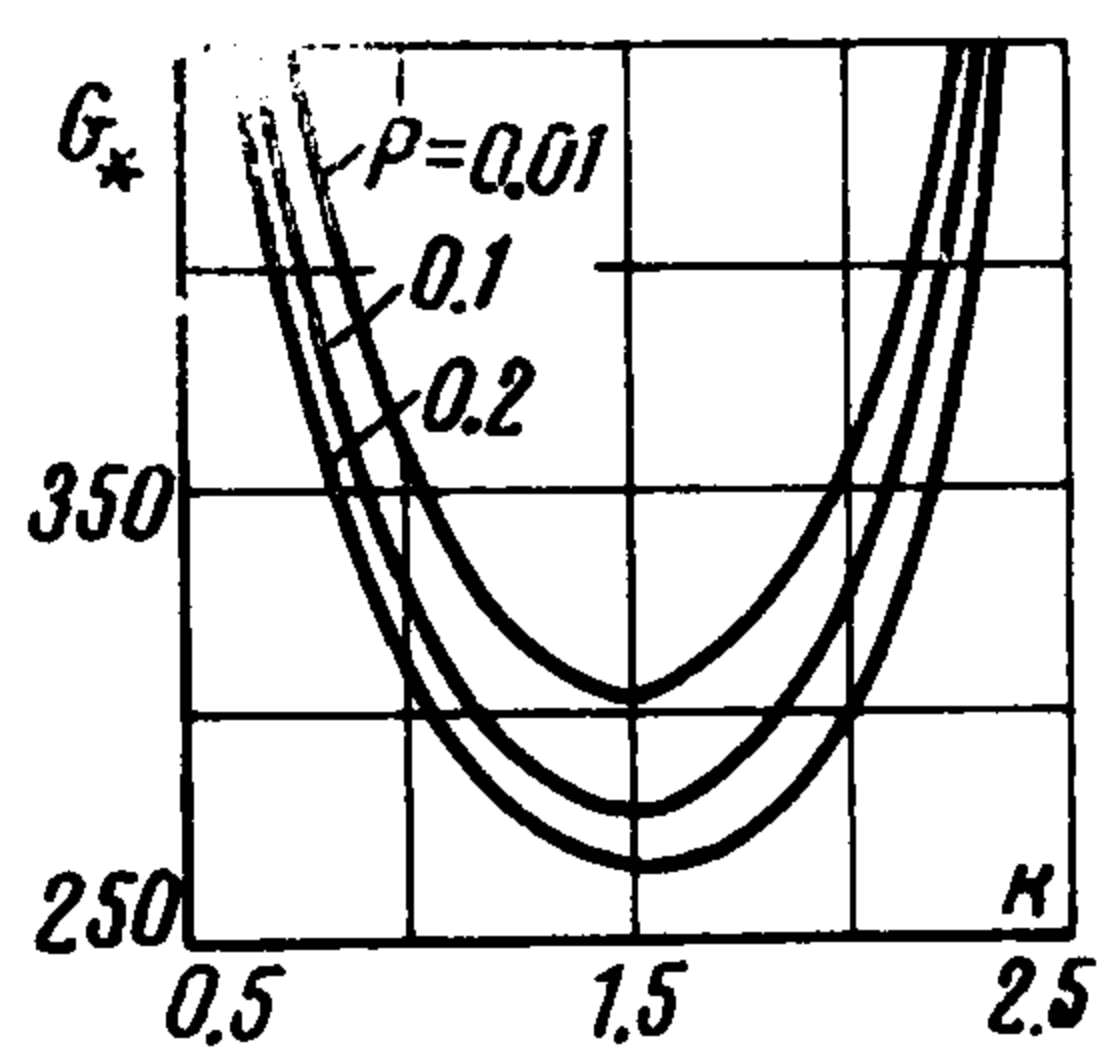
В предельном случае при $P \rightarrow 0$ декременты $v_i^{(0)} \rightarrow \infty$ и поправки к «изотермическим» возмущениям и их декрементам переходят в соответствующие формулы работы [3] (для случая нечетного профиля).

Формулы (2.1) и (4.1) — (4.6) позволяют найти спектр декрементов и собственных функций возмущений при малых числах Грассгофа.

При определенных значениях параметров P и k может иметь место «вырождение» в невозмущенном спектре — совпадение декрементов изотермических и неизотермических возмущений, $v_i^{(0)} = \mu_k^{(0)}$. Поправки к такому вырожденному уровню не могут быть найдены при помощи обсуждаемых разложений; как видно из приведенных формул, они теряют смысл в случае вырождения.

5. Квадратичные поправки к декрементам считались на ЭВМ «Арагац» в приближении 24 (12 + 12) базисных функций. На фиг. 2 приводятся спектры декрементов с учетом квадратичных поправок при $k = 1$. Сплошными линиями изображены «изотермические» уровни, пунктирными — «неизотермические»¹.

При малых значениях числа Прандтля P (фиг. 2, а, б) нижнюю часть спектра занимают уровни «изотермических» возмущений. «Неизотермические» возмущения ока-



Фиг. 3

зывают на них незначительное влияние. Формально это выражается тем, что суммы по ν -уровням в формуле (4.4) дают малый вклад в поправки к μ -уровням. В сущности, $\mu_i^{(2)}$ определяется при малых P только первой суммой в правой части; эта сумма описывает взаимодействие i -го уровня с другими изотермическими уровнями. Спектр на фиг. 2, а, почти совпадает со спектром гидродинамической задачи с данным стационарным профилем скорости [3].

При увеличении числа Прандтля P вид спектра существенно изменяется (фиг. 2, в, г). При $P = 1$ в спектре чередуются уровни разного типа, поэтому взаимное влияние «изотермических» и «неизотермических» возмущений становится здесь определяющим. На фиг. 2, в, видно, что с ростом G устойчивость «изотермических» возмущений понижается, а «неизотермических» — повышается.

При больших значениях числа P (фиг. 2, г) в нижней части спектра расположены «неизотермические» уровни. В отличие от случая малых чисел P , на поведение нижних уровней значительное влияние оказывают уровни другого типа — «изотермические». Это легко установить из формулы для квадратичных поправок $v_i^{(2)}$ (4.6), где суммы по μ -уровням остаются существенными и при больших P .

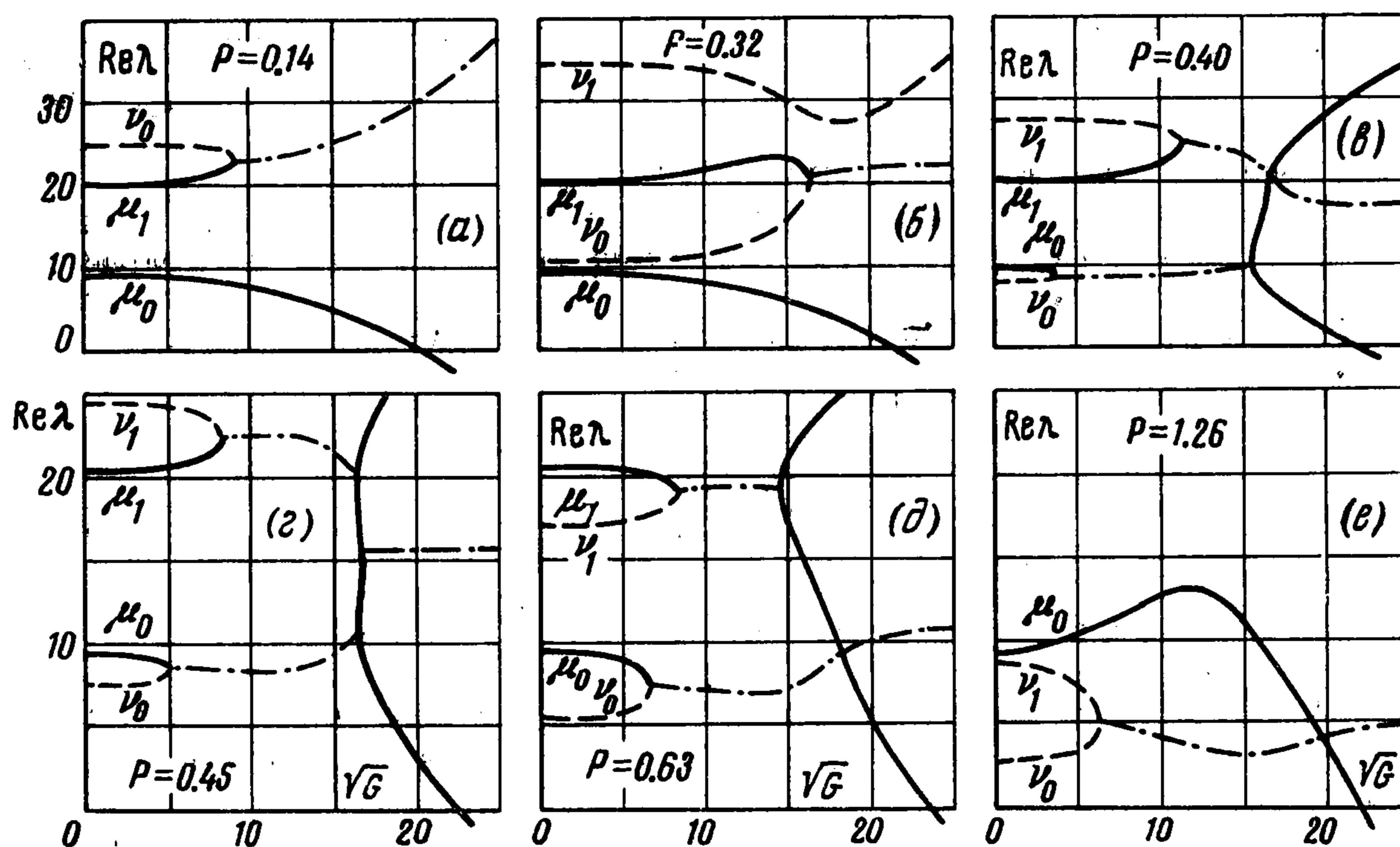
В случае малых чисел P (фиг. 2, а, б) нижний «изотермический» уровень может быть продолжен до пересечения с осью G . Точка пересечения позволяет приближенно найти число Грассгофа для нейтрального возмущения с данным k . На фиг. 3 приведены полученные таким образом нейтральные кривые для различных чисел P . Критические числа Грассгофа близки к полученным в работе [2].

¹ Здесь следует подчеркнуть условность термина «изотермический» уровень, поскольку при $G \neq 0$ этому уровню соответствует отличное от нуля возмущение температуры (см. (4.2)).

6. Рассмотренные разложения не позволяют исследовать пересечения в спектре возмущений; кроме того, как указывалось, разложения теряют смысл при наличии вырождения в невозмущенном спектре. Для выяснения характера спектра в этих случаях можно воспользоваться методом Галеркина, причем в качестве базисных функций удобны $\varphi^{(0)}$ и $T^{(0)}$. Аппроксимация

$$\Phi = c_0\varphi_0^{(0)} + c_1\varphi_1^{(0)}, \quad T = d_0T_0^{(0)} + d_1T_1^{(0)} \quad (6.1)$$

дает при $G = 0$ точные значения четырех декрементов; $\mu_0^{(0)}$, $\mu_1^{(0)}$, $\nu_0^{(0)}$ и $\nu_1^{(0)}$. При $G \neq 0$ из приближенного решения получается, по крайней мере, качественная картина пересечения четырех рассматриваемых уровней.



Фиг. 4

На фиг. 4 приведены полученные в приближении (6.1) спектры декрементов для волнового числа $k = 1$ и некоторых значений числа Прандтля в интервале $0.14 \leq P \leq 1.26$ (в этом интервале пересекающиеся уровни являются нижними в спектре). При увеличении числа P меняется расположение уровней, причем при определенных значениях P происходит вырождение невозмущенных $\nu^{(0)}$ - и $\mu^{(0)}$ -уровней. На фиг. 4 вещественные μ - и ν -уровни, выходящие с оси $G = 0$, изображены соответственно сплошными и пунктирными линиями. При слиянии вещественных уровней образуется пара комплексно-сопряженных декрементов, описывающих колебательные возмущения; общая действительная часть этих декрементов изображается штрих-пунктирными линиями.

Как видно из фиг. 4, в спектре отсутствуют «простые» пересечения вещественных уровней. Слияние вещественных уровней приводит к образованию при некотором критическом значении G пары комплексно-сопряженных декрементов. Кроме того, при пересечении μ - и ν -уровней возможны также случаи «расщепления» комплексно-сопряженной пары на два вещественных уровня по мере достижения параметром G второго критического значения (фиг. 4, *e, z, d*). Особые точки такого рода отсутствуют в спектрах возмущений изотермических потоков; по-видимому, они специфичны для конвективной задачи. На фиг. 4, *z*, можно видеть, как два вторичных вещественных уровня вновь сливаются, образуя пару колебательных возмущений.

Вырождение невозмущенного спектра соответствует таким значениям параметров, при которых особые точки оказываются на оси $G = 0$. Так, в трех случаях вырождения ($\mu_1^{(0)} = \nu_0^{(0)}$, $\mu_0^{(0)} = \nu_0^{(0)}$ и $\mu_1^{(0)} = \nu_1^{(0)}$) пара комплексно-сопряженных декрементов появляется при сколь угодно малом G ; в случае $\mu_0^{(0)} = \nu_1^{(0)}$ вырожденный уровень при сколь угодно малых G расщепляется на два вещественных.

Из фиг. 4 видно, что в рассматриваемом интервале значений числа Прандтля P имеется монотонная неустойчивость, причем ее возникновение связано с «изотермическими» возмущениями: ось G пересекается либо вещественным μ -уровнем, либо одним из вещественных уровней, образовавшихся при «распаде» комплексно-сопряженной пары. Интересно, что хотя с изменением числа P в рассматриваемом интервале P спектр перестраивается довольно существенно, критическое значение числа Грассгофа, определяющее нейтральное возмущение, меняется слабо.

Автор благодарит Г. З. Гершуни за постановку задачи и помощь в работе.

Поступила 9 XI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З. Об устойчивости плоского конвективного движения жидкости. Ж. техн. физ. 1953, т. 23, № 10.
2. Гершуни Г. З., Жуовицкий Е. М. О двух типах неустойчивости конвективного движения между параллельными вертикальными плоскостями. Изв. высш. учебн. завед., Физика, 1958, № 4.
3. Бирх Р. В., Гершуни Г. З., Жуовицкий Е. М. О спектре возмущений плоскопараллельных течений при малых числах Рейнольдса. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1954.

О НЕЕДИНСТВЕННОСТИ СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ГОРЕНИЯ

Р. Д. Бачелис, В. Г. Меламед (Москва)

Как известно [1], одномерный процесс горения газовой смеси описывается нелинейной системой дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha(U) \frac{\partial U}{\partial x} \right] + F(U)C, \quad \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha_1(U) \frac{\partial C}{\partial x} \right] - F(U)C \quad (0.1)$$

$$F(U) \equiv 0, \quad u \in [0, U_0], \quad F(U) > 0, \quad U > U_0$$

Здесь U — температура смеси, $C \geq 0$ — концентрация активного вещества, $F(U)C$ — скорость реакции, $\alpha(U) > 0$ — коэффициент теплопроводности, $\alpha_1(U) > 0$ — коэффициент диффузии.

Ищем решение системы специального вида, называемое стационарным

$$U = u(y), \quad C = c(y), \quad y = x + \lambda t, \quad \lambda = \text{const} > 0$$

удовлетворяющее условиям

$$u(-\infty) < u(y) < u(\infty), \quad c(-\infty) > c(y) > c(\infty)$$

При этом система (0.1) примет вид

$$\lambda \frac{du}{dy} = \frac{d}{dy} \left[\alpha(u) \frac{du}{dy} \right] + F(u)c, \quad \lambda \frac{dc}{dy} = \frac{d}{dy} \left[\alpha_1(u) \frac{dc}{dy} \right] - F(u)c \quad (0.2)$$

причем легко доказать, что $u'(y) > 0$ при всех y . Задаем для решения системы (0.2) следующие условия:

$$u(-\infty) = 0, \quad c(-\infty) = c_0 > 0, \quad c(\infty) = 0$$

Из существования $u(\pm\infty)$ и $c(\pm\infty)$ следует, что $c'(\pm\infty) = u''(\pm\infty) = 0$, если последние существуют. Из (0.2) имеем

$$\lambda [c(y) + u(y) - c_0 - u(-\infty)] = \alpha(u) du / dy + \alpha_1(u) dc / dy$$

Отсюда, в свою очередь,

$$c(-\infty) + u(-\infty) = c(\infty) + u(\infty), \quad \text{или} \quad u(\infty) = u_+ = c_0$$