

Однако, исследование для клина (на некотором расстоянии от вершины), где удается получить решение в аналитической форме, показало, что условий на скачке второго варианта не достаточно для единственности решения в сверхзвуковой части течения. (Отсюда следует, что метод характеристик в форме, предложенной в [1], не является корректным.

В связи с этим можно предположить, что в трансзвуковой области нужно использовать условия на скачке второго варианта, а после предельных характеристик — условия первого варианта. Но такое построение, хотя оно возможно, представляется автору искусственным, и по этой причине он отказывается от использования условий второго варианта. Правильное решение вопроса будет, видимо, таким.

Следует использовать условия на скачке первого варианта. Если в трансзвуковой области возникает особая линия, то нужно будет ввести дополнительно промежуточное разложение по  $\varepsilon$  в ее окрестности. Нужно также выяснить насколько правомерным является предположение  $u_1 = v_1 = 0$  ( $p_1 = \rho_1 = T_1 = 0$ )  $n = 0$ . Более общим является предположение третьего варианта, в котором впереди скачка имеются возмущения  $O(\varepsilon)$ .

В заключение хотелось бы обратить внимание на следующее обстоятельство. При нахождении возмущений течения газа вследствие скорости вытеснения часто используют нелинейные уравнения невязкого газа, но контур тела соответственно изменяют. Следует, видимо, использовать линейные уравнения для возмущений, поскольку, как показывают примеры в [3], результаты решения нелинейных систем и линейных систем для возмущений для трансзвуковых задач могут существенно различаться.

Поступила 25 II 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Булах Б. М. К теории обтекания тупоносого тела гиперзвуковым потоком вязкого газа. ПММ, 1964, т. 28, вып. 6.
2. Van Dyke M. Second-order compressible boundary layer theory with application to the blunt bodies in hypersonic flow Hypersonic, Flow Research, Academic Press N.—Y., London, 1962, pp. 37—76.
3. Vaglio-Laurin R. On the PIK method and the supersonic bluntbody problem, J. Aero Space Sci., 1962, vol. 29, No 2, p. 185—206, 248.

### О МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ТЕЧЕНИЯ С КУБИЧЕСКИМ ПРОФИЛЕМ СКОРОСТИ

Р. В. Бирих (Пермь)

Исследовано поведение малых возмущений в плоскопараллельном антисимметричном стационарном течении с кубическим профилем скорости. Такое течение возникает в вязкой жидкости, заключенной между вертикальными параллельными плоскостями, нагретыми до разной температуры [1]. В предельном случае малых чисел Прандтля тепловыми возмущениями можно пренебречь, и проблема устойчивости становится чисто гидродинамической. Наличие точки перегиба в профиле основного течения приводит к неустойчивости течения уже в невязком приближении [2]. Численное решение уравнения Орра — Зоммерфельда для возмущений рассматриваемого течения, результаты которого представлены в работе, обнаруживает в вязком приближении монотонную неустойчивость, наступающую при сравнительно небольших значениях числа Рейнольдса  $R$ .

В работе приведены результаты расчета спектра декрементов нормальных возмущений в области чисел  $\alpha R$  от 0 до 1500 при различных значениях волнового числа  $\alpha$  и нейтральная кривая монотонной неустойчивости. Для значений  $\alpha = 1$  и  $R = 1000$  найдены функции тока для монотонного возмущения, растущего со временем, и затухающего колебательного возмущения.

1. Рассмотрим устойчивость плоскопараллельного течения вязкой несжимаемой жидкости между плоскостями  $x = \pm h$ . Пусть

$$v_z = U_0 \left[ \frac{x}{h} - \left( \frac{x}{h} \right)^3 \right]$$

профиль скорости основного движения;  $z$  — координата вдоль течения. Такое движение возникает в однородной жидкости под действием массовой силы, линейно зависящей от координаты  $x$  и не зависящей от  $z$ . Если за единицы измерения скорости, расстояния и времени взять соответственно  $U_0$ ,  $h$  и  $h^2/\nu$  ( $\nu$  — кинематическая вязкость), а функцию тока малого нормального возмущения записать в виде  $\Psi(x, z, t) = \varphi(x) \exp(-\lambda t + i\alpha z)$

(где  $\alpha$  — вещественное волновое число,  $\lambda$  — комплексный декремент возмущения), то для амплитуды возмущения  $\varphi(x)$  получим уравнение Орра — Зоммерфельда

$$\varphi^{IV} - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi = i\alpha R \left[ \left( U - \frac{c}{R} \right) (\varphi'' - \alpha^2\varphi) - U''\varphi \right] \quad (1.1)$$

$$\left( R = \frac{U_0 h^2}{\nu}, \quad \lambda = i\alpha c, \quad c = c_r + ic_i, \quad U = x - x^3 \right)$$

с граничными условиями

$$\varphi = \varphi' = 0 \quad \text{при } x = \pm 1 \quad (1.2)$$

Краевую задачу (1.1), (1.2) будем решать методом Галёркина. Положим

$$\varphi(x) = c_0\varphi_0^{(0)} + c_1\varphi_1^{(0)} + \dots + c_N\varphi_N^{(0)} \quad (1.3)$$

В качестве системы базисных функций  $\varphi_n^{(0)}$  возьмем полную систему амплитуд нормальных возмущений в покоящейся жидкости; эти функции и соответствующие им декременты  $\lambda_n^{(0)}$  приведены в [3] <sup>1</sup>. Стандартная процедура метода приводит к системе однородных алгебраических уравнений для коэффициентов разложения (1.3)

$$\sum_{n=0}^N c_n \{ (\lambda_m - \lambda_n^{(0)}) \delta_{mn} + i\alpha R H_{mn} \} = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (1.4)$$

Матричные элементы  $H_{mn}$  из-за нечетности профиля скорости основного течения отличны от нуля только для индексов разной четности и для четного  $n$  равны

$$H_{mn} = \frac{3}{I_n} [A_{mn} \alpha \operatorname{th} \alpha - B_{mn} \alpha \operatorname{cth} \alpha + C_{mn}] \quad (1.5)$$

$$I_n = \frac{\lambda_n^{(0)}}{4(\alpha^2 - \lambda_n^{(0)})} (\alpha^2 + \alpha \operatorname{th} \alpha - \alpha^2 \operatorname{th}^2 \alpha - \lambda_n^{(0)})$$

$$A_{mn} = -\frac{4\alpha^2}{\lambda_n^{(0)^2} - 4\alpha^2} + \frac{1}{\lambda_m^{(0)}} + \frac{4\alpha^2\lambda_n^{(0)} - 5\lambda_n^{(0)}\lambda_m^{(0)} + \lambda_m^{(0)^2}}{(\lambda_n^{(0)} - \lambda_m^{(0)})^3}$$

$$B_{mn} = \frac{2\lambda_n^{(0)} - 4\alpha^2}{\lambda_n^{(0)^2} - 4\alpha^2} + \frac{1}{4\alpha^2} + \frac{1}{\lambda_m^{(0)}} + \frac{4\alpha^2\lambda_n^{(0)} - 3\lambda_n^{(0)}\lambda_m^{(0)} + \lambda_m^{(0)^2} - 2\lambda_n^{(0)^2}}{(\lambda_n^{(0)} - \lambda_m^{(0)})^3}$$

$$C_{mn} = \frac{\lambda_m^{(0)}(\lambda_m^{(0)} - 3\lambda_n^{(0)})}{3(\lambda_n^{(0)} - \lambda_m^{(0)})^2} + \frac{4\alpha^2}{\lambda_n^{(0)^2} - 4\alpha^2} + \frac{1}{4\alpha^2} + \frac{1}{\lambda_m^{(0)}} - \frac{\lambda_m^{(0)^3 - 2\lambda_n^{(0)}\lambda_m^{(0)^2 - 7\lambda_n^{(0)^2}\lambda_m^{(0)} + 4\alpha^2\lambda_n^{(0)}(\lambda_n^{(0)} - \lambda_m^{(0)})}{(\lambda_n^{(0)} - \lambda_m^{(0)})^4}$$

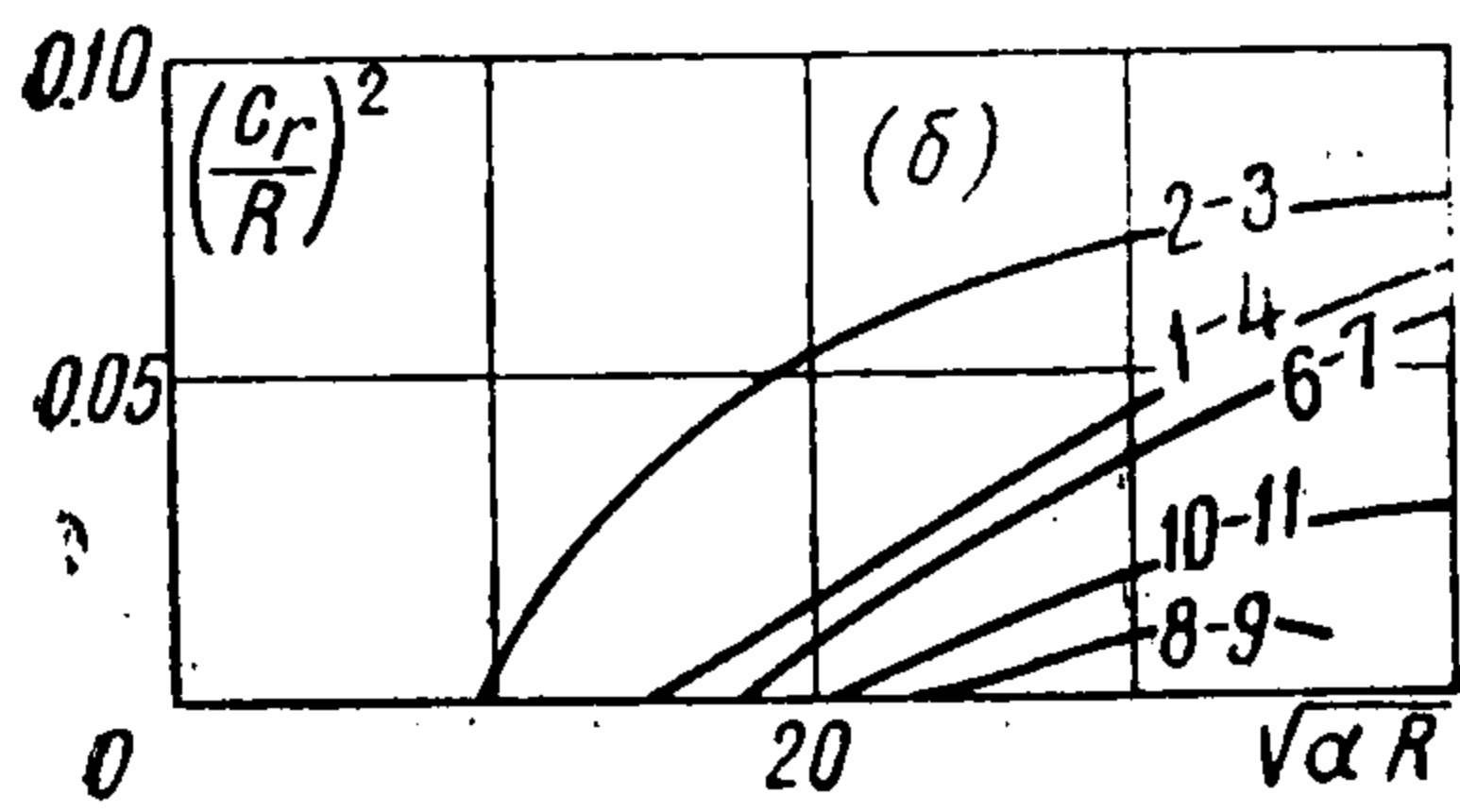
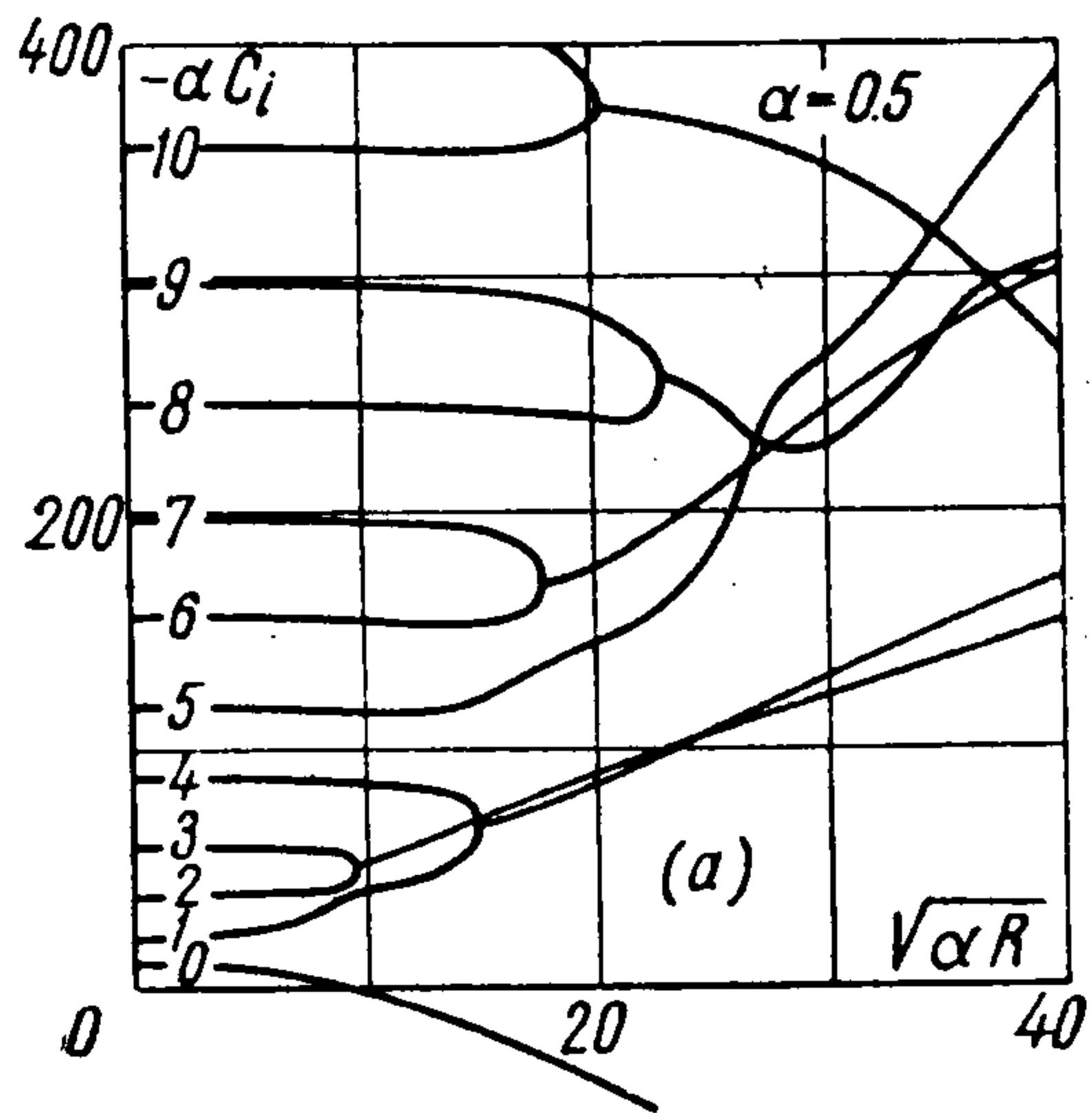
$$(m = 1, 3, 5, \dots; n = 0, 2, 4, \dots)$$

Матричные элементы для нечетных  $n$  получаются из (1.5) заменой всех  $\operatorname{th} \alpha$  и  $\operatorname{cth} \alpha$  на  $\operatorname{ctg} \alpha$  и  $\operatorname{tg} \alpha$  соответственно.

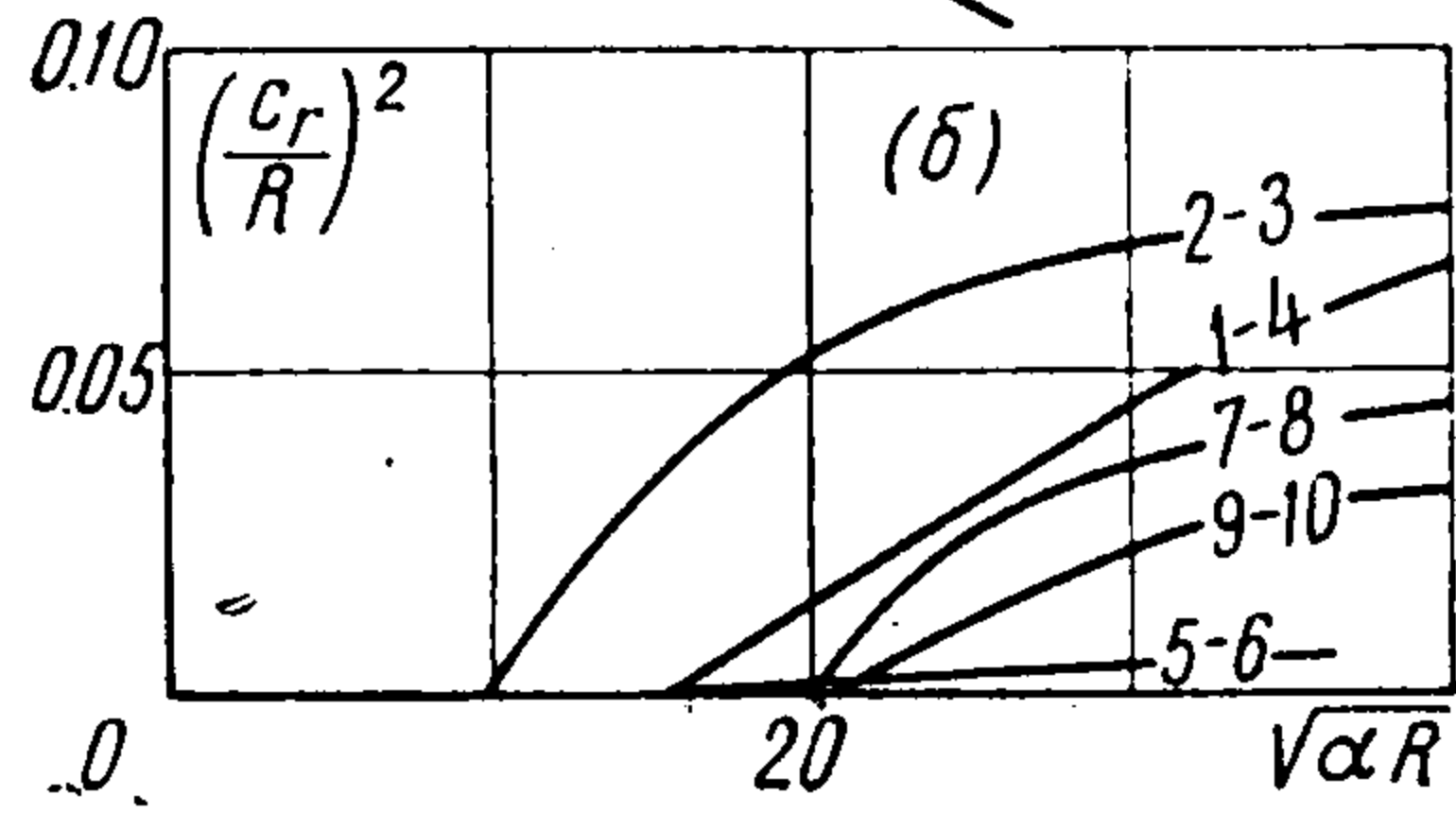
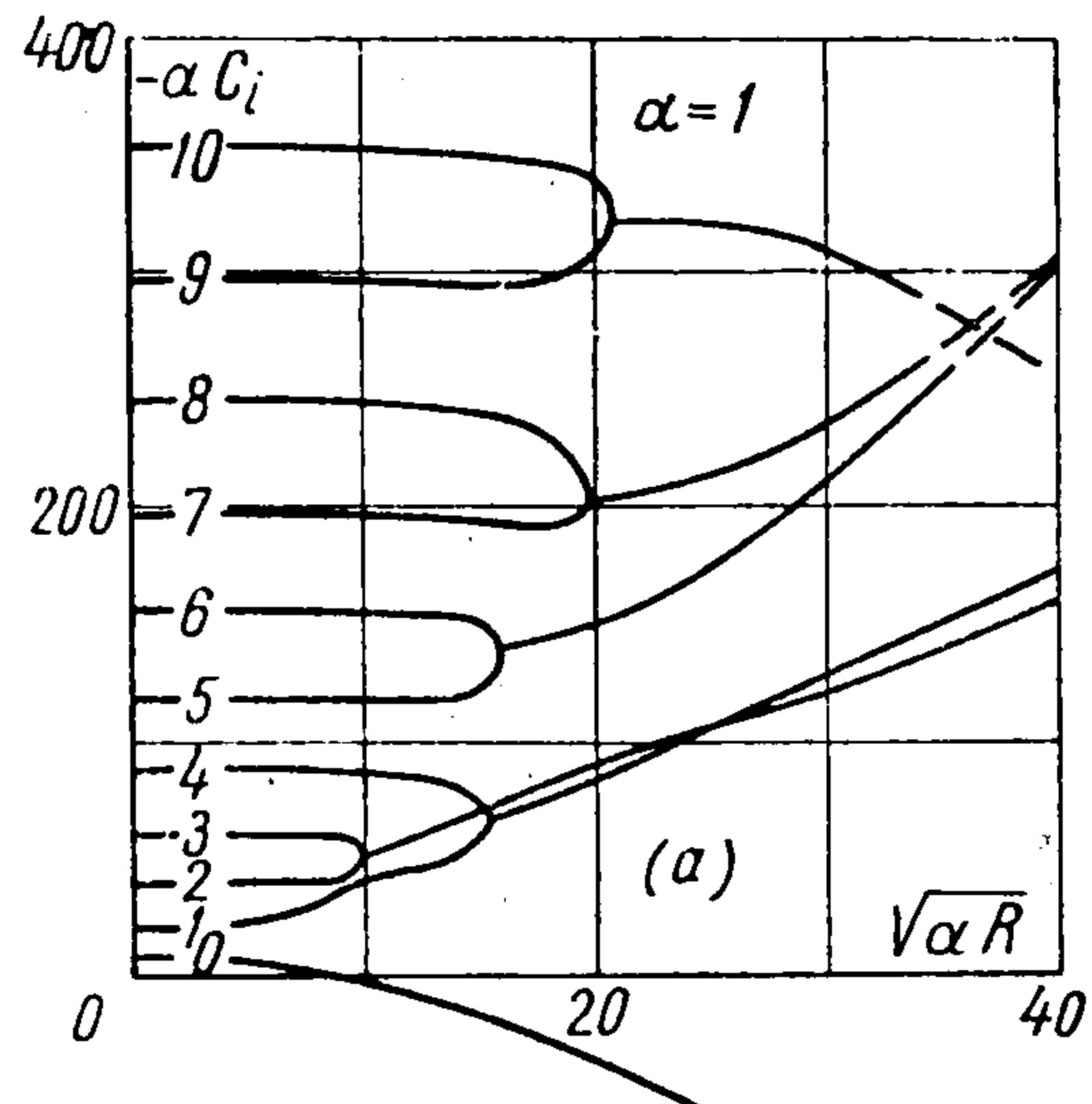
При больших значениях числа  $R$  решение краевой задачи (1.1), (1.2) может иметь сложный характер. Поэтому для нахождения приближенного решения (1.3) требуется

<sup>1</sup> Используемый базис для исследования задач гидродинамической устойчивости был впервые применен Г. И. Петровым [4].

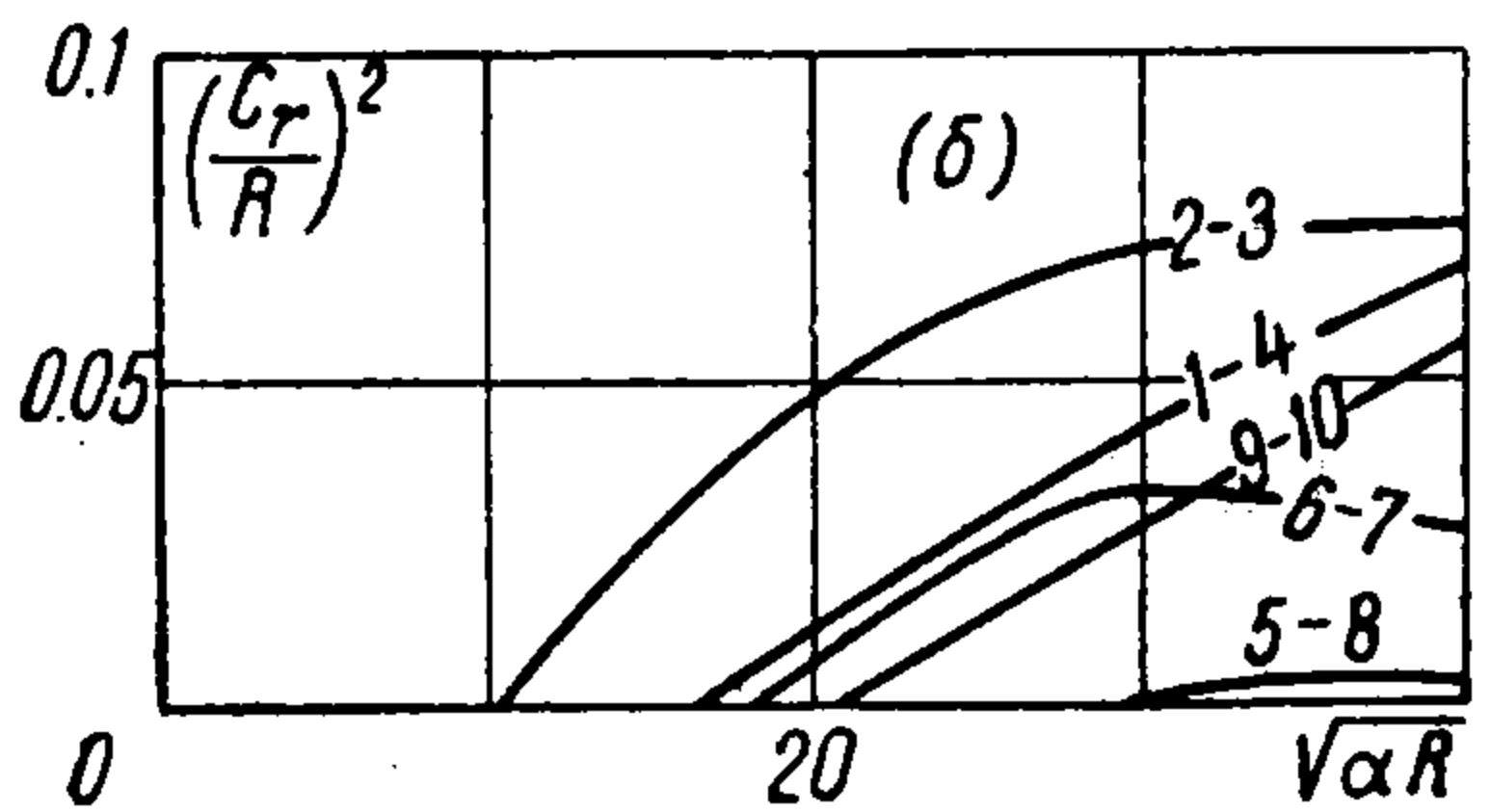
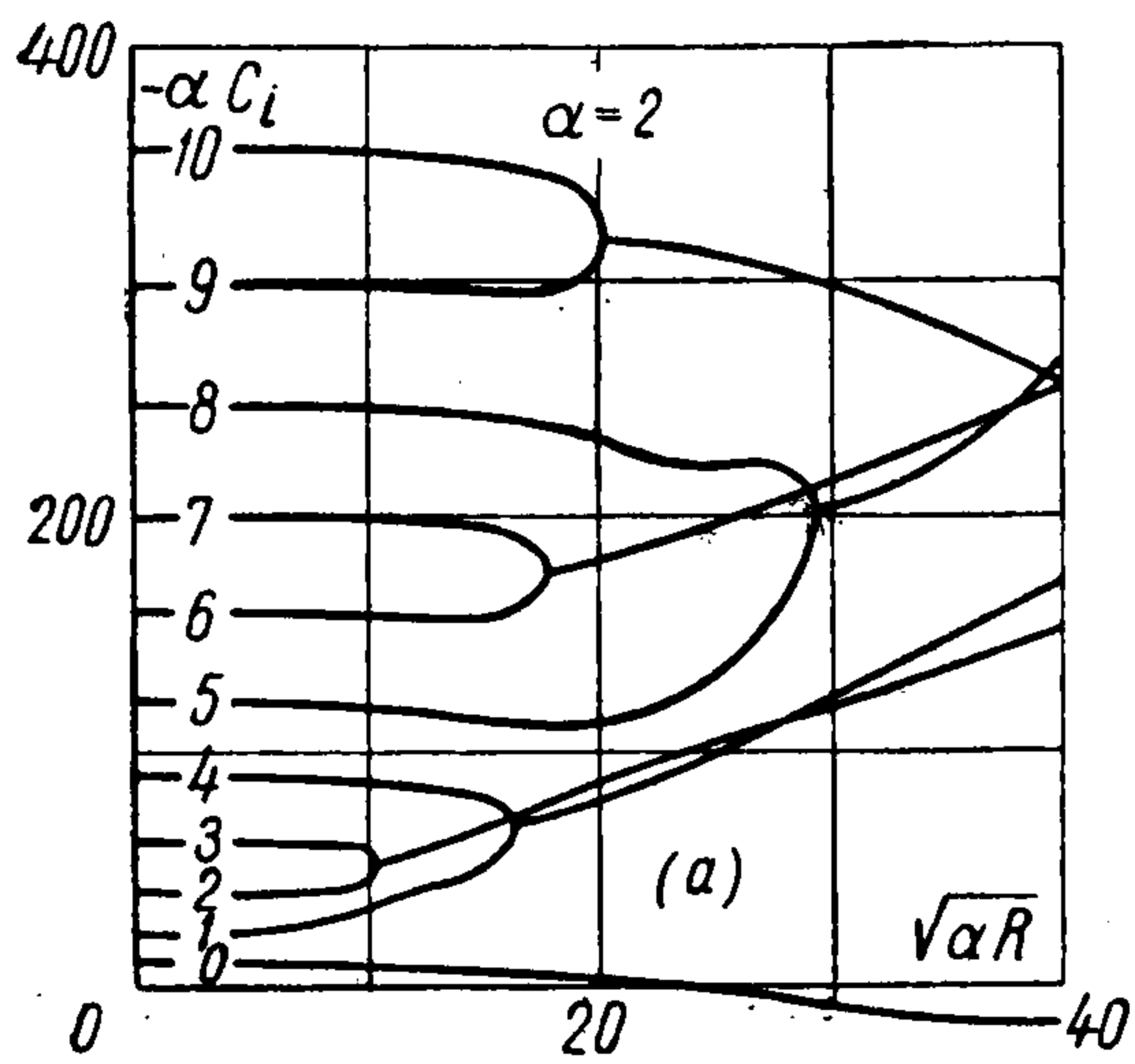
брать большое число базисных функций. В данном расчете максимальное число используемых базисных функций равнялось 18. Это позволило с достаточной точностью найти зависимость 11 нижних уровней спектра от  $\alpha R$  в области  $0 < \alpha R < 1500$ . Сходимость метода оценивалась сравнением результатов в приближениях, содержащих 14, 16, 17 и 18 базисных функций для волнового числа  $\alpha = 1$ . Приближения с 16–18 функциями в указанной области практически совпадают.



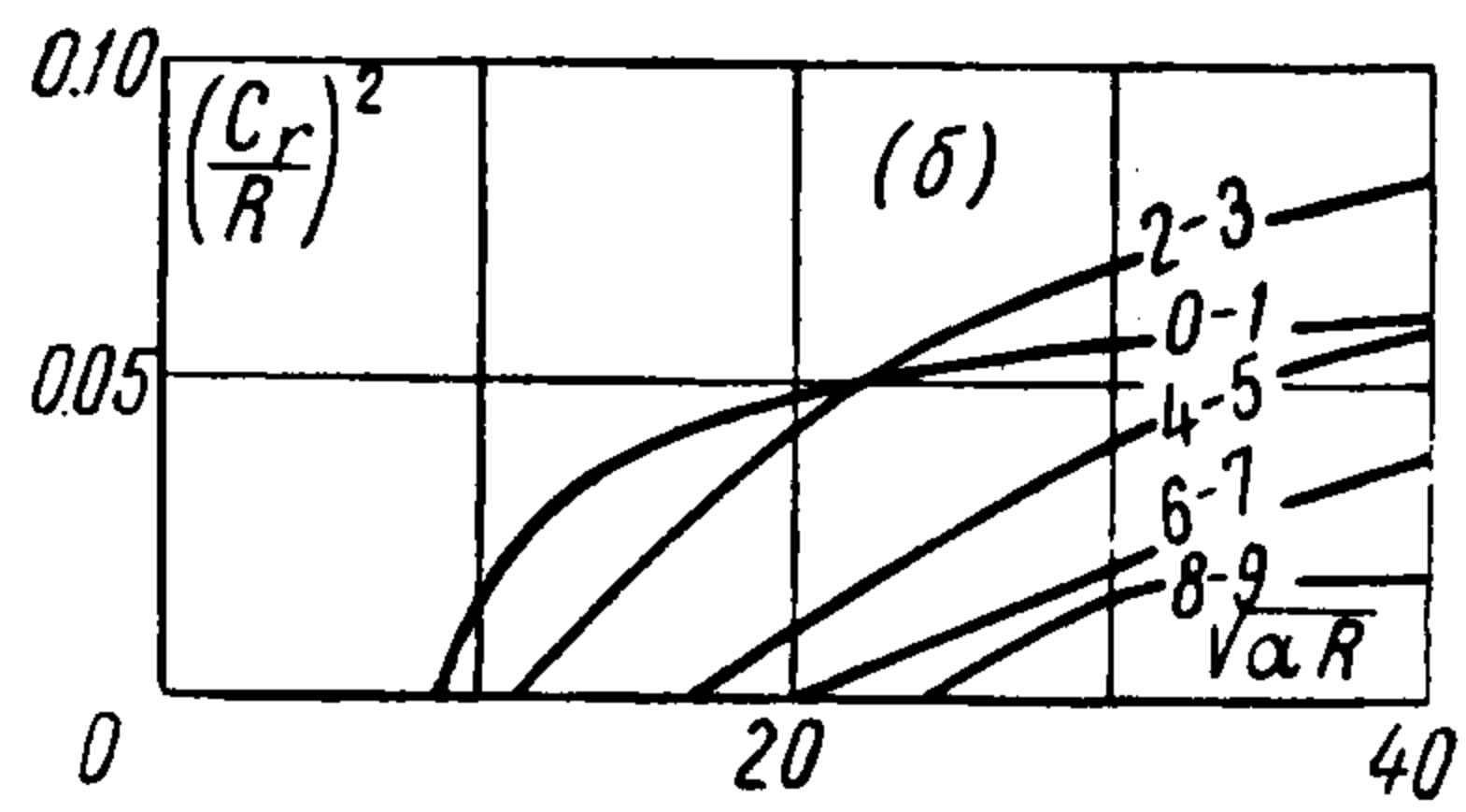
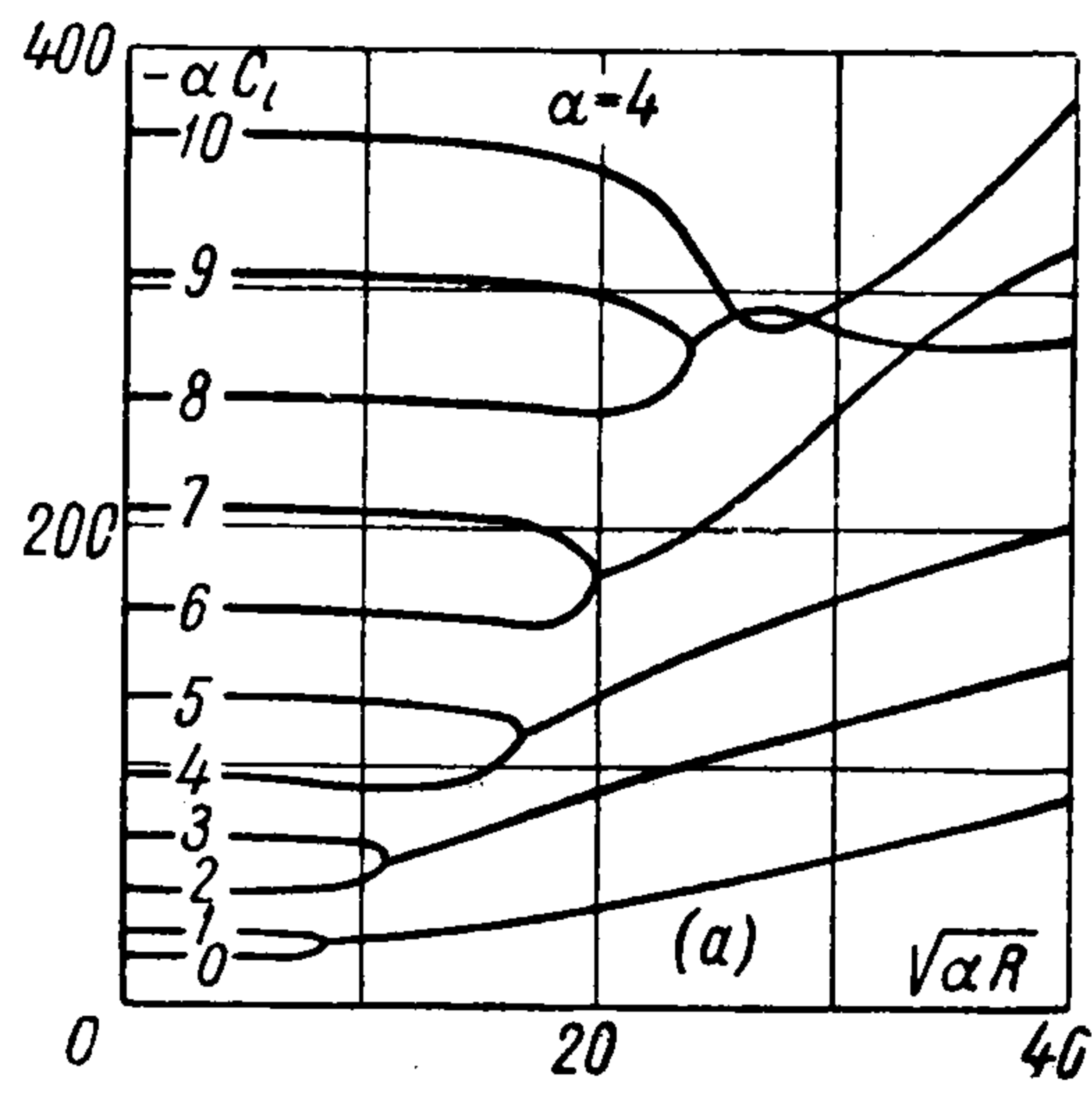
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

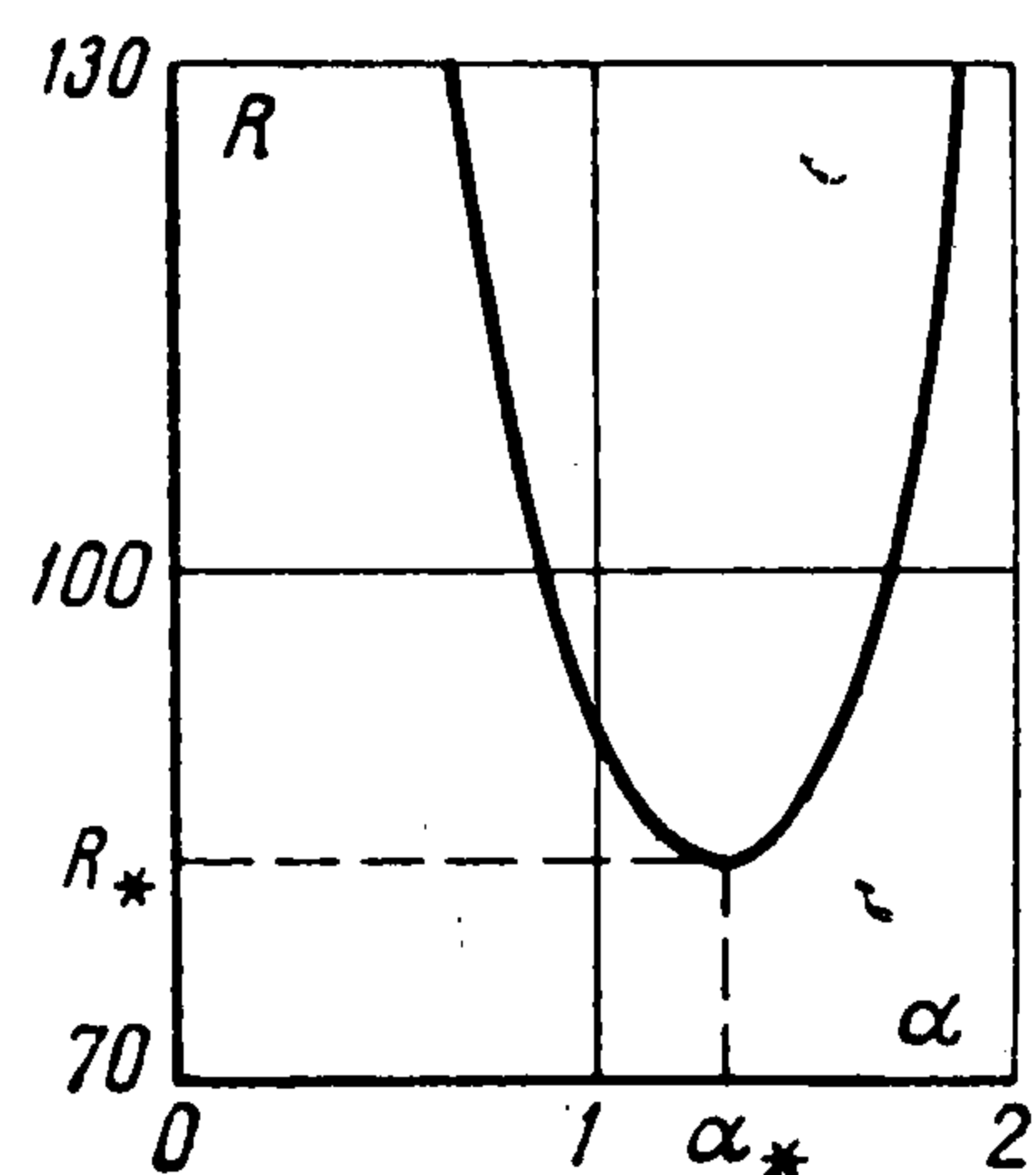
Матрицу из коэффициентов системы (1.4) унитарным преобразованием можно привести к вещественному виду. Тогда задача нахождения декрементов  $\lambda$  сводится к нахождению собственных значений вещественной матрицы  $N + 1$  порядка

$$(\lambda_n^{(0)} \delta_{mn} - (-1)^n \alpha R H_{mn})$$

при фиксированных  $\alpha$  и  $R$ . Собственные значения и собственные векторы этой матрицы находились ортогональностепенным методом [5]. Вся вычислительная часть работы была выполнена на ЭВЦМ «Арагац» в Пермском университете.

2. Рассмотрим спектр декрементов нормальных возмущений. На фиг. 1, а, изображена вещественная часть декремента  $-\alpha c_i$  как функция числа  $(\alpha R)^{1/2}$  для  $\alpha = 0.5$ . Фиг. 1, б, дает зависимость квадрата фазовой скорости возмущений, измеренной в единицах скорости основного течения, от  $(\alpha R)^{1/2}$ . Фиг. 2 относится к возмущениям с волновым числом, равным единице. Участки кривых, нанесенных на этом рисунке пунктиром, соответствуют той области чисел  $\alpha R$ , где приближение из 18 функций количественно отличается от приближения с 16 функциями. Фиг. 3, 4 дают зависимость декрементов от числа Рейнольдса для  $\alpha = 2, 4$  соответственно.

В соответствии с общими соображениями [3], декременты возмущений при малых числах Рейнольдса вещественны. Как видно из фиг. 1—3, нижний декремент пересекает ось  $\alpha R$  и меняет знак. Это означает, что в отличие от течения Куэтта в течении с кубическим профилем имеет место монотонная неустойчивость. Она возникает при сравнительно небольших числах Рейнольдса. Нейтральная кривая монотонной неустойчивости изображена на фиг. 5. Наименьшее критическое значение  $R_*$ , дающее начало неустойчивости, равно 83 и достигается при  $\alpha_* = 1.3$ . Форма движения жидкости, даваемая этим возмущением, носит специфический характер и обсуждается ниже; данную неустойчивость можно назвать неустойчивостью границы раздела встречных потоков. Аналогичным видом неустойчивости обладает также течение, рассмотренное в работе [6]. Заметим, что неустойчивость кубического профиля по отношению к монотонному возмущению обнаруживается уже в приближении с двумя функциями [17]<sup>1</sup>.



Фиг. 5

Таблица 1

$x$	$\varphi_r(x)$	$\varphi_i(x)$	$x$	$\varphi_r(x)$	$\varphi_i(x)$
-1.00	0.000	0.000	-0.50	4.166	-3.285
-0.95	0.104	-0.208	-0.45	4.482	-3.234
-0.90	0.396	-0.721	-0.40	4.748	-3.105
-0.85	0.827	-1.325	-0.35	4.963	-2.908
-0.80	1.339	-1.875	-0.30	5.130	-2.652
-0.75	1.881	-2.334	-0.25	5.254	-2.334
-0.70	2.418	-2.707	-0.20	5.337	-1.952
-0.65	2.923	-2.987	-0.15	5.387	-1.516
-0.60	3.385	-3.167	-0.10	5.413	-1.041
-0.55	3.800	-3.261	-0.05	5.425	-0.532
-0.50	4.166	-3.285	-0.00	5.429	0.000

С ростом числа Рейнольдса в течениях с нечетным профилем скорости происходит попарное слияние вещественных декрементов с образованием комплексно-сопряженных пар. Это значит, что два монотонных возмущения превращаются в два колебательных возмущения с одинаковой скоростью затухания, бегущих в противоположные стороны. Колебательные возмущения начинают появляться при числах  $\alpha R$  около 100. При этом для всех известных уровней спектра возмущений плоскопараллельного течения Куэтта [8] после слияния двух вещественных декрементов наступает рост их вещественной части, т. е. с увеличением числа Рейнольдса устойчивость по отношению к колебательным возмущениям повышается. В исследуемом же течении есть комплексный декре-

<sup>1</sup> Вычисления с двумя функциями дают  $R_* = 69$ ,  $\alpha_* = 1.6$ . Экстраполяция по квадратичным поправкам к декрементам при  $R = 0$  (см. [3]) приводит к значениям  $R_* \approx 50$ ,  $\alpha_* \approx 1.5$ .

мент, вещественная часть которого уменьшается с ростом  $\alpha R$  (уровень 10—11 для  $\alpha = 0.5$  и 9—10 — для  $\alpha = 1$  и 2). Экстраполяция вещественной части этого декремента к нулю приводит к оценке  $R_* \sim 10^4$ . Такого же порядка значение получается, если уподобить один из встречных потоков течения с кубическим профилем течения Пуазейля и произвести соответствующий пересчет. Для вычисления критического числа Рейнольдса, при котором наступает колебательная неустойчивость (если она вообще существует), необходимо, разумеется, продвинуться в расчете в область больших чисел Рейнольдса, взяв большее число базисных функций, либо воспользоваться асимптотическим методом.

3. Рассмотрим теперь форму возмущений исследуемого течения. Амплитудная функция  $\varphi(x)$  монотонно растущего возмущения вычислялась для развитого движения со значениями параметров:  $\alpha = 1$ ,  $R = 1000$ ,  $\lambda = -101.7$ . Численные значения амплитуды приведены в табл. 1 (вещественная часть амплитуды  $\varphi_r(x)$  является четной, а мнимая часть  $\varphi_i(x)$  — нечетной функцией  $x$ ). Для исследования формы движения в возмущении можно построить линии тока возмущения

$$\operatorname{Re} \Psi = [\varphi_r \cos(\alpha z - \lambda_i t) - \varphi_i \sin(\alpha z - \lambda_i t)] e^{-\lambda_r t} = \operatorname{const} e^{-\lambda_r t}$$

Возмущение имеет вид неподвижных ( $\lambda_i = 0$ ) ячеек с движением, симметричным относительно центра ячейки (фиг. 6). Как видно из фигуры, возмущение одинаково проникает в обе половины основного течения. Сложение этого возмущения с основным движением делает волнообразной границу раздела встречных потоков, т. е. нарушение устойчивости связано с неустойчивостью плоской границы раздела потоков по отношению к малым возмущениям.

Колебательные возмущения носят существенно отличный характер. Для примера рассмотрим возмущение, соответствующее  $\lambda_{9,10}$  с волновым числом  $\alpha = 1$  при  $\alpha R = 1000$  и  $c_r > 0$ . Численные значения амплитудной функции для этого возмущения приведены в табл. 2. Возмущение движется вдоль оси  $z$  со скоростью 0.159 единиц скорости основ-

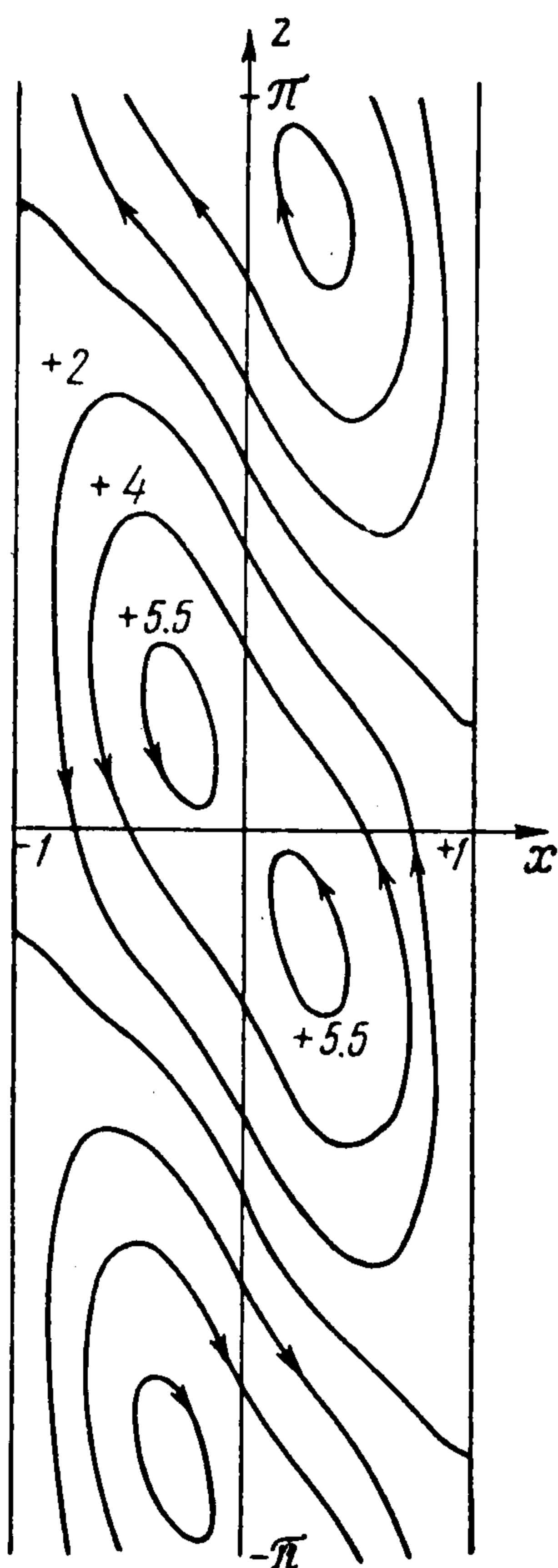
Таблица 2

$x$	$\varphi_r(x)$	$\varphi_i(x)$	$x$	$\varphi_r(x)$	$\varphi_i(x)$
-1.00	0.000	0.000	0.20	9.732	2.897
-0.90	0.191	0.303	0.22	9.974	1.111
-0.80	0.254	0.877	0.25	9.455	-1.416
-0.70	0.248	1.308	0.30	6.936	-4.151
-0.60	0.296	1.654	0.35	4.071	-4.432
-0.50	0.400	1.914	0.40	2.444	-3.110
-0.40	0.473	2.089	0.45	2.334	-1.714
-0.30	0.637	2.379	0.50	2.958	-1.198
-0.25	0.915	2.480	0.55	3.415	-1.538
-0.20	1.258	2.290	0.60	3.366	-2.143
-0.15	1.311	1.729	0.65	3.017	-2.426
-0.10	0.660	1.224	0.70	2.665	-2.104
-0.05	-0.667	1.634	0.80	1.955	-0.283
0.00	-1.319	3.487	0.85	1.361	0.355
0.05	-0.224	6.100	0.90	0.699	0.433
0.10	3.069	7.655	0.95	0.189	0.166
0.15	7.152	6.556	1.00	0.000	0.000

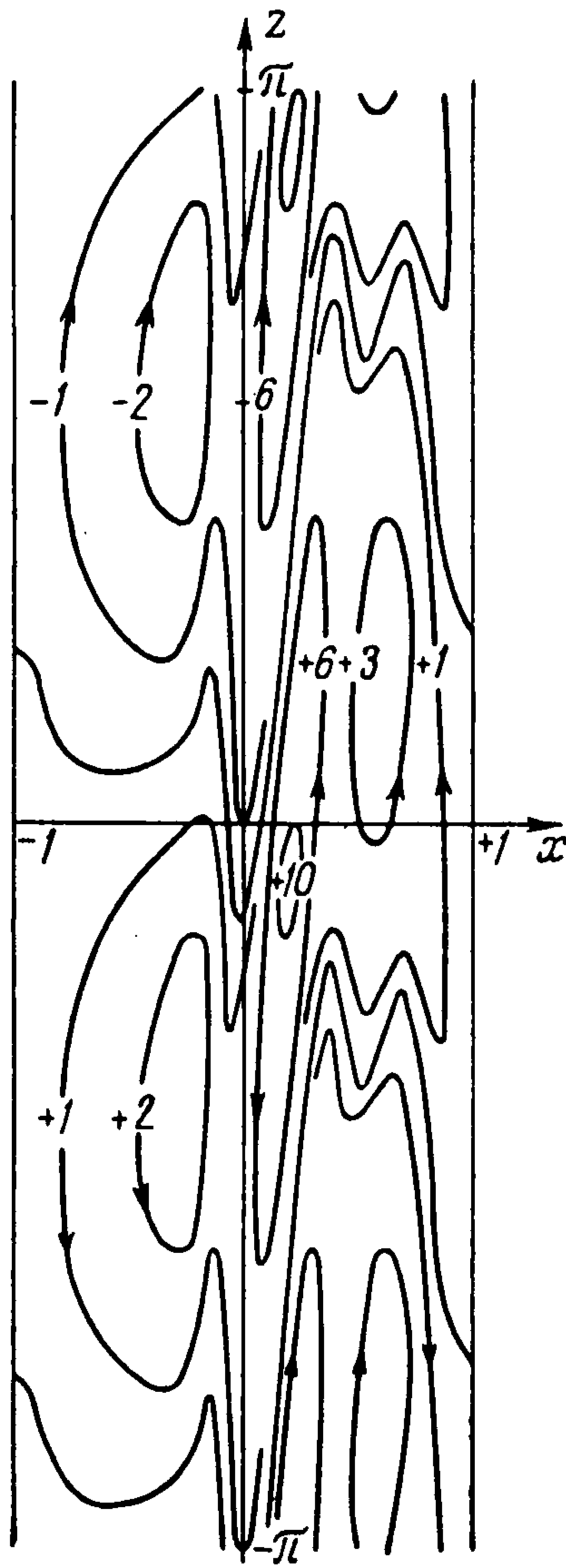
ного течения, а амплитуда его убывает со временем. Распределение скоростей в возмущении видно из фиг. 7, на которой изображены линии тока возмущения при  $t = 0$ . Возмущение почти полностью локализовано в области положительных  $x$ , т. е. в той части потока, где направление распространения возмущения совпадает с направлением скорости основного движения. Величина скорости возмущения в этой части потока на порядок величины больше скорости возмущения во встречном потоке. Возмущение с комплексно сопряженным декрементом (фазовая скорость отрицательная) локализовано в области  $-1 < x < 0$ . Амплитуда  $\bar{\varphi}(x)$  этого возмущения получается из табл. 2 заменой  $\varphi_r(x)$  на  $\varphi_i(-x)$ , а также  $\varphi_i(x)$  на  $\bar{\varphi}_r(-x)$ .

Отличие от нуля фазовой скорости нейтрального возмущения, как известно, делает выделенными точки, в которых скорость основного движения равна скорости воз-

мушения. Около этих точек локализуется возмущение, срывающее поток. На фиг. 7 можно видеть зарождение одного из таких слоев (острый пик функции тока около точки  $x = 0.2, z = -0.2$ ). Это делает правдоподобным высказанное выше предположение о существовании в рассматриваемом течении колебательной неустойчивости той же природы, что и неустойчивость течения Пуазейля. Окончательный вывод о наличии этой неустойчивости, может быть сделан после дополнительного исследования.



Фиг. 6



Фиг. 7

Данная работа была выполнена под руководством Е. М. Жуховицкого, которому автор приносит глубокую благодарность. Автор благодарен также Г. З. Гершуни за постоянный интерес к работе и полезные советы.

Поступила 14 VII 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З. Об устойчивости плоского конвективного движения жидкости. Ж. техн. физ., 1953, т. 23, № 10.
2. Линь Ц. Ц. Теория гидродинамической устойчивости. Изд. иностр. лит., М., 1958.
3. Бирих Р. В., Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О спектре возмущений плоскопараллельных течений при малых числах Рейнольдса. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
4. Петров Г. И. Применение метода Галёркина к задаче об устойчивости течения вязкой жидкости. ПММ, 1940, т. 4, вып. 3.
5. Воеводин В. В. Некоторые методы решения полной проблемы собственных значений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 1.
6. Мешалкин Л. Д., Синай Я. Г. Исследование устойчивости стационарного решения одной системы уравнений плоского движения несжимаемой вязкой жидкости, ПММ, 1961, т. 25, вып. 6.
7. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О двух типах неустойчивости конвективного движения между параллельными вертикальными плоскостями. Изв. высш. учебн. завед. (физика), 1958, № 4.
8. Бирих Р. В. О спектре малых возмущений плоскопараллельного течения Куэтта. ПММ, 1965, т. 29, вып. 4.