

ОБ УСЛОВИЯХ НА ГОЛОВНОМ СКАЧКЕ ПРИ ОБТЕКАНИИ
ТУПОНОСОГО ТЕЛА ВЯЗКИМ ГАЗОМ

Б. М. Булах
(Ленинград)

Рассматриваются в более общей постановке, чем в работе [1] условия на головной ударной волне, возникающей при обтекании тупоносого тела гиперзвуковым потоком вязкого газа при малых числах Рейнольдса, необходимые для определения влияния «скорости вытеснения» пограничного слоя на внешний поток. Методом «внутренних и внешних» разложений найдены условия на скачке, из которых, как частные случаи, вытекают обычно используемые условия на скачке, рассматриваемом в виде математической поверхности, и условия, полученные в работе [1]. Производится сравнение этих условий и объясняются причины, побудившие автора рассмотреть условия на скачке, полученные в работе [1] ¹.

1. Так же как в работе [1] рассмотрим плоскую или осесимметричную задачу обтекания контура однородным гиперзвуковым потоком вязкого совершенного газа (фигура). Здесь AOA' — контур обтекаемого тела; область 4 — пограничный слой; область 2 — ударная волна, рассматриваемая как область с большими градиентами параметров газа.

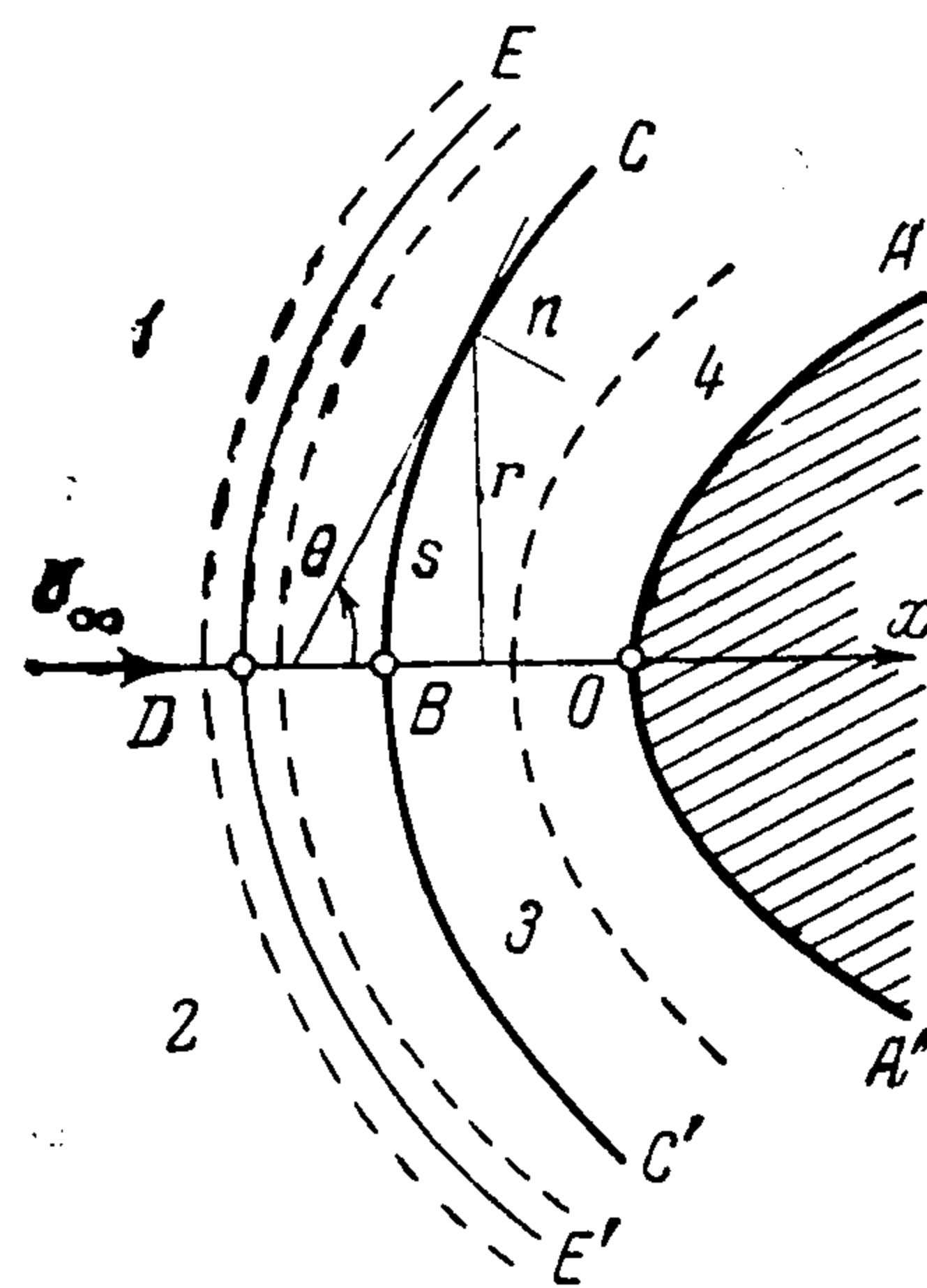
Предполагается, что дуга контура (от точки O до предельных характеристик невязкого потока) — аналитическая кривая; газ совершенный, т. е. его уравнение состояния есть $p = R\rho T$, где p — давление, ρ — плотность, T — абсолютная температура, R — газовая постоянная; теплоемкости при постоянном давлении c_p и объеме c_v постоянны, внутренняя энергия $e = c_v T$; коэффициенты вязкости μ и λ есть функции только T ; число Прандтля σ постоянно; течение газа описывается уравнениями Навье — Стокса; режим течения ламинарный.

Параметры невозмущенного потока обозначаем индексом ∞ , так: M_∞ — число Маха невозмущенного потока, U_∞ — его скорость. Если $\mu, \lambda \rightarrow 0$ ($\sigma = \text{const}$), то толщина области 2 стремится к нулю и 2 неограниченно приближается к некоторой поверхности SBC' (поверхность скачка в невязкой задаче).

Введем криволинейную систему координат s, n (фигура). Здесь s и n отсчитываются вдоль дуги BC и по нормали к ней. Тогда если отнести линейные величины к радиусу кривизны a тела в точке O , скорость газа к U_∞ , давление — к $\rho_\infty U_\infty^2$, плотность — к ρ_∞ , температуру — к $U_\infty^2 c_p^{-1}$, энтропию и энтальпию газа — соответственно к c_p и U_∞^2 , коэффициенты вязкости — к значению μ при $T = U_\infty^2 c_p^{-1}$, то уравнения неразрывности, количества движения, энергии и уравнение состояния газа в выбранной системе координат запишутся в виде, приведенном в работах [2, 1]. Будем считать, что работа [1] известна. Параметр, характеризующий действие сил вязкости, равен

$$\varepsilon = \left[\frac{\mu (U_\infty^2 c_p^{-1})}{\rho_\infty U_\infty^2 a} \right]^{1/2} \quad \left(\begin{array}{l} \mu = \text{const} \\ \varepsilon = R_\infty^{-1/2} \end{array} \right)$$

Здесь R_∞ — число Рейнольдса невозмущенного потока.



¹ В работе [1] автором допущен просмотр. Метод характеристик в форме, предложенной в [1], является некорректным. В связи с этим утверждение автора о единственности решения задачи в сверхзвуковой части течения около затупленного тела с предложенными в [1] граничными условиями на головном скачке является неверным. На эти обстоятельства указал автору И. Н. Мурзинов.

2. В области (3) решение уравнений Навье — Стокса будет представлено асимптотическими разложениями [2] вида

$$f = F_0(s, n) + \varepsilon F_1(s, n) + \dots \quad (2.1)$$

понимая под f величины p, ρ, u, v, T ; здесь u, v — компоненты скорости в направлении увеличения s и n соответственно; $F_0(s, n)$ — параметры решения невязкой задачи; члены $F_1(s, n)$ характеризуют влияние «скорости вытеснения» пограничного слоя.

Для нахождения членов $F_1(s, n)$ необходимо получить условия для них на ударной волне ($n = 0$). В работе [1] для решения этой задачи используется метод «внутренних и внешних» разложений. В областях 1 и 3 на фигуре для u, v, p, ρ, T принимаются разложения вида (2.1); это — «внешние» решения. В отличие от работы [1] будем предполагать, что хотя «толщина» ударной волны — область 2, есть величина $O(\varepsilon^2)$, но область 2 по отношению к CBC' сдвигается на величину $O(\varepsilon)$. Если обозначить через EDE' какую-нибудь линию, лежащую внутри области 2, то ее уравнение можно записать в виде

$$n = \varepsilon \varphi(s, \varepsilon) = \varepsilon \varphi_0(s) + \dots \quad (2.2)$$

Внутри ударной волны (область 2 на фигуре) принимаем разложение типа

$$f = f_0(s, N) + \varepsilon f_1(s, N) + \dots, \quad N = [n - \varepsilon \varphi(s, \varepsilon)] \varepsilon^{-2} \quad (2.3)$$

В работе [1] величина $N = n\varepsilon^{-2}$. Это разложение — «внутреннее».

Предполагаем, что при $n \rightarrow 0$ в областях 1, 3 (фигура) $F_0(s, n), F_1(s, n), \dots$ представляются асимптотически рядами по степеням n , тогда при малых n из (2.1) получим

$$f = [F_{00}(s) + F_{01}(s)n + \dots] + \varepsilon [F_{10}(s) + F_{11}(s)n + \dots] + \dots \quad (2.4)$$

После перехода от n к N и перегруппировки членов ряда (2.4) имеем

$$f = [F_{00}(s)] + \varepsilon [F_{10}(s) + F_{01}(s)\varphi_0(s)] + \dots \quad (2.5)$$

Разложение (2.5) должно представлять f при больших N и малых n (условие «склеивания», «внутреннего» и «внешних» разложений).

Из (2.5) следует, что «внутреннее» разложение должно иметь вид (2.3) и

$$\begin{aligned} f_0 &\rightarrow F_{00}^+(s), & f_1 &\rightarrow F_{10}^+(s) + F_{01}^+(s)\varphi_0(s), & N &\rightarrow +\infty \\ f_0 &\rightarrow F_{00}^-(s), & f_1 &\rightarrow F_{10}^-(s) + F_{01}^-(s)\varphi_0(s), & N &\rightarrow -\infty \\ & & \left(\frac{\partial f_0}{\partial N}, \frac{\partial f_1}{\partial N}\right) &\rightarrow 0, & N &\rightarrow \pm\infty \end{aligned} \quad (2.6)$$

3. Дальнейший ход действий не отличается от таковых в [1]. Уравнения Навье — Стокса преобразуются к переменным N и s с учетом того, что

$$\frac{\partial f}{\partial s} \Big|_n = \frac{\partial f}{\partial s} \Big|_N - \frac{1}{\varepsilon} \varphi' \frac{\partial f}{\partial N} \left(\varphi' = \frac{d\varphi}{ds} \right) \quad (3.1)$$

сюда подставляются разложения (2.3); приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях ε получаются системы уравнений для коэффициентов $f_0(s, N)$ и $f_1(s, N)$. Если обозначить через $\{f\} = (f)_{N \rightarrow +\infty} - (f)_{N \rightarrow -\infty}$, то из этих систем уравнений, вполне аналогично тому, как это сделано в [1], с учетом (2.6), получим

$$\begin{aligned} \{\rho_0 v_0\} = 0, \quad \{u_0\} = 0, \quad \{\rho_0 v_0^2 + p_0\} = 0, \quad \left\{ \frac{v_0^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \right\} = 0, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} \\ \{\rho_0 v_1 + \rho_1 v_0 - \varphi_0' u_0 \rho_0\} = 0, \quad \{u_1 + v_0 \varphi_0'\} = 0 \left\{ \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{p_1}{\rho_0} - \frac{p_0}{\rho_0^2} \rho_1 \right) + v_0 (v_1 - u_0 \varphi_0') \right\} = 0 \\ \{2\rho_0 v_0 v_1 + \rho_1 v_0^2 + p_1\} = 0, \quad \varphi_0' = d\varphi_0/ds \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь, согласно (2.6),

$$f_0 = F_{00}(s) = (F_{00})_{n=\pm 0}, \quad f_1 = F_{10}(s) + F_{01}(s)\varphi_0(s) = \left(F_1 + \frac{\partial F_0}{\partial n} \varphi_0 \right)_{n=\pm 0}$$

Здесь $f = p, \rho, u, v$ и $\{f\} = (f)_{n=+0} - (f)_{n=-0}$. Соотношения (3.1) есть обычные условия на сильном разрыве в невязкой задаче. Соотношения (3.2) отличаются от таковых в [1] добавочными членами, содержащими φ_0' и тем, что $(f_1)_{N \rightarrow \pm\infty} = (F_1)_{n=\pm 0}$ заменены на

$$(f_1)_{N \rightarrow \pm\infty} = \left(F_1 + \frac{\partial F_0}{\partial n} \varphi_0 \right)_{n=\pm 0}$$

Так же как и в [1], уравнения (3.2) совпадают с теми условиями, которые получают-ся, если предположить, что скачок есть математическая поверхность $n = \varepsilon \varphi_0(s)$.

4. В области 1 фигуры поток с точностью $O(\varepsilon)$ заранее неизвестен. Условия затухания возмущений при $x \rightarrow -\infty$ (см. [1]) оставляют произвольными u_1, v_1 при $N \rightarrow -\infty$ ($n = -0$), а p_1, ρ_1 связаны соотношениями

$$\frac{p_1}{p_0} = \gamma \frac{\rho_1}{\rho_0}, \quad p_1 = -(v_1 \sin \theta + u_1 \cos \theta) \quad (4.1)$$

Соотношения (3.1), (3.2), (4.1) на скачке получены при весьма общих предположениях. Для однозначного определения из них p_1, ρ_1, u_1, v_1 при $n = +0$ нужно знать u_1, v_1 при $n = -0$ и φ_0 (параметры невязкой задачи считаются известными). По-видимому, эти соотношения не позволяют определить единственным образом величины с индексом 1 в трансзвуковой области [1], поэтому необходимо сделать дополнительные предположения. Здесь имеются следующие основные возможности:

Вариант 1. Предполагаем, что при $n = -0$ $u_1 = v_1 = 0$; из (4.1) следует

$$p_1 = \rho_1 = T_1 = 0 \text{ при } n = -0$$

Вариант 2. Предполагаем, что $\varphi_0 \equiv 0$

Вариант 3. Предполагаем, что при $n = -0$

$$u_1 = F_1(\varphi_0, \varphi_0', \dots), \quad v_1 = F_2(\varphi_0, \varphi_0', \dots)$$

F_1, F_2 — некоторые функции своих аргументов.

Наиболее привлекательным является первый вариант. Здесь, как следствие $u_1 = v_1 = p_1 = \rho_1 = T_1 = 0$ при $n = -0$, получаем, что возмущения $O(\varepsilon)$ впереди скачка отсутствуют, условия на скачке совпадают с условиями, получающимися методом возмущений из условий на скачке в невязкой задаче. И вся задача определения $u_1, v_1, p_1, \rho_1, T_1$ совпадает с задачей определения возмущений невязкого течения около тупоносого тела, поверхность которого слегка изменена, если применить метод формального разложения по степеням ε .

Однако, пример, приведенный в работе Вальо-Лаурина [3] (профиль в трансзвуковом потоке) и исследование им метода интегральных соотношений применительно к задаче обтекания тупоносого тела, показывают, что линейные системы для определения возмущений, полученные формальным разложением по степеням малого параметра, в случае трансзвуковых задач могут обладать решениями производные которых обращаются в бесконечность на некоторых линиях в трансзвуковой области.

Для того, чтобы получить более гладкое решение, можно ослабить граничные условия. Например, если решается задача Трикоми для уравнения Трикоми, но иско-мую функцию зададим еще на второй характеристике, то решение задачи возможно, но в классе функций, имеющих разрыв первых производных на параболической ли-нии. Для устранения этого разрыва требуется снять граничное условие со второй характеристики.

Руководствуясь подобными соображениями, автор рассмотрел в [1] второй вариант, в котором на скачке получается на одно условие меньше, чем в первом варианте, а впе-реди скачка имеются возмущения $O(\varepsilon)$. Вопрос о существовании и единственности трансзвуковой задачи с условиями на скачке второго варианта остался открытым. Косвенным аргументом в пользу второго варианта являлась в [1] корректность расче-тов методом характеристик в сверхзвуковой части течения.

Однако, исследование для клина (на некотором расстоянии от вершины), где удается получить решение в аналитической форме, показало, что условий на скачке второго варианта не достаточно для единственности решения в сверхзвуковой части течения. (Отсюда следует, что метод характеристик в форме, предложенной в [1], не является корректным.

В связи с этим можно предположить, что в трансзвуковой области нужно использовать условия на скачке второго варианта, а после предельных характеристик — условия первого варианта. Но такое построение, хотя оно возможно, представляется автору искусственным, и по этой причине он отказывается от использования условий второго варианта. Правильное решение вопроса будет, видимо, таким.

Следует использовать условия на скачке первого варианта. Если в трансзвуковой области возникает особая линия, то нужно будет ввести дополнительно промежуточное разложение по ε в ее окрестности. Нужно также выяснить насколько правомерным является предположение $u_1 = v_1 = 0$ ($p_1 = \rho_1 = T_1 = 0$) $n = 0$. Более общим является предположение третьего варианта, в котором впереди скачка имеются возмущения $O(\varepsilon)$.

В заключение хотелось бы обратить внимание на следующее обстоятельство. При нахождении возмущений течения газа вследствие скорости вытеснения часто используют нелинейные уравнения невязкого газа, но контур тела соответственно изменяют. Следует, видимо, использовать линейные уравнения для возмущений, поскольку, как показывают примеры в [3], результаты решения нелинейных систем и линейных систем для возмущений для трансзвуковых задач могут существенно различаться.

Поступила 25 II 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Булах Б. М. К теории обтекания тупоносого тела гиперзвуковым потоком вязкого газа. ПММ, 1964, т. 28, вып. 6.
2. Van Dyke M. Second-order compressible boundary layer theory with application to the blunt bodies in hypersonic flow Hypersonic, Flow Research, Academic Press N.—Y., London, 1962, pp. 37—76.
3. Vaglio-Laurin R. On the PIK method and the supersonic bluntbody problem, J. Aero Space Sci., 1962, vol. 29, No 2, p. 185—206, 248.

О МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ТЕЧЕНИЯ С КУБИЧЕСКИМ ПРОФИЛЕМ СКОРОСТИ

Р. В. Бирих (Пермь)

Исследовано поведение малых возмущений в плоскопараллельном антисимметричном стационарном течении с кубическим профилем скорости. Такое течение возникает в вязкой жидкости, заключенной между вертикальными параллельными плоскостями, нагретыми до разной температуры [1]. В предельном случае малых чисел Прандтля тепловыми возмущениями можно пренебречь, и проблема устойчивости становится чисто гидродинамической. Наличие точки перегиба в профиле основного течения приводит к неустойчивости течения уже в невязком приближении [2]. Численное решение уравнения Орра — Зоммерфельда для возмущений рассматриваемого течения, результаты которого представлены в работе, обнаруживает в вязком приближении монотонную неустойчивость, наступающую при сравнительно небольших значениях числа Рейнольдса R .

В работе приведены результаты расчета спектра декрементов нормальных возмущений в области чисел αR от 0 до 1500 при различных значениях волнового числа α и нейтральная кривая монотонной неустойчивости. Для значений $\alpha = 1$ и $R = 1000$ найдены функции тока для монотонного возмущения, растущего со временем, и затухающего колебательного возмущения.