РАСЧЕТ ОБТЕКАНИЯ ТУПОНОСЫХ ТЕЛ ГИПЕРЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

А. М. Антонов, У. Д. Хейз
(Киев, Принстон США)

Излагается приближенный метод исследования обтекания сильно затупленных тел, передняя часть которых мало отличается от плоского торца. Предположения теории Ньютона и решения, в которых рассматриваются трубки тока с переменным поперечным сечением [1], не выполняются для указанного класса тел. В отличие от численного метода интегрирования дифференциальных уравнений [2], предлагается итерационный метод построения решения; получены приближенные формулы для давления и отхода ударной волны от тела как функций степени сжатия.

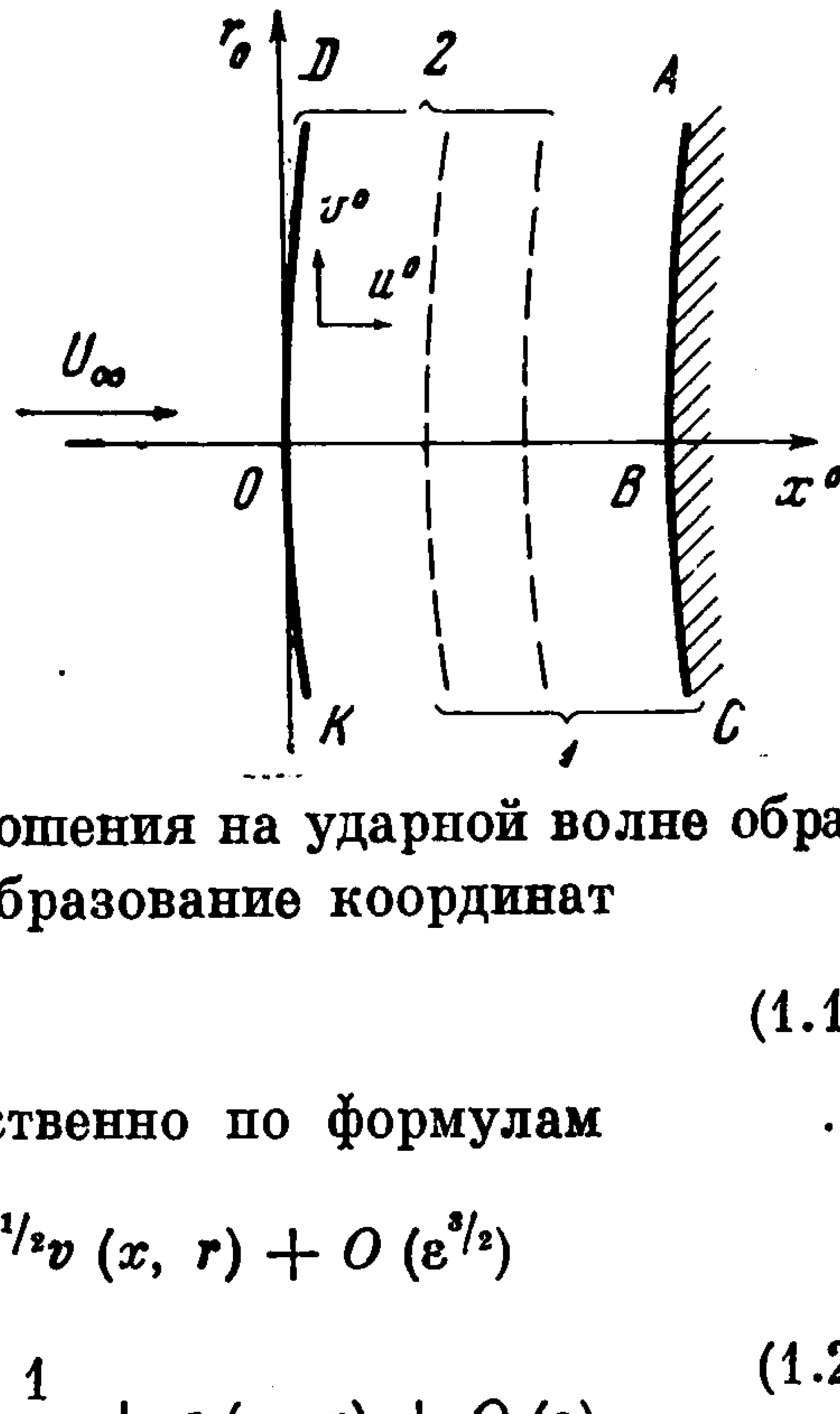
1. Рассмотрим плоскую или осесимметричную задачу обтекания контура однородным гиперзвуковым потоком идеального совершенного газа (фигура). Здесь ABC — контур тела, *1* — внутренняя область, примыкающая к поверхности тела, *2* — внешняя область, примыкающая к ударной волне DOK. Пусть u°, v°, p°, ρ° — соответственно продольная и поперечная составляющие вектора скорости, давление и плотность в области между ударной волной и телом.

Течение газа описывается уравнениями Эйлера, уравнениями совместности на ударной волне и граничным условием безотрывного обтекания заданного тела. Параметры невозмущенного потока обозначаем индексом ∞. Решение указанной задачи разбивается на интегрирование двух систем дифференциальных уравнений, одна из которых справедлива в области *1*, другая — в области *2*. Математическое сопряжение внутреннего и внешнего решений позволяет найти полное поле течения.

Введем в рассмотрение параметр

$$\varepsilon = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{(\gamma + 1) M_\infty^2} \qquad \left(\gamma = \frac{c_p}{c_v}\right)$$

где γ — отношение удельных теплоемкостей газа.



Из условия, что уравнения движения газа и соотношения на ударной волне образуют нетривиальную систему при $\varepsilon \to 0$, делаем преобразование координат

$$x^\circ = \varepsilon^{1/2} x, \qquad r^\circ = r \tag{1.1}$$

и компонент скорости, давления, плотности соответственно по формулам

$$\frac{u^\circ}{U_\infty} = \varepsilon u(x, r) + O(\varepsilon^2), \qquad \frac{v^\circ}{U_\infty} = \varepsilon^{1/2} v(x, r) + O(\varepsilon^{3/2})$$
$$\frac{p^\circ - p_\infty}{\rho_\infty U_\infty^2} = 1 + \varepsilon p(x, r) + O(\varepsilon^2), \qquad \left(\frac{\rho_\infty}{\rho^\circ}\right)^{-1} = \frac{1}{\varepsilon} + \sigma(x, r) + O(\varepsilon) \tag{1.2}$$

Предельный переход $\varepsilon \to 0$ осуществляется при $\gamma \to 1$ и $M_\infty \to \infty$.

После подстановки выражений (1.1), (1.2) в уравнения Эйлера получим следующую систему дифференциальных уравнений для внешней области:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial r} = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{jv}{r^j}, \qquad \left(u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial r}\right)(p - \sigma) = 0 \tag{1.3}$$

Здесь $j = 0$ — для плоских течений, $j = 1$ — для осесимметричных. Граничные условия на ударной волне (индекс c) записываются следующим образом:

$$v_c = \frac{dx_c}{dr_c}, \qquad u_c = 1 + v_c^2 = -p_c \tag{1.4}$$

Можно показать, что (v, r) являются характеристическими координатами. Тогда уравнения системы (1.4) приводятся к каноническому виду

$$u_v^* (u^* - vx_r^*) + vx_v^* u_r^* = -p_v^*, \qquad u^* - vx_r^* = 0, \qquad u_v^* - x_r^* = -\frac{jv}{r^j} x_v^* \qquad (1.5)$$

Их легко преобразовать к виду

$$vx_v^* u_r^* = -p_v^*, \qquad \frac{\partial}{\partial v}(r^j x_r^* + jx^*) = 0, \qquad u^* = vx_r^* \qquad (1.6)$$

Второе из уравнений (1.3) можно проинтегрировать

$$x^* = \frac{1}{r^j} f'(v) + g(r) \qquad (1.7)$$

Следовательно,

$$u^* = v\left[g'(r) - \frac{j}{r^{j+1}} f'(v)\right]$$

$$p^* = G(r) - \frac{g''(r)}{r^j} \int_{v_b}^{v} t^2 f''(t)\, dt - \frac{j(j+1)}{r^{j+2}} \int_{v_b}^{v} t^2 f''(t) f'(t)\, dt \qquad (1.8)$$

где $f(v)$, $g(r)$ — произвольные функции интегрирования, $G(r)$ — произвольная функция, характеризующая, как будет показано в дальнейшем, распределение давления на теле. Нижний предел в интегралах (1.8) является значением скорости v на теле (индекс b) и в случае безотрывного обтекания равен нулю. Таким образом, имеем полное решение поставленной задачи, выраженное функциями f, g, G.

Уравнение ударной волны в параметрическом виде запишется так:

$$r_c = r_c(v), \qquad x_c^* = x^*[v, r_c(v)] \qquad (1.9)$$

Тогда первое соотношение (1.4) можно переписать в виде

$$v\frac{dr_c}{dv} = \frac{dx_c^*}{dv} \qquad (1.10)$$

Подстановка $x^* = x_c^*$ в (1.7) дает

$$\left(v - \frac{dg}{dr_c} + \frac{j}{r_c^{j+1}}\right)\frac{dr_c}{dv} = \frac{1}{r_c^j} f''(v) \qquad (1.11)$$

Комбинация уравнений (1.4) и (1.8) приводит к уравнению, связывающему неизвестные функции $g(r)$, $f(v)$ на поверхности ударной волны

$$g'(r_c) - \frac{j}{r_c^{j+1}} f'(v) = v + \frac{1}{v} \qquad (1.12)$$

Это позволяет переписать (1.11) в виде

$$r_c^j \frac{dr_c}{dv} = -vf''(v) \qquad (1.13)$$

Последнее уравнение интегрируется и, следовательно,

$$f(v) - vf'(v) = -v^2 \frac{d}{dv}\left(\frac{f}{v^2}\right) = \frac{r_c^{j+1}}{j+1} \qquad (1.14)$$

2. Используя соотношения (1.8) — (1.14), получим сначала локальное решение. Уравнение, связывающее $f(v)$ и $g(r)$ на ударной волне, является слишком сложным; его нельзя проинтегрировать. Однако вблизи точки торможения значения r и v малы. Это позволяет представить неизвестные функции рядами, которые используются ниже для сопряжения внешних и внутренних решений. Пусть двумерный случай характеризуется переменными x и y, а осесимметричный — x, r. В этом параграфе остановимся на первом случае. В силу симметрии уравнение ударной волны $y_c(v)$ можно представить рядом по нечетным степеням v

$$y_c(v) = Av + Bv^3 + O(v^5) \qquad (2.1)$$

Подставим это уравнение в правую часть (1.14). Полученное таким образом дифференциальное уравнение при $j = 0$ легко проинтегрировать относительно $f(v)$

$$f(v) = k_1 v - Av \ln v - {}^1/_2 Bv^3 + O(v^5) \qquad (v \to 0) \qquad (2.2)$$

Кроме того, из (1.12) получим

$$g(y_c) = A \ln y_c + a_1 + \frac{A+B}{A^2} \frac{y_c^2}{2} + O(y_c^3) \quad (y_c \to 0) \tag{2.3}$$

Аналогично

$$x_c^* = k_1 - A + a_1 + A \ln A + {}^1/_2 A v^2 + O(v^4) \tag{2.4}$$

Выбирая теперь соответствующим образом начало координат, получим, что

$$k_1 - A + a_1 + A \ln A = 0 \tag{2.5}$$

Следовательно, параметрическое представление ударной волны будет

$$y_c(v) = Av + Bv^3 + O(v^5), \qquad x_c^*(v) = {}^1/_2 A v^2 + O(v^4) \tag{2.6}$$

Окончательно решение представляется в виде асимптотических разложений:

$$\begin{aligned} x^*(v, y) &= A \ln \frac{y}{Av} + \frac{A+B}{A^2} \frac{y^2}{2} - \frac{3}{2} Bv^2 + O(v^4) \qquad (v, y \to 0) \\ u^*(v, y) &= v\left(\frac{A}{y} + \frac{A+B}{A^2} y\right) + O(v^3) \qquad (y \to 0) \\ p^*(v, y) &= G(y) - \left(\frac{A}{y^2} - \frac{A+B}{A^2}\right)\left(\frac{Av^2}{2} + \frac{3}{4} Bv^4\right) + \ldots \end{aligned} \tag{2.7}$$

Выражение для давления на ударной волне запишется проще:

$$p_c^*(v, y_c) = G(y_c) - \left[{}^1/_2 - \left(1 + \frac{3}{2}\frac{B}{A}\right)\frac{v^2}{2}\right] \tag{2.8}$$

Второе соотношение (1.4) при $v \to 0$ показывает, что

$$G(0) = -{}^1/_2 \tag{2.9}$$

Легко убедиться, что решения (2.7) и (2.8) отличаются от аналогичных результатов работы [2].

3. Обобщим теперь на осесимметричный случай ($j = 1$) результаты, полученные в [2]. Приближения и некоторые детали будут при этом несколько отличаться от двумерного случая. Вместо первого уравнения (2.6) имеем

$$r_c = Av + Bv^3 + O(v^5) \tag{3.1}$$

Соответственно

$$f(v) = -{}^1/_2 A^2 v^2 - {}^1/_3 ABv^4 + O(v^6), \quad f'(v) = -A^2 v - {}^4/_3 ABv^3 + O(v^5) \tag{3.2}$$

Из (1.12) имеем

$$g(r_c) = A + \frac{1}{2A}\left(1 + \frac{2}{3}\frac{B}{A}\right) r_c^2 + O(r_c^4) \tag{3.3}$$

Аналогично

$$x_c^* = {}^1/_2 A v^2 + {}^3/_4 Bv^4 + O(v^6) \tag{3.4}$$

Произвольная постоянная здесь выбрана так, чтобы $x_c^* = 0$ при $r = 0$. Уравнение ударной волны запишется в параметрическом виде

$$r_c(v) = Av + Bv^3 + O(v^5), \qquad x_c^*(v) = {}^1/_2 A v^2 + O(v^4) \tag{3.5}$$

Решение представляется следующими разложениями, справедливыми в окрестности точки торможения: (3.6)

$$\begin{aligned} x^*(v, r) &= A - A^2 \frac{v}{r} + \frac{1}{2A}\left(1 + \frac{2}{3}\frac{B}{A}\right) r^2 - \frac{4}{3} AB \frac{v^3}{r} + \ldots \\ u^*(v, r) &= v\left[A^2 \frac{v}{r}\left(1 + \frac{4}{3}\frac{B}{A} v^2\right) + \frac{1}{A}\left(1 + \frac{2}{3}\frac{B}{A}\right) r + \frac{B}{A^4}\left(\frac{B}{A} - 1\right) r^3\right] + \ldots \\ p^*(v, r) &= G(r) + \frac{A}{3}\left(1 + \frac{2}{3}\frac{B}{A}\right)\frac{v^3}{r} - \frac{16}{9} A^3 B \frac{v^6}{r^4} - \frac{A^4 v^4}{2r^4} + \ldots \end{aligned}$$

Последнее из этих разложений на ударной волне дает

$$p_c^* = G(r_c) - \frac{1}{2} + \left(1 + \frac{4}{3}\frac{B}{A}\right)\frac{v^2}{3} + O(v^4) \qquad (G(0) = -{}^1/_2) \tag{3.7}$$

В заключение уместно сделать замечание относительно произвола в определении функций $f'(v)$ из уравнения (1.11). Легко показать, что, не нарушая общности, произвольная постоянная k_1 может быть прибавлена к $f'(v)$, а $k_1 r^j$ вычтена из $g(r)$. Это и использовалось при выводе асимптотических соотношений для f и g в (3.2), (3.3).

4. Перейдем к построению внутреннего решения, справедливого вблизи поверхности обтекаемого тела. Пусть контур тела ($j = 0$) описывается функцией $x_в(y)$. Для плоского случая система дифференциальных уравнений совпадает с той, которая получена в [2] при решении задачи обтекания плоской пластинки, поставленной под прямым углом к потоку. Однако здесь решение дифференциальных уравнений будет несколько отличаться из-за других граничных условий, а именно, будет иметь вид

$$V = V_b(y)\,\mathrm{ch}\,\lambda(X - X_b) \tag{4.1}$$

$$U = V_b(y)\,X_b'(y)\,\mathrm{ch}\,\lambda(X - X_b) - \frac{1}{\lambda}V_b'(y)\,\mathrm{sh}\,\lambda(X - X_b) \tag{4.2}$$

Оно удовлетворяет простому граничному условию на теле при $X = X_b(y)$

$$\frac{dX_b}{dy} = \frac{U}{V} \tag{4.3}$$

Давление определится из интеграла Бернулли

$$P_b(y) = -{}^1/_2 - {}^1/_2 V^2{}_b(y) \tag{4.4}$$

В полученных формулах, как и прежде, индекс b вводится для обозначения значений для тела, а

$$X = \frac{x^\circ - D(\varepsilon)}{\mu(\varepsilon)}$$

где $D(\varepsilon)$ — расстояние отхода ударной волны от тела, $\mu(\varepsilon)$ — величина порядка ширины внутренней области. Поперечная скорость, определенная из внутреннего решения (4.1) при $X \to -\infty$, согласуется теперь со скоростью, определенной из внешнего решения (2.7), (2.4) при $x^* \to \infty$. Удовлетворяя основное условие сращивания решений ($\lambda = 1/A$), получаем

$$g(y) = A\ln\varepsilon^{1/2}\frac{V_b(y)}{2} + X_b(y) + \mathrm{const} \tag{4.5}$$

Это уравнение играет роль внутреннего граничного условия для внешнего решения, так как распределение скорости $V_b(y)$ связано с внешним решением через условие сопряжения давлений, т. е. состоит в требовании, чтобы (1.8) для $j = 0$ и $r = y$ совпадало с (4.4). Тогда легко проверить, что

$$V_b(y) = \sqrt{3(1 + B/2A)}\,V \tag{4.6}$$

Подставляя (4.6) в (4.5) и учитывая (2.4), получаем

$$D(\varepsilon) = \frac{1}{2}\varepsilon^{1/2}A\ln\frac{4}{3\varepsilon(1 + {}^1/_2 B/A)} \tag{4.7}$$

Для того чтобы получить полное решение для плоского тела, сращивание местного давления, рассмотренное выше, должно быть распространено до тела. Это можно сделать, сравнивая $V_b(y)$, которое определяет давление на теле, со значением поперечной скорости v на ударной волне при одинаковых значениях y, а также используя (4.5). Рассмотрим функцию $v(y_c)$, обратную функции $y_c(v)$. В дальнейшем будем писать v без индекса c внизу, имея в виду скорость на ударной волне при определенных значениях y. Дифференцируя (4.5) и подставляя в (1.12), получим

$$g'(y) = v + \frac{1}{v} = A\frac{V_b'(y)}{V_b(y)} + X_b'(y) \tag{4.8}$$

Из (1.12) при $j = 0$ имеем

$$g''(y) = -\frac{1 - v^2}{v^2}\frac{dv}{dy} \tag{4.9}$$

Подсчитаем теперь величину $[p_c - G(y)]/g''$. Для этого используем второе уравнение (1.4), а также соотношения (1.8), (4.4) и (4.8). При этом $G(y)$ отождествляется с $P_b(y)$. В результате получим

$$\frac{P_c - P_b}{g''(y)} = \frac{{}^1/_2 (1 + 2v^2 - V_b^2)}{(1 - v^2)\, v^{-2} dv/dy} = -\int_0^v t^2 f''(t)\, dt \tag{4.10}$$

Под знаком интеграла заменим $tf''(t)$ значением dv / dy, заданным (1.13), и продифференцируем (4.9) по v. Получим окончательно

$$v = \frac{1}{2} \frac{d}{dy} \left\{ \frac{v^2 (1 + 2v^2 - V_b^2)}{(1 - v^2)\, dv/dy} \right\} \tag{4.11}$$

Последнее соотношение совместно с (4.7) представляет систему двух уравнений относительно функций $v(y)$ и $v_b(y)$, определение которых решает задачу нахождения уравнения ударной волны и распределение скорости для заданного тела.

5. Рассмотрим теперь внутреннее решение для осесимметричного случая. Легко показать, что дифференциальные уравнения остаются такими же, как и для плоского случая, например [2], за исключением уравнения неразрывности

$$\partial U / \partial X + \partial V / \partial r + V / r = 0 \tag{5.1}$$

Пусть $x_b(r)$ — уравнение образующей тела вращения. Предполагаем сохранить внутреннее решение только в области, для которой $X - g(r)$ или $X(r) - X_b(r)$ суть величины порядка $\varepsilon^{1/2}$, так же как и $U - gV$ или $U - X_b V$. Кроме того, $\partial V / \partial r$ может быть $O(\varepsilon^{-1/2})$, если $X_b \neq 0$. Приняв эти ограничения, можно использовать ту же координатную систему и те же преобразованные переменные, что и для случая $j = 0$. Нетрудно проверить, что система дифференциальных уравнений для внутренней области имеет решение

$$\begin{gathered} V = V_b(r) - \lambda_* r (X - X'_b) \\ U = V_b X_b(r) - (X - X_b)(V_b' + V_b / r + \lambda_* r X_b') + \lambda_* (X - X_b)^2 \end{gathered} \tag{5.2}$$

которое удовлетворяет граничному условию $U = X_b'(r) V$ на теле, а давление

$$P_b(r) = -{}^1/_2 - {}^1/_2 V_b^2 \tag{5.3}$$

Склеивание поперечных скоростей приводит к требованию, чтобы $\varepsilon^{1/2} V(r)$ из (5.2) совпадало с $v \sim rA^{-2}(g - x^*)$, полученной при использовании второй зависимости (3.2) и (1.7). Это дает возможность определить λ_*, а именно

$$\lambda_* = \frac{1}{A^2} \varepsilon^{-1/2}, \qquad g(r) = X_b(r) + \varepsilon^{1/2} A^2 \frac{V_b(r)}{r} \tag{5.4}$$

Возвратимся снова к локальному решению, чтобы получить выражение для расстояния отхода ударной волны от тела. Объединяя (3.7), (3.5) и (1.4), получим

$$V_b(r) = \left[\frac{8}{3}\left(1 + \frac{1}{3} \frac{B}{A}\right)\right]^{1/2} \frac{r}{A} + O(r^3) \tag{5.5}$$

Следовательно, из (5.4) и (3.3) окончательно имеем

$$D(\varepsilon) = A\varepsilon^{1/2} \left\{1 - \left[\frac{8\varepsilon}{3}\left(1 + \frac{B}{3A}\right)\right]^{1/2}\right\} \tag{5.6}$$

Для полного решения задачи можно поступать, как и для случая $j = 0$, составляя ряд дифференциальных уравнений. В осесимметричном случае, чтобы избавиться от двух интегралов в выражении для давления (1.8), необходимо дважды его продифференцировать. Поэтому система уравнений имеет высокий порядок и настолько сложна, что требует численного интегрирования. При этом не удается воспользоваться тем фактом, что внутренний слой и толщина смещения $g(r) - X_b(r)$ малы. Гораздо более простой и удобный метод состоит в следующем: внешнее решение получается интегрированием дифференциального уравнения

$$\left(1 - \frac{1}{v^2}\right) r_c \frac{dv}{dr_c} + \frac{1}{v} + 2v = 2 \frac{dx_b(r_c)}{dr_c} + r_c \frac{d^2 x_b(r_c)}{dr_c^2} \tag{5.7}$$

с граничным условием $x_b(r) = g(r)$, которое можно получить, используя (1.12), (1.11), (1.7) для x^*, а также условие на ударной волне для поперечной скорости

$$v_c = \left(\frac{dx^*}{dr}\right)_c$$

Уравнение (5.7) исследовалось раньше в [1]. Поэтому считаем, что первое приближение известно. Давление на теле может быть выражено формулой

$$p_b^* = p_c^*(r) - \frac{x_b^*(r)}{r}\int_0^{x_c^*}\xi dx_c^*(\xi) + \frac{2}{r^3}\int_0^{x_c^*}\xi\,[x_b^*(r) - x^*(r,\, x_c^*(\xi))]\,dx_c^*(\xi) \qquad (5.8)$$

$$x^*(r,\, x_c^*) = x^*(r,\, V) \quad \text{при} \quad x_c^* = x_c^*(V)$$

Первый интеграл в выражении для давления пропорционален ньютоновскому импульсу и дает центробежный член, обусловленный кривизной тела. Чтобы интерпретировать следующий член, сравним сначала $(x_b^* - x^*)\,/\,r^2$ с кривизной линии тока относительно поверхности тела. Тогда второй член можно рассматривать как центробежный член, возникающий из-за указанной кривизны. Другими словами, функция $G(r)$ вычисляется путем извлечения определенных интегралов в (1.13) и сращивания давления вдоль ударной волны. Затем определяем значение $V_b(r)$ по формуле (5.3); далее, итерационный процесс продолжается, но с новым значением $g(r)$, найденным согласно (5.4). Это позволяет уточнить уравнение ударной волны и значение поперечной скорости на теле $V_b(r)$.

6. В качестве приложения рассмотренной выше теории решим задачу обтекания плоского диска с $X_b'(r) = 0$. Нулевое приближение считаем известным из [1]. Тогда

$$g(r) = A = 3^{3/4}\, r_* \qquad (6.1)$$

где звездочка внизу $_*$ означает критическое значение r, связанное с изломом контура. Кроме того,

$$r_c = \frac{Av}{(1+2v^2)^{3/4}} \qquad (6.2)$$

Этого достаточно, чтобы воспользоваться (1.10) и определить

$$x_c^* = A\left[1 - \frac{1+v^2}{(1+2v^2)^{3/4}}\right] \qquad (6.3)$$

Согласно (1.11), имеем

$$f'(v) = -A^2\,\frac{v\,(1+v^2)}{(1+2v^2)^{3/2}} \qquad (6.4)$$

Не составляет труда подсчитать значение интеграла в (1.13)

$$\int_0^v t^2 f''(t)\, f'(t)\, dt = \frac{A^4}{32\,(1+2v^2)^3}\,[2v^2(1+9v^2+10v^4) - (1+2v^2)^3\ln(1+2v^2)] \qquad (6.5)$$

Теперь можно определить v_{b2}, воспользовавшись (4.4), а из (5.4) найти отрицательное значение толщины $g(r) - X\ (r)$. На оси $B\,/\,A = -\,^3/_2$ и, следовательно, принимая во внимание (5.6), получим

$$D(\varepsilon) = A\varepsilon^{1/2}\,(1 - \sqrt{^4/_3\varepsilon}) \qquad (6.6)$$

Поступила 25 III 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Hayes W. R., Probstein R. F. Hypersonic Flow Theory, Academic Press, New York and London, 1959. (Русский перевод У. Д. Хейз, Р. Ф. Пробстин «Теория гиперзвуковых течений», М., Изд. иностр. лит., 1962.)

2. Коул Ж., Брайнерд Ж. Обтекание тонких крыльев гиперзвуковым потоком при больших углах атаки. Сб. «Исследования гиперзвуковых течений». М., Изд-во «Мир», 1964.