

угольника  $x_1 \leq x \leq x_2$ ,  $0 \leq y \leq l$ . Решение уравнения Пуассона (11) в этом случае можно записать в виде ряда

$$\Phi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{1n}(x) \sin \alpha_n y \quad \left( \alpha_n = \frac{n\pi}{l} \right)$$

$$\Phi_{1n} = \frac{2v_0 B \delta_0 M^2 \epsilon k^2 \alpha_n}{l(k^2 + \alpha_n^2)(\kappa^2 + \alpha_n^2)} \left[ \frac{\sin kx_1 \operatorname{sh} \alpha_n(x - x_2) + \sin kx_2 \operatorname{sh} \alpha_n(x_1 - x)}{\operatorname{sh} \alpha_n(x_2 - x_1)} - \sin kx \right]$$

(при вычислении предполагалось  $\kappa l \gg 1$ ).

На электродах наиболее существенный член в выражении (10) для  $i_{1y}$ , а именно,  $(\sigma / \delta_0) / (\partial \Phi_1 / \partial x)$  обращается в нуль, однако, ток  $i_{1x}$  на электродах, вообще говоря, не мал. Появление таких замкнутых токов (порядка  $\epsilon_0 k \delta_0$ ) приводит к диссипации энергии потока. Величина токов определяется числом Маха, способом секционирования.

Итак, наличие неоднородностей в распределении величин по сечению канала с секционированными электродами приводит к существенным поправкам к уравнениям одномерного течения при больших  $\omega t$ , в особенности, если стенки канала обладают достаточной кривизной. Величина возникающих токов определяется величиной возмущения плотности. Для сопла с медленно меняющимся сечением поправки к току (при  $(\omega t)^2 \gg 1$ ) порядка  $\epsilon^2 \omega t$ , если  $\epsilon$  — угол наклона сопла. В дозвуковом ламинарном течении возмущения плотности, создаваемые волнистой стенкой, имеют порядок  $\epsilon_0 / \lambda$  ( $\lambda$  — длина волны,  $\epsilon_0$  — ее амплитуда); а возникающие токи порядка  $\epsilon_0 \omega t / \lambda$  (по отношению к току в канале постоянного сечения). На величину возмущений плотности и, следовательно, на величину возникающих токов существенное влияние оказывает число Маха в потоке, эти возмущения в дозвуковом течении падают с уменьшением числа Маха как  $M^2$ .

Автор благодарит А. А. Веденова и Е. П. Велихова за обсуждение работы.

Поступила 16 VI 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Велихов Е. П. Неустойчивость слабоионизованной плазмы с током, вызванная эффектом Холла. Докл. на Международном симпозиуме по МГД-методу генерации энергии, Ньюкасл, 1962.
2. Yoshikawa S., Rose D. J. Anomalous diffusion of a plasma across a magnetic field. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 3.
3. Hurwitz H., Kilb R. W., Sutton G. W. Influence of tensor conductivity on current distribution in a MHD generator. J. Appl. Phys., 1961, vol. 32, No 2.
4. Липман Г. В., Рошко А. Элементы газовой динамики. Изд-во иностр. лит., 1960.

#### НЕКОТОРЫЕ КОНФИГУРАЦИИ ИЗЭНТРОПИЧЕСКИХ РАСПАДОВ ДВУМЕРНЫХ РАЗРЫВОВ

Е. В. Ермолин, А. Ф. Сидоров

(Свердловск)

Строятся решения некоторых двумерных нестационарных задач о движении двух плоских поршней в политропном газе.

1. Пусть политропный газ с уравнением состояния  $p = a^2 \rho^\gamma$  ( $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $\gamma$  — показатель адиабаты,  $a^2 = \text{const}$ ) в начальный момент времени  $t = 0$  покоится внутри некоторого двугранного угла, образованного двумя пересекающимися плоскостями  $P_1$  и  $P_2$ , угол  $\alpha$  между которыми удовлетворяет соотношению  $0 < \alpha \leq 1/2\pi$ . Будем рассматривать задачу о нахождении нестационарных плоских течений, возникающих в газе, когда плоскости  $P_1$  и  $P_2$ , играющие роль поршней, в момент  $t = 0$  начинают выдвигаться из газа с постоянными скоростями, равными соответственно  $V_1$  и  $V_2$ . Возникающие течения будут двумерными автотельными, так что под-

лежащие определению компоненты вектора скорости  $u_1$  и  $u_2$  и скорость звука  $C$  будут зависеть от двух независимых автомодельных переменных  $\xi_1 = x_1 / t$ ,  $\xi_2 = x_2 / t$ , где  $x_1$  и  $x_2$  — плоские декартовы координаты. При этом будем предполагать, что в течениях не образуются ударные волны и контактные разрывы, и, следовательно, течения эти будут изэнтропическими и потенциальными. Потенциальность следует из теоремы Томсона, которая справедлива в данном случае, так как в течениях присутствуют лишь слабые разрывы.

В случае, когда плоскости  $P_1$  и  $P_2$  начинают выдвигаться по произвольному закону, решение задачи можно искать в классе двойных волн. В работе [1] была решена задача о движении двух взаимно перпендикулярных поршней по произвольному закону в изотермическом газе в классе двойных волн. Там же была сформулирована задача Гурса для уравнения двойных волн для случая движения двух поршней в политропном газе. Однако решение только одной задачи Гурса не позволяет, вообще говоря, построить полную картину движения даже в случае простейших законов движения поршней. Это происходит из-за того, что области определения решения задачи Гурса, как правило, не совпадают с естественными областями определения течений ни в физическом пространстве  $x_1, x_2, t$ , ни в плоскости годографа и составляют лишь часть их. Необходимо поэтому ставить дополнительные задачи, чтобы заполнить всю область определения течения. Предлагаемая работа посвящена как раз постановке таких дополнительных задач и исследованию возможных конфигураций течений, возникающих вследствие специфического распада разрыва, когда поршни начинают двигаться с постоянными скоростями. Область течения при этом составляется из областей двойных автомодельных волн, простых волн и областей постоянного движения, причем задача Гурса и смешанные задачи для уравнения двойных волн решаются численно методом характеристик, пока уравнение двойных волн имеет гиперболический тип.

Применение метода характеристик в гиперболическом случае позволяет полностью решить ряд задач о движении поршней, когда в области, примыкающей к линии пересечения  $l$  плоскостей  $P_1$  и  $P_2$ , возникает зона вакуума. Однако в общем случае при небольших скоростях  $V_1$  и  $V_2$  (сравнительно со скоростью звука в невозмущенном газе) зона вакуума может и не возникнуть. Тогда в окрестности линии  $l$  появляется, вообще говоря, линия параболичности уравнения двойных волн и за ней область эллиптичности этого уравнения. В данной статье приводим расчеты лишь в областях гиперболичности рассматриваемого уравнения.

Частный случай изучаемой задачи, когда одна из плоскостей  $P_1, P_2$  остается неподвижной, а другая движется с бесконечной скоростью (истечение в вакуум), был рассмотрен в [2]. Аналогичные частные задачи для трехмерного автомодельного течения изучались в [3]. Вопрос об единственности получаемых решений не исследуется.

2. Рассмотрим задачу о примыкании течений типа двойных и простых волн и некоторые свойства течений при таком примыкании, необходимые для дальнейшего. Системы уравнений, описывающие простые и двойные волны для автомодельного случая (см. [4, 5]), запишем в виде

для простых волн

$$u_1'^2 + u_2'^2 = 1, \quad u_1' \xi_1 + u_2' \xi_2 - \left( \frac{\gamma-1}{2} \theta + u_1 u_1' + u_2 u_2' \right) = 0 \quad (2.1)$$

для двойных волн

$$\frac{\gamma-1}{2} \theta \left[ (1 - \theta_1^2) \theta_{22} + 2\theta_1 \theta_2 \theta_{12} + (1 - \theta_2^2) \theta_{11} \right] + \frac{\gamma-3}{2} (\theta_1^2 + \theta_2^2) + 2 = 0 \quad (2.2)$$

$$\xi_i = u_i + \frac{\gamma-1}{2} \theta \theta_i \quad (i = 1, 2) \quad (2.3)$$

Здесь

$$u_i = u_i(\theta), \quad \theta = \frac{2}{\gamma-1} C, \quad \theta_i = \frac{\partial \theta}{\partial u_i}, \quad \theta_{ik} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_i \partial u_k}$$

штрих обозначает дифференцирование по  $\theta$ .

Простым волнам в плоскости годографа  $u_1, u_2$  соответствует некоторая кривая  $\Psi(u_1, u_2) = 0$ , а двойным волнам — некоторая область  $S$ , в которой определена функция  $\Theta = \Theta(u_1, u_2)$ .

Тип уравнения (2.2) определяется знаком выражения  $R = \Theta_1^2 + \Theta_2^2 - 1$ . При  $R > 0$  уравнение (2.2) — гиперболического типа.

Уравнения характеристической полосы для (2.2) имеют вид

$$(1 - \Theta_1^2)du_1^2 - 2\Theta_1\Theta_2du_1du_2 + (1 - \Theta_2^2)du_2^2 = 0 \quad (2.4)$$

$$d\Theta = \Theta_1du_1 + \Theta_2du_2 \quad (2.5)$$

$$(1 - \Theta_1^2)d\Theta_2du_1 + (1 - \Theta_2^2)d\Theta_1du_2 + \frac{(\gamma - 3)(\Theta_1^2 + \Theta_2^2) + 4}{(\gamma - 1)\Theta} du_1du_2 = 0 \quad (2.6)$$

*Свойство 2.1.* Если кривая  $\Psi(u_1, u_2) = 0$  в плоскости годографа соответствует некоторой простой волне и вдоль нее происходит примыкание к области двойных волн, то вдоль этой кривой удовлетворяется характеристическое уравнение (2.4).

Свойство это вытекает из соотношения

$$(\Theta_1du_1 + \Theta_2du_2)^2 = du_1^2 + du_2^2. \quad (2.7)$$

следующего из (2.1), (2.5), так как функция  $\Theta$  непрерывна при переходе через кривую  $\Psi(u_1, u_2) = 0$ .

Заметим, что в случае произвольной простой волны нельзя гарантировать для всей заданной кривой  $\Psi(u_1, u_2) = 0$  существование таких  $\Theta_1$  и  $\Theta_2$ , что будет выполнено условие (2.6).

Действительно, фиксируем в плоскости  $\xi_1, \xi_2$  какую-либо точку  $\xi_1^0, \xi_2^0$  с заданными  $u_1^0, u_2^0, \Theta^0$ , через которую проходит линия раздела областей простых и двойных волн. Тогда из уравнения (2.6), заменив  $\Theta_1$  через  $\Theta_2$  в соответствии с (2.5), для функции  $\Theta$  получим следующее обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение:

$$2(\Theta_2 - \varphi)\Theta_2' + (\Theta_2^2 - 1)(\Theta_2 - \varphi)\frac{\varphi'}{1 - \varphi^2} + \frac{1}{(\gamma - 1)\Theta} [(\gamma - 3)(1 + \Theta_2^2 - 2\varphi\Theta_2) + 4(1 - \varphi^2)] = 0$$

Здесь  $\Theta$  играет роль независимой переменной, начальные данные, полученные из (2.3), имеют вид  $\Theta_2(\Theta^0) = \Theta_2^0$  и  $u_2' = \varphi(\Theta)$  — произвольная функция.

Таким образом, вообще говоря, можно утверждать, что  $\Theta_2$  будет определена лишь в некоторой окрестности точки  $\Theta^0$ . Однако, как увидим далее, для рассматриваемой задачи с двумя поршнями простые волны, к которым необходимо пристраивать двойную волну, имеют специальный вид и условие характеристической полосы (2.6) выполняется для всех  $\Theta$ , т. е. вдоль всей линии  $\Psi(u_1, u_2) = 0$ .

Отметим, что из формулы (2.7) вытекает свойство, обратное высказанному: любая характеристика уравнения (2.2) соответствует некоторой простой волне.

*Свойство 2.2.* Если кривая  $\Psi(u_1, u_2) = 0$  соответствует простой волне, являясь характеристикой первого семейства для уравнения двойных волн, то линии уровня основных величин в простой волне (прямые линии в плоскости  $\xi_1, \xi_2$  (2.1)) касаются характеристик второго семейства в точках кривой примыкания, соответствующей в плоскости  $\xi_1, \xi_2$  кривой  $\Psi(u_1, u_2) = 0$ .

Параметрически характеристики второго семейства определяются уравнениями (2.3), в которых вместо  $u_1$  и  $u_2$  подставлены соответствующие выражения их через  $\Theta$ . Пусть вектора  $(\delta u_1, \delta u_2)$  и  $(du_1, du_2)$  определяют направление касательных соответственно к характеристикам первого и второго семейств в плоскости  $u_1, u_2$ . Из (2.1) следует, что для доказательства высказанного свойства достаточно убедиться в справедливости соотношения

$$\Gamma = \delta u_1 d\xi_1 + \delta u_2 d\xi_2 = 0 \quad (2.8)$$

где дифференциалы  $d\xi_1, d\xi_2$  соответствуют характеристикам второго семейства. Представив  $\Gamma$  в виде

$$\Gamma = \delta u_1 \left( du_1 + \frac{\gamma-1}{2} \Theta_1 d\Theta + \frac{\gamma-1}{2} \Theta d\Theta_1 \right) + \delta u_2 \left( du_2 + \frac{\gamma-1}{2} \Theta_2 d\Theta + \frac{\gamma-1}{2} \Theta d\Theta_2 \right)$$

и воспользовавшись соотношениями (2.4) — (2.6) и вытекающей из (2.4) формулой

$$\frac{\delta u_1 du_1}{\delta u_2 du_2} = \frac{1 - \Theta_2^2}{1 - \Theta_1^2}$$

окончательно для  $\Gamma$  получим

$$\Gamma = \frac{\delta u_2}{du_1} \frac{\gamma-1}{2} \frac{\Theta_1 \Theta_2}{1 - \Theta_1^2} [(1 - \Theta_1^2) du_1^2 + (1 - \Theta_2^2) du_2^2 - 2\Theta_1 \Theta_2 du_1 du_2] = 0$$

*Свойство 2.3* Если к двойной волне примыкает одномерная простая волна Римана вида

$$u_1 = \alpha_1 \Theta + \beta_1, \quad u_2 = \alpha_2 \Theta + \beta_2 \quad (2.9)$$

где  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  — постоянные и  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$  (поворотом осей координат этот случай легко приводится к случаю, когда, например,  $u_2 \equiv 0$ ), то линия примыкания определяется аналитически в плоскости  $\xi_1 \xi_2$ .

Действительно, используя вытекающие из (2.9) соотношения для  $\alpha_1 \neq 0$  и  $\alpha_2 \neq 0$

$$\frac{du_1}{du_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \quad \alpha_1 \Theta_1 + \alpha_2 \Theta_2 = 1, \quad \frac{d\Theta_1}{d\Theta_2} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \quad (2.10)$$

уравнение (2.6) приведем к виду

$$d\Theta_2 \frac{\alpha_1^2 - (1 - \alpha_2 \Theta_2)^2 - \alpha_2^2 (1 - \Theta_2^2)}{(\gamma - 3) [\alpha_1^2 \Theta_2^2 + (1 - \alpha_2 \Theta_2)^2] + 4\alpha_2^2} + \frac{\alpha_2}{\gamma - 1} \frac{d\Theta}{\Theta} = 0 \quad (2.11)$$

Интегрируя (2.11), получим

$$(\gamma - 3) \left[ \Theta_2^2 + \left( \frac{1 - \alpha_2 \Theta_2}{\alpha_1} \right)^2 \right] + 4 + C \Theta^{-\frac{\gamma-3}{\gamma-1}} = 0 \quad (\gamma \neq 3) \quad (2.12)$$

$$\frac{1}{2\alpha_1^2} \Theta_2^2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \Theta_2 + \ln \Theta + C = 0 \quad (\gamma = 3) \quad (2.13)$$

Здесь  $C$  — постоянная интегрирования, определяемая из условий задачи. Из формул (2.3) теперь сразу же получаем уравнения, определяющие линию примыкания в параметрической форме

$$\xi_i = \alpha_i \Theta + \beta_i + \frac{\gamma-1}{2} \Theta \Theta_i \quad (2.14)$$

где вместо  $\Theta_i$  необходимо подставить их выражение через  $\Theta$  по формулам (2.10), (2.12), а  $\Theta$  играет роль параметра.

3. Перейдем к описанию метода решения поставленной во введении задачи.

Предварительно рассмотрим вопрос об условиях, которым должна удовлетворять функция  $\Theta(u_1, u_2)$ , описывающая двойную волну, на подвижной стенке (поршне). Пусть уравнение движения прямолинейной подвижной стенки в координатах  $\xi_1, \xi_2$  имеет вид

$$a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 = 0, \quad a_i = \text{const} \quad (3.1)$$

Нормальная скорость ее движения равна  $|a_3| / \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ . Из условия отсутствия потока газа через стенку получим

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 = 0 \quad (3.2)$$

Подставляя  $\xi_i$  по формулам (2.3) в (3.1), для функции  $\Theta$  в плоскости годографа вдоль линии (3.1) будем иметь условие

$$a_1\Theta_1 + a_2\Theta_2 = 0 \quad (3.3)$$

Рассмотрим область интерференции простых волн Римана (фиг. 1), возникающую в случае выдвигания с постоянными скоростями  $V_1$  и  $V_2$  двух плоских поршней, угол  $\alpha$  между которыми острый. Скорость звука  $C_0$  в невозмущенном газе, занимающем перед началом движения двугранный угол, ограниченный плоскостями  $x_1 = 0$  и  $x_2 = x_1 \operatorname{ctg} \alpha$  при  $t = 0$  будем считать равной 1. Необходимо, следовательно, рассмотреть случай  $0 < V_i \leq 2 / (\gamma - 1)$ , так как случай  $V_i > 2 / (\gamma - 1)$  ( $i = 1, 2$ ) совпадает со случаем  $V_i = 2 / (\gamma - 1)$  и приводит к задаче об истечении газа в вакуум из двугранного угла, стенки которого в момент  $t = 0$  мгновенно убираются.

Ясно, что достаточно далеко от линии пересечения поршней для  $t = t_0$  и  $V_i < 2 / (\gamma - 1)$  вблизи подвижных стенок будут иметь место одномерные движения, причем к стенкам будут примыкать области постоянного течения, которые через слабые разрывы (линии  $DF$  и  $D_1F_1$ ) примыкают к областям волн Римана. Автомодельные в данном случае волны разряжения Римана, в свою очередь, через вторые слабые разрывы (линии  $EM$  и  $EM_1$ ) будут примыкать к области покоящегося газа. Уравнения подвижных стенок  $OC$  и  $OC_1$  в координатах  $\xi_1$  и  $\xi_2$  имеют вид

$$\xi_1 = -V_1, \quad \cos \alpha \xi_1 - \sin \alpha \xi_2 - V_2 = 0 \quad (3.4)$$

Уравнения линий  $DE$  и  $D_1E$  можно записать в явном виде (свойство 2.3). Правда, для того, чтобы найти уравнение кривой  $DE$ , необходимо вместо уравнения (2.6), которое в данном случае выполняется тождественно вдоль  $DE$  ( $\Theta_1 = 1, u_2 = 0$ ), проинтегрировать непосредственно уравнение (2.2), сводящееся на  $DE$  к обыкновенному уравнению в силу соотношения

$$d\Theta_1 = \Theta_{11}du_1 + \Theta_{12}du_2$$

Окончательно для кривой  $DE$  получим параметрические уравнения (при  $\gamma \neq 3$ )

$$\xi_1 = \Theta - \frac{2}{\gamma - 1} + \frac{\gamma - 1}{2} \Theta, \quad \xi_2 = \frac{\gamma - 1}{2} \Theta \left( C_\alpha \Theta^{\frac{3-\gamma}{\gamma-1}} - \frac{\gamma + 1}{\gamma - 3} \right)^{1/2} \quad (3.5)$$

Здесь постоянная интегрирования

$$C_\alpha = \left( \frac{\gamma + 1}{\gamma - 3} + \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \right) \left( \frac{2}{\gamma - 1} \right)^{\frac{\gamma-3}{\gamma-1}} \quad (3.6)$$

определена из условия прохождения интегральной кривой через точку  $E$  ( $1, \operatorname{ctg}^{1/2} \alpha$ ), лежащую на биссектрисе угла  $COC_1$ , при этом

$$\Theta = 2 / (\gamma - 1) \text{ в точке } E, \quad \Theta = 2 / (\gamma - 1) - V_1 \text{ в точке } D$$

Для  $\gamma = 3$  точно так же, интегрируя (2.2) вдоль  $DE$ , получим

$$\xi_1 = 2\Theta - 1, \quad \xi_2 = \Theta \sqrt{\operatorname{ctg}^2(\alpha/2) - 2 \ln \Theta} \quad (3.7)$$

Аналогичные уравнения, вытекающие из формул (2.12) — (2.14), могут быть записаны и для кривой  $D_1E$ . Подкоренное выражение в формуле (3.5) для

$$\frac{2}{\gamma - 1} - V_1 \leq \Theta \leq \frac{2}{\gamma - 1}$$

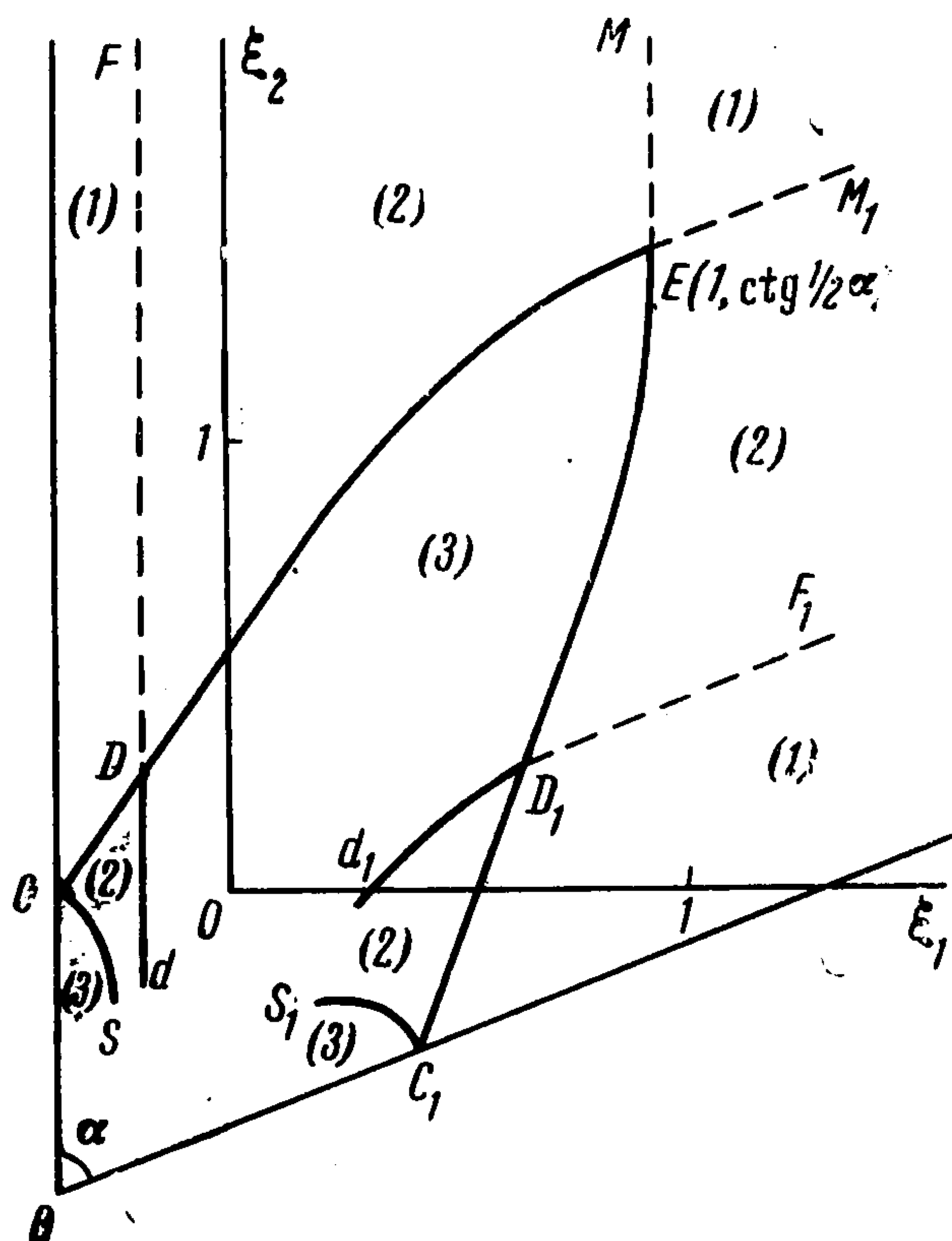
и в формуле (3.7) для любых  $0 < \alpha \leq 1/2\pi$  положительно, и, следовательно, возможно примыкание двойных волн к простой волне Римана вдоль всей  $DE$  (аналогичное утверждение имеет место и для  $D_1E$ ).

На фиг. 1 (и далее на фиг. 3, 5, 7) области, обозначенные цифрой (1), соответствуют областям постоянного течения или покоя, цифрой (2) — областям простых волн и (3) — областям двойных волн. Для рассматриваемой задачи всегда строим решение, в котором

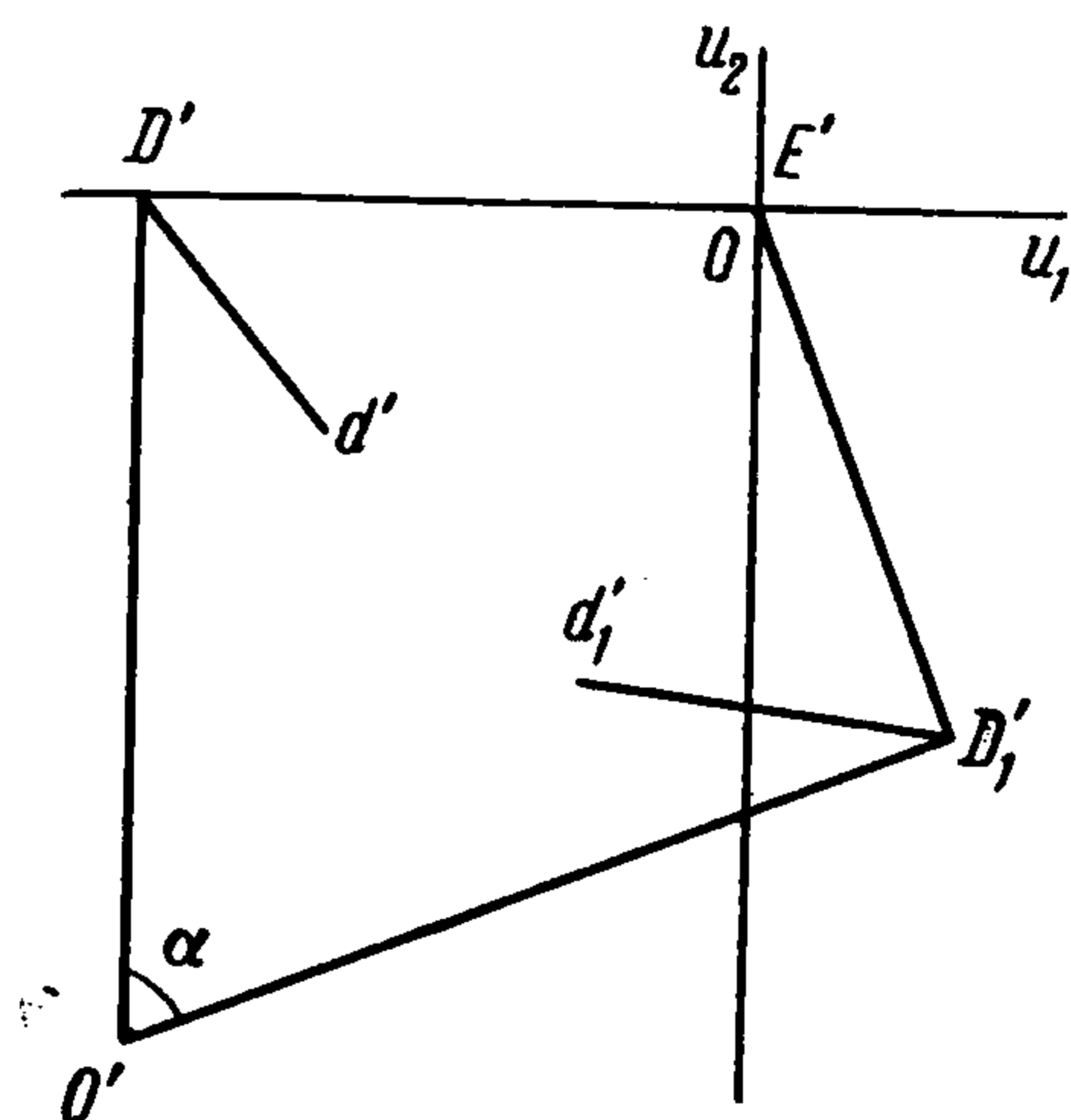
осуществляется примыкание областей типа (1) к областям типа (2), областей типа (2) — к областям типа (3), но нет непосредственного примыкания областей типа (3) к областям типа (1). Тогда линии  $CD$  и  $C_1D_1$  в соответствии со свойством 2.2, суть прямые, касательные в точках  $D$  и  $D_1$  кривых  $DE$  и  $D_1E$ .

В области  $dDED_1d_1$  необходимо решать задачу Гурса для уравнения (2.2) с данными на характеристиках  $DE$  и  $D_1E$ . В областях (3), примыкающих к точкам  $C$  и  $C_1$ , необходимо решать смешанные задачи с данными на характеристиках  $CS$  и  $C_1S_1$  и условиями типа (3.3) на стенках  $OC$  и  $OC_1$ .

Форма характеристик  $CS$  и  $C_1S_1$  определяется после решения задачи Гурса и построения простых волн в областях  $SCDd$  и  $S_1C_1D_1d_1$  посредством решения



Фиг. 1



Фиг. 2

задачи Коши для обыкновенного уравнения (2.6) с начальными данными  $\Theta_1 = \Theta_1^0$ ,  $\Theta_2 = \Theta_2^0$  соответственно в точках  $C$  и  $C_1$

Покажем, что всегда

$$\Theta_1^{0^2} + \Theta_2^{0^2} > 1 \quad \text{при } V_i \leq 2 / (\gamma - 1), \quad \gamma > 1, \quad 0 < \alpha \leq 1/2\pi \quad (3.8)$$

Неравенство (3.8) достаточно доказать лишь для точки  $C$  и произвольных  $V_1$ ,  $\gamma$  и  $\alpha$  из указанной области (тогда, так как точка  $E$  лежит на биссектрисе угла  $COC_1$ , и в точке  $C_1$  условие (3.8) будет выполнено)

Проекция вектора  $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ , касательного к кривой  $DE$  в точке  $D$ , пользуясь уравнениями (3.5), (3.7), запишем в виде

$$\tau_1 = \frac{\gamma + 1}{2}, \quad \tau_2 = \frac{\gamma + 1}{4} \frac{(\gamma - 3)\varepsilon - 2(\gamma - 1)}{\sqrt{(\gamma - 3)[(\gamma - 3)\varepsilon - (\gamma + 1)]}} \quad (\gamma \neq 3) \quad (3.9)$$

$$\varepsilon = \left( \frac{\gamma + 1}{\gamma - 3} + \text{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \right) \left( 1 - \frac{\gamma - 1}{2} V_1 \right)^{\frac{3-\gamma}{\gamma-1}} \quad (3.10)$$

$$\tau_1 = 2, \quad \tau_2 = \frac{\text{ctg}^2(\alpha/2) - 2 \ln(1 - V_1) - 1}{\sqrt{\text{ctg}^2(\alpha/2) - 2 \ln(1 - V_1)}} \quad (\gamma = 3) \quad (3.11)$$

Вдоль прямой  $OC$  значение  $\Theta_1 = 0$ . Проводя прямую  $DC$  через точку  $D$  в направлении вектора  $\tau$ , в соответствии с формулами (2.3) в точке  $C$  будем иметь

$$\Theta_1^0 = 0, \quad \Theta_2^0 = \frac{(\gamma - 3)\varepsilon - 4}{2 \sqrt{(\gamma - 3)[(\gamma - 3)\varepsilon - (\gamma + 1)]}} \quad (\gamma \neq 3) \quad (3.12)$$

$$\Theta_1^0 = 0, \quad \Theta_2^0 = \frac{1}{2} \frac{\text{ctg}^2(\alpha/2) - 2 \ln(1 - V_1) + 1}{\sqrt{\text{ctg}^2(\alpha/2) - 2 \ln(1 - V_1)}} \quad (\gamma = 3) \quad (3.13)$$

Полагая

$$z^2 = \begin{cases} \varepsilon - (\gamma + 1)/(\gamma - 3) & \text{для } \gamma \neq 3 \\ \operatorname{ctg}^2(\alpha/2) - 2 \ln(1 - V_1) & \text{для } \gamma = 3 \end{cases}$$

и  $z > 0$  для  $\Theta_2^\circ$  независимо от  $\gamma$  получим выражение

$$\Theta_2^\circ = 1/2 (z + z^{-1}) \quad (3.14)$$

Покажем, что

$$z > 1 \quad \text{для } 0 < V_1 \leq \frac{2}{\gamma - 1}$$

Для случая  $\gamma = 3$  это следует непосредственно из формулы для  $z^2$ , так как  $\alpha \leq 1/2\pi$ .  
Для  $\gamma \neq 3$  рассмотрим две возможности

$$1 < \gamma < 3 \quad \text{или} \quad 0 \leq \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} V_1\right)^{\frac{3-\gamma}{\gamma-1}} < 1$$

Имеем

$$\begin{aligned} z^2 &= \frac{\gamma + 1}{3 - \gamma} \left[ 1 - \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} V_1\right)^{\frac{3-\gamma}{\gamma-1}} \right] + \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} V_1\right)^{\frac{3-\gamma}{\gamma-1}} > \\ &> \frac{\gamma + 1}{3 - \gamma} + \left(1 - \frac{\gamma + 1}{3 - \gamma}\right) \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} V_1\right)^{\frac{3-\gamma}{\gamma-1}} > \frac{\gamma + 1}{3 - \gamma} + 2 \frac{1 - \gamma}{3 - \gamma} = 1 \end{aligned}$$

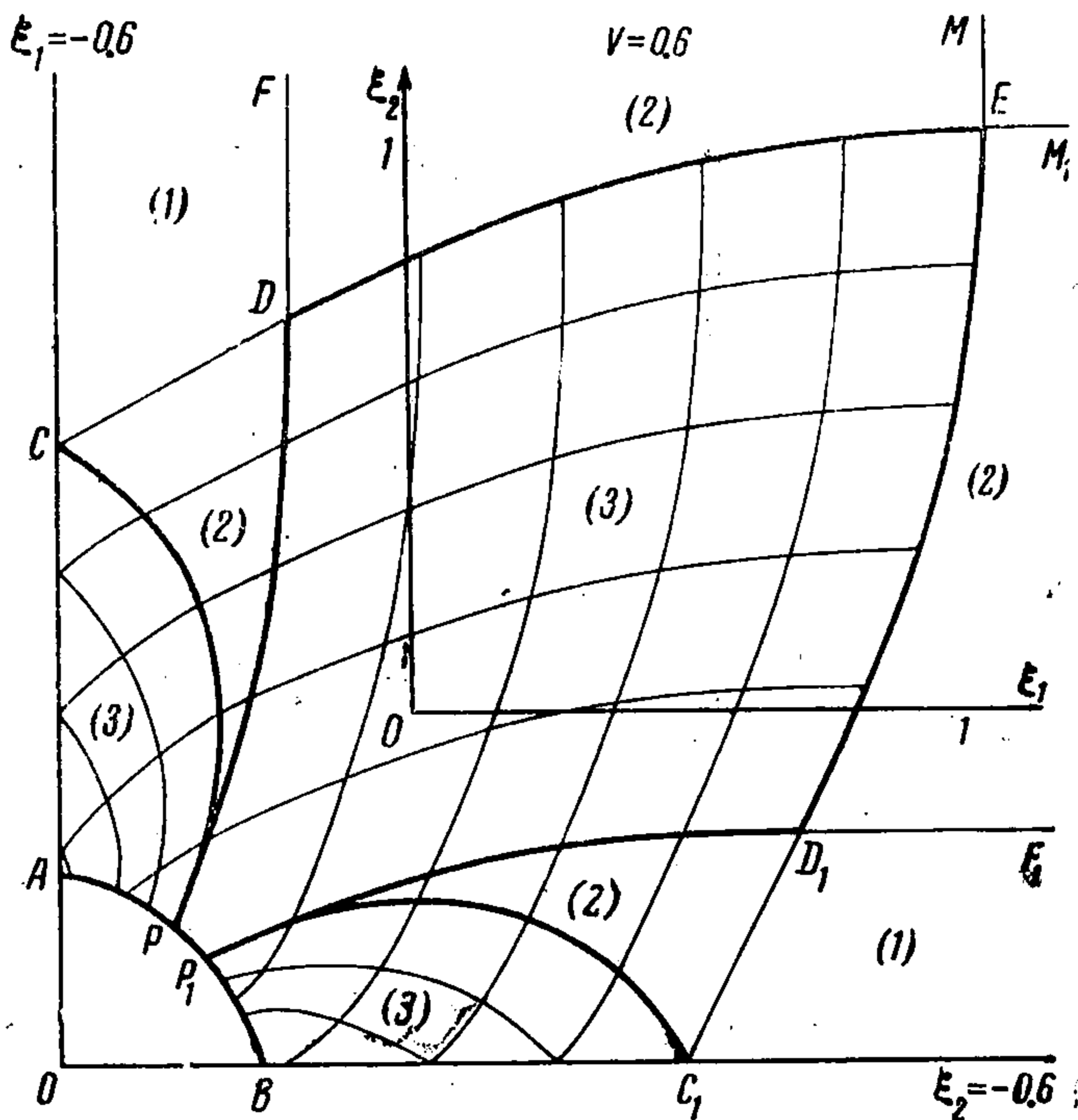
Второй случай

$$\left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} V_1\right)^{\frac{3-\gamma}{\gamma-1}} > 1$$

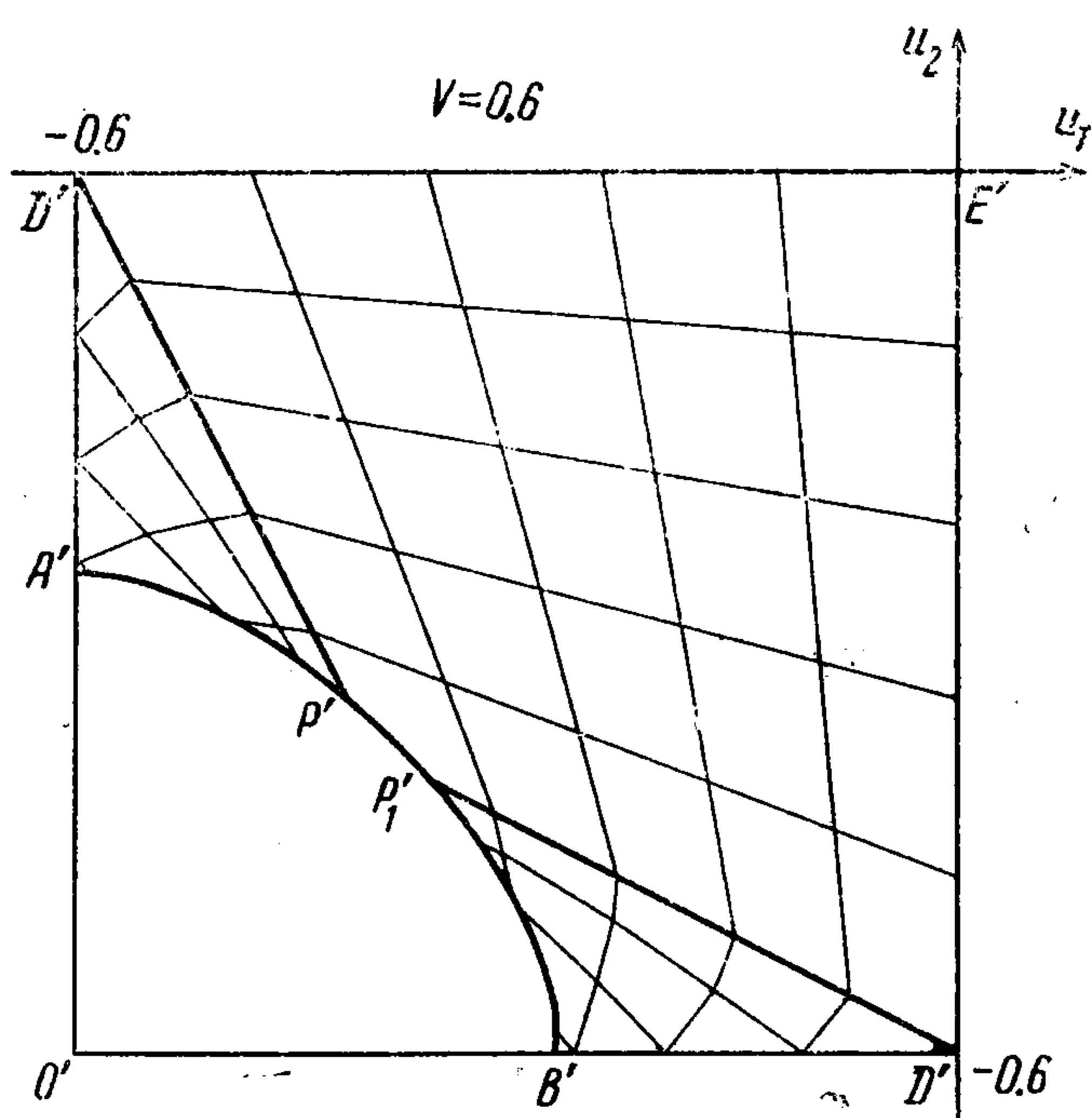
Имеем

$$z^2 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 3} \left[ \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} V_1\right)^{\frac{3-\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right] + \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} V_1\right)^{\frac{3-\gamma}{\gamma-1}} > \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \geq 1$$

Из (3.14) для  $z > 1$  следует, что  $\Theta_2^\circ > 1$ , и, таким образом неравенство (2.8) доказано. Итак, можно всегда начать считать смешанную задачу в областях типа (3), приме-



Фиг. 3



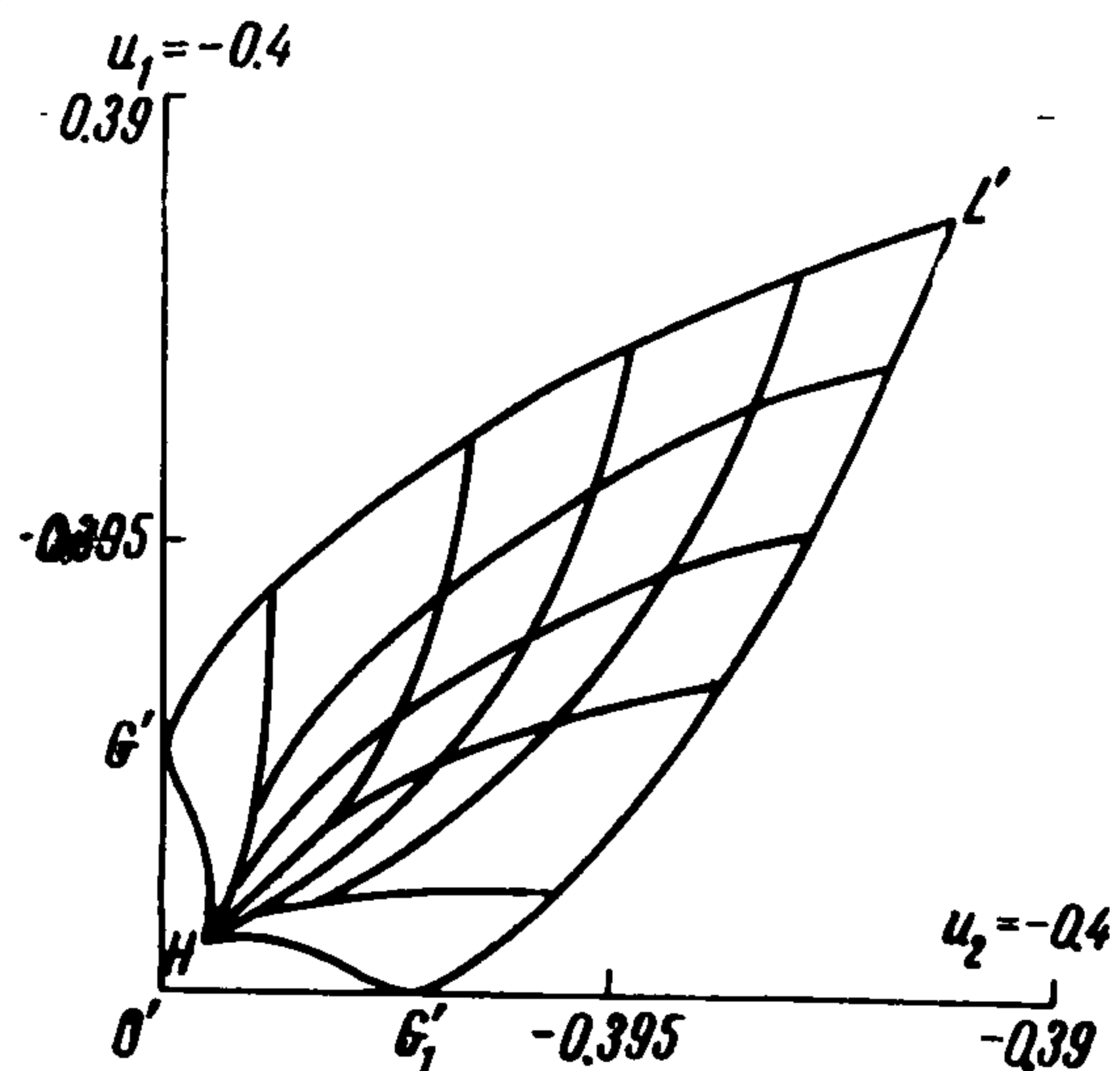
Фиг. 4

кающих к точкам  $C$  и  $C_1$ , так как гиперболичность уравнения (2.2) в  $C$  и  $C_1$  доказана. Прямая  $DC$  при этом отделяет область постоянного течения типа (1) от области простой волны  $SCDd$ .

Определение дальнейшей конфигурации области течения существенно зависит от конкретных значений  $V_1$ ,  $\alpha$  и  $\gamma$  и может быть сделано, по-видимому, лишь численно, причем алгоритм построения течений требует решения задач Гурса, смешанных



4. Ниже приводятся результаты конкретных расчетов для некоторых значений параметров  $\alpha$ ,  $\gamma$  и  $V_i$  (в областях гиперболичности уравнения (2.2)). Расчеты задач Гурса и смешанных задач проводились методом характеристик Массо с итерациями на ЭВМ. Как правило, вдоль каждой характеристики бралось 30—40 расчетных точек.



Фиг. 9

Созданная программа позволила осуществлять «сквозной» расчет конфигураций вплоть до линии смыкания с зоной вакуума или до линии параболичности.

На фиг. 3, 5, 7 приведены конфигурации области течения в координатах  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  и показано поведение характеристик системы уравнений в автомодельных переменных, описывающей данное движение, для случаев  $\alpha = 1/2\pi$ ,  $\gamma = 3$ ,  $V_1 = V_2 = V = 0.6, 0.5, 0.4$ . Области постоянного течения, простых волн и двойных волн обозначены соответственно цифрами (1), (2), (3). Для случаев  $V = 0.6, 0.5$  в окрестности точки  $O$  появляется зона вакуума: именно,  $\Theta = 0$  на линии  $AB$ . На фиг. 5 области  $NSK$  и  $N_1S_1K$  являются областями типа (2).

Случай  $V = 0.4$  дает пример безотрывного течения. На фиг. 7 линия  $GG_1$  является линией параболичности, причем характеристики в области  $GLG_1$  касаются  $GG_1$  (в плоскости  $\xi_1, \xi_2$ ); области  $Q_1TR$  и  $Q_1T_1R_1$  являются областями типа (1), области  $TQL$  и  $T_1Q_1L$  — областями типа (2) и области  $QLG, Q_1LG_1, GLG_1$  — типа (3). Функция  $\Theta$  вдоль  $GG_1$  меняется мало и равна примерно 0.12. Критическая скорость  $V_1 = V_2 = V^*$ , разделяющая случаи появления зоны вакуума и появления линии параболичности, равна для данных  $\alpha$  и  $\gamma$  0.42.

На фиг. 4, 6, 8 изображены в плоскости годографа области течений и характеристики также, для  $V = 0.6, 0.5, 0.4$ . Точки плоскости годографа, соответствующие точкам плоскости  $\xi_1, \xi_2$ , обозначены теми же буквами, что и в плоскости  $\xi_1, \xi_2$ , но со штрихами. Линии  $D'P', D_1'P', D_1''P', P'S', P'S_1', P'R', P'R_1', L'R', L'R_1'$  соответствуют простым волнам.

На фиг. 9 в увеличенном масштабе изображена в плоскости годографа область  $O'G'L'G_1'$  и линия параболичности  $G'H'G_1'$ . Краевую задачу для уравнения (2.2) необходимо решать в области  $O'G'H'G_1'$ . Область эллиптичности уравнения (2.2) в плоскости  $u_1, u_2$ , как показывают расчеты, оказывается очень малой.

Авторы благодарят В. А. Сучкова за полезную дискуссию.

Поступила 9 XI 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Погодин Ю. Я., Сучков В. А., Яненко Н. Н. О бегущих волнах уравнений газовой динамики. Докл. АН СССР, 1958, т. 119, № 3.
  2. Сучков В. А. Истечение в вакуум на косої стенке. ПММ, 1963, т. 27, вып. 4.
  3. Сидоров А. Ф. Два точных решения уравнений гидродинамики типа тройной волны. ПММ. 1964, т. 28, вып. 6.
  4. Яненко Н. Н. Бегущие волны системы квазилинейных уравнений. Докл. АН СССР, 1956, т. 109, № 1.
- Сидоров А. Ф., Яненко Н. Н. К вопросу о нестационарных плоских течениях политропного газа с прямолинейными характеристиками. Докл. АН СССР, 1958, № 123, № 5.