О ПРИМЕНИМОСТИ ТЕОРИИ ОДНОМЕРНОГО ПОТОКА ПРИ НАЛИЧИИ ТОКОВ ХОЛЛА

Б. В. Елисеев

(Москва)

Обобщенный закон Ома для слабо ионизованной плазмы, как известно, имеет вид

$$\mathbf{j} + \mathbf{j}\times\omega\tau = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}) \qquad \left(\omega\tau = \frac{e\mathbf{B}\tau}{m}\right) \tag{1}$$

Здесь ω — электронная циклотронная частота, τ — время свободного пролета электрона. Величина $\omega\tau$ зависит от концентрации нейтральных частиц, поэтому возникновение градиентов концентрации приводит к искажению линий тока по сравнению с распределением их в однородной среде. Воздействие флюктуаций плотности на протекание тока изучалось в работах [1,2], где, в частности, отмечалось, что при $\omega\tau$, не малых, по сравнению с единицей, влияние неоднородностей существенно зависит от их конкретного распределения в пространстве.

При $\omega\tau \gtrsim 1$ распределение тока, вообще говоря, является неоднородным. Однако для секционированных электродов, если длина электродов вдоль потока значительно меньше расстояния между ними, холловским током в несжимаемой жидкости можно пренебречь [3]. Также малосущественным является возникновение неодномерного распределения токов за счет изменения $\omega\tau$ в сжимаемой жидкости при воздействии магнитного поля, так как возникающие при этом градиенты плотности перпендикулярны направлению тока и поэтому слабо влияют на его величину. В этих случаях для канала постоянного сечения с достаточно малой длиной секционирования применимы одномерные уравнения. Если же сечение канала меняется, как, например, при течении в сопле, или стенки канала обладают шероховатостями, то возникает неодномерность потока вследствие появления компоненты скорости, перпендикулярной оси канала, и возникновения неоднородного распределения плотности. Как будет показано в данной работе, малые неоднородности плотности на пути тока приводят к его сильному изменению, и одномерные уравнения оказываются неприменимыми при достаточно больших $\omega\tau$ даже в случае секционированных электродов. Влияние неоднородности потока рассмотрим на примере симметричного двумерного сопла с медленно меняющимся сечением и на примере дозвукового ламинарного течения в канале с профилем, обладающим достаточной кривизной.

Ограничимся случаем секционированных электродов и будем считать проводимость постоянной. Уравнения магнитной гидродинамики с учетом токов Холла принимают вид

$$\operatorname{div}\rho\mathbf{v} = 0, \qquad \rho(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{j}\times\mathbf{B}, \qquad \mathbf{v}\nabla p = \gamma\frac{p}{\rho}\mathbf{v}\nabla\rho + (\gamma-1)\frac{j^2}{\sigma}$$

$$\mathbf{j} + \mathbf{j}\times\boldsymbol{\delta} = \sigma(-\nabla\varphi + \mathbf{v}\times\mathbf{B}), \qquad \operatorname{div}\mathbf{j} = 0 \qquad \left(\delta = \frac{e\mathbf{B}\tau}{m}\right) \tag{2}$$

Здесь φ — электрический потенциал.

Учет совместного влияния изменения сечения сопла и магнитного поля на течение довольно сложен, поэтому для упрощения предположим, что гидродинамическое воздействие на поток вследствие изменения сечения более сильное, чем магнитогидродинамическое. Магнитное поле оказывает существенное влияние на поток на длине порядка $\rho v / \sigma B^2$. Если рассматривать поток на меньших расстояниях (т. е. считать длину секции меньше этой характерной длины), то можно пренебречь влиянием распределения тока и потенциала на распределение гидродинамических величин. Поэтому определим вначале величину поправок к уравнениям одномерного течения без учета воздействия магнитного поля на поток. Полагаем

$$\rho = \rho_0 + \rho_1, \qquad p = p_0 + p_1 \qquad \left(\rho_0 = \frac{1}{y_2 - y_1}\int_{y_1}^{y_2} \rho\, dy\right)$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$ — уравнения границ сопла. Средняя скорость потока направлена по оси x.

Будем также считать, что полное изменение сечения мало. Это позволяет считать средние величины $\rho_0, v_0, \ldots$ медленно меняющимися функциями x и пренебрегать их производными.

Интегрируя уравнение непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) = 0$$

в пределах от y_1 до y_2 с учетом обращения в нуль нормальной компоненты скорости на стенке, получим обычное уравнение одномерного движения

$$\frac{\partial}{\partial x}[(\rho v_x)_0 Y] = 0, \qquad Y = y_2 - y_1 \tag{3}$$

В то же время с точностью до квадратичных членов

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)_0 + \rho_0 \frac{\partial v_{1x}}{\partial y} + v_0 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial v_{1y}}{\partial y} = 0 \tag{4}$$

и средние значения произведений равны произведениям средних значений, как например $(\rho v_x)_0 = \rho_0 v_0$.

Вычитая (3) из (4), получим уравнение для определения поправки к одномерному уравнению непрерывности

$$\frac{\partial v_{1x}}{\partial x} + \frac{v_0}{\rho_0}\frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \frac{\partial v_{1y}}{\partial y} - \frac{v_0}{Y}\frac{dY}{dx} = 0 \qquad (Y = y_2 - y_1) \tag{5}$$

Аналогично могут быть получены остальные уравнения для поправок

$$\rho_0 v_0 \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} = -\frac{\partial p_1}{\partial x}, \qquad \rho_0 v_0 \frac{\partial v_{1y}}{\partial x} = -\frac{\partial p_1}{\partial y}, \qquad \frac{\partial p_1}{\partial x} = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}\frac{\partial \rho_1}{\partial x} \tag{6}$$

При выводе уравнений (6) было учтено, что поправка к давлению является четной функцией y для симметричного сопла. Граничные условия для системы (5), (6) заключаются в равенстве нулю нормальной к стенке сопла компоненты скорости

$$v_{1y}(y = y_1) = v_0 dy_1 / dx, \quad v_{1y}(y = y_2) = v_0 dy_2 / dx$$

Пусть уравнения границ заданы в виде

$$y_{1,2} = \pm f(\varepsilon x / L) \tag{7}$$

Здесь ε — малая величина, а L — некоторая характерная длина. В этом случае поправки к среднему значению плотности являются величинами порядка ε^2. Действительно, сохраняя основные члены в первом из уравнений системы (5), (6), получаем

$$v_{1y} = v_0 \frac{1}{Y}\frac{dY}{dx} y$$

т. е. линейное распределение y — компоненты скорости по сечению. Следующее уравнение для v_{1y} дает

$$\frac{\partial p_1}{\partial y} = -\rho_0 v_0^2 y \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{Y}\frac{dY}{dx}\right) \tag{8}$$

Но если уравнение границы сопла задано в виде (7), то поправки к давлению имеют, согласно (8), второй порядок малости по ε, равно как и поправки к среднему значению плотности. Теперь можно также убедиться, что отброшенные члены в (5) действительно имели более высокий порядок по ε. Далее, при заданном распределении гидродинамических величин определим возмущения тока и потенциала. Для секционированных электродов, если ширина канала значительно превышает длину электродов вдоль канала, распределение тока и электрического поля при условии постоянства скорости и постоянства сечения можно считать однородным, за исключением приэлектродной области [3]. Поэтому будем искать отклонения тока и электрического поля от однородного распределения, предполагая для простоты электроды каждой секции короткозамкнутыми, а средний ток по оси x отсутствующим. Будем считать δ обратно пропорциональной плотности нейтральных частиц, поэтому

$$\delta_1 = -\delta_0 \rho_1 / \rho_0$$

Магнитное поле направлено по оси z.

При этих условиях из двух последних уравнений системы (2), линеаризуя их и исключая компоненты тока, получим для определения возмущений потенциала уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi_1 = \delta_0 B\left(\frac{\partial v_{1x}}{\partial x} - \frac{v_0}{\rho_0}\frac{\partial \rho_1}{\partial x} - \frac{\delta_0 v_0}{\rho_0}\frac{\partial \rho_1}{\partial y} + \frac{\partial v_{1y}}{\partial y}\right) + B\left(\frac{\partial v_{1y}}{\partial x} - \frac{\partial v_{1x}}{\partial y}\right) \qquad (9)$$

Для сопла, образованного непроводящими стенками, возмущения потенциала также будут определяться из уравнения (9), где следует положить $v_{1y} = 0$, $\partial\rho_1 / \partial y = 0$, так как изменение гидродинамических величин происходит в плоскости x, z.

Следовательно, поправки к потенциалу при больших δ имеют порядок $\delta^2\varepsilon^2$ для сопла, образованного электродами, или $\delta\varepsilon$ — для сопла, образованного непроводящими стенками. Из выражений для поправок к току

$$\begin{aligned} j_{1x} &= \frac{\sigma}{1+\delta_0^2}\left(\delta_0\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + \delta_0 B v_{1x} - v_0 B\frac{\rho_1}{\rho_0}\delta_0 - \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + v_{1y}B\right) \\ j_{1y} &= -\frac{\sigma}{1+\delta_0^2}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + Bv_{1x}\right) - \frac{\sigma\delta_0}{1+\delta_0^2}\left(v_0 B\frac{\rho_1}{\rho_0}\delta_0 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} - v_{1y}B\right) \end{aligned} \qquad (10)$$

следует, что они имеют порядок $\varepsilon^2\delta$, если неоднородность возникает на пути тока, и просто ε — при неоднородности в плоскости, перпендикулярной току. Таким образом, для применимости одномерных уравнений достаточно, чтобы было $\varepsilon^2\delta \ll 1$ и $|\varepsilon| \ll 1$ для сопла с медленно меняющимся сечением.

Рассмотрим поэтому более подробно пример профиля, вторая производная которого не является малой величиной. Наиболее характерным примером может служить двумерное течение в канале, одна из границ которого является синусоидальной, поскольку во многих случаях функцию, дающую уравнение стенок, можно разложить в ряд Фурье. При дозвуковом течении возмущения, создаваемые волнистой стенкой, экспоненциально затухают при удалении от нее (см., например, [4]). Поэтому если стенки находятся достаточно далеко одна от другой, то можно не учитывать их взаимного влияния (если, например, одна из стенок волнистая, а вторая гладкая; или обе стенки волнистые).

Поправки к скорости невозмущенного движения v_0 (вдоль оси x), если уравнение волнистой стенки записано в виде $y = \varepsilon_0 \sin kx$ (вторая стенка считается гладкой) v_{1x}, v_{1y} имеют вид

$$v_{1x} = v_0\frac{\varepsilon_0 k}{b}e^{-\varkappa y}\sin kx, \qquad v_{1y} = \varepsilon_0 k v_0 e^{-\varkappa y}\cos kx$$

$$b^2 = 1 - M^2, \qquad \varkappa = kb, \qquad M^2 = \frac{v_0^2\rho_0}{\gamma p_0}$$

Изменения давления в плотности найдем из линеаризованных уравнений системы (2)

$$p_1 = \gamma\frac{p_0}{\rho_0}\rho_1, \qquad \rho_0 v_0\frac{\partial v_{1x}}{\partial x} = -\frac{\partial p_1}{\partial x}$$

т. е.

$$\rho_1 = -\frac{\varepsilon_0 k M^2\rho_0 e^{-\varkappa y}}{b}\sin kx$$

Уравнение (9) в этом случае принимает вид

$$\Delta\varphi_1 = v_0 B\delta_0 M^2\varepsilon k^2 e^{-\varkappa y}\left(\frac{2\cos kx}{b} - \delta_0\sin kx\right) \qquad (11)$$

Граничные условия заключаются в равенстве нулю возмущений потенциала на электродах

$$\varphi_1 = 0, \quad y = 0, \ l \qquad (12)$$

и обращения в нуль компоненты тока вдоль оси канала на границах секции

$$j_{1x} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = \delta_0\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + B\left(v_{1y} - \delta_0 v_0\frac{\rho_1}{\rho_0} + \delta_0 v_{1x}\right) \qquad (x = x_1, x_2) \qquad (13)$$

При $\delta_0 \gg 1$ наиболее существенными членами в выражении (10) для j_{1y} будут $(\sigma / \delta_0)\, \partial\varphi_1 / \partial x$, а в выражении для j_{1x} — член $(\sigma / \delta_0)\, \partial\varphi_1 / \partial y$. Эти члены, вообще говоря, имеют порядок $\varepsilon_0\delta_0 k$. Действительно, граничные условия (12), (13) (если учесть порядок членов в (13)) сводятся к более простым условиям: $\varphi_1 = 0$ на границах прямоугольника $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, $0 \leqslant y \leqslant l$. Решение уравнения Пуассона (11) в этом случае можно записать в виде ряда

$$\varphi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1n}(x) \sin \alpha_n y \qquad \left(\alpha_n = \frac{n\pi}{l}\right)$$

$$\varphi_{1n} = \frac{2v_0 B\delta_0 M^2 \varepsilon k^2 \alpha_n}{l(k^2+\alpha_n^2)(\varkappa^2+\alpha_n^2)} \left[\frac{\sin kx_1 \operatorname{sh} \alpha_n (x-x_2) + \sin kx_2 \operatorname{sh} \alpha_n (x_1 - x)}{\operatorname{sh} \alpha_n (x_2 - x_1)} - \sin kx\right]$$

(при вычислении предполагалось $\varkappa l \gg 1$).

На электродах наиболее существенный член в выражении (10) для j_{1y}, а именно, $(\sigma / \delta_0) / (\partial \varphi_1 / \partial x)$ обращается в нуль, однако, ток j_{1x} на электродах, вообще говоря, не мал. Появление таких замкнутых токов (порядка $\varepsilon_0 k \delta_0$) приводит к диссипации энергии потока. Величина токов определяется числом Маха, способом секционирования.

Итак, наличие неоднородностей в распределении величин по сечению канала с секционированными электродами приводит к существенным поправкам к уравнениям одномерного течения при больших $\omega\tau$, в особенности, если стенки канала обладают достаточной кривизной. Величина возникающих токов определяется величиной возмущения плотности. Для сопла с медленно меняющимся сечением поправки к току (при $(\omega\tau)^2 \gg 1$) порядка $\varepsilon^2 \omega\tau$, если ε — угол наклона сопла. В дозвуковом ламинарном течении возмущения плотности, создаваемые волнистой стенкой, имеют порядок ε_0 / λ (λ — длина волны, ε_0 — ее амплитуда), а возникающие токи порядка $\varepsilon_0 \omega\tau / \lambda$ (по отношению к току в канале постоянного сечения). На величину возмущений плотности и, следовательно, на величину возникающих токов существенное влияние оказывает число Маха в потоке, эти возмущения в дозвуковом течении падают с уменьшением числа Маха как M^2.

Автор благодарит А. А. Веденова и Е. П. Велихова за обсуждение работы.

Поступила 16 VI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Велихов Е. П. Неустойчивость слабоионизованной плазмы с током, вызванная эффектом Холла. Докл. на Международном симпозиуме по МГД-методу генерации энергии, Ньюкасл, 1962.
2. Yoshikawa S., Rose D. J. Anomalous diffusion of a plasma across a magnetic field. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 3.
3. Hurwitz H., Kilb R. W., Sutton G. W. Influence of tensor conductivity on current distribution in a MHD generator. J. Appl. Phys., 1961, vol. 32, No 2.
4. Липман Г. В., Рошко А. Элементы газовой динамики. Изд-во иностр. лит., 1960.

НЕКОТОРЫЕ КОНФИГУРАЦИИ ИЗЭНТРОПИЧЕСКИХ РАСПАДОВ ДВУМЕРНЫХ РАЗРЫВОВ

Е. В. Ермолин, А. Ф. Сидоров

(Свердловск)

Строятся решения некоторых двумерных нестационарных задач о движении двух плоских поршней в политропном газе.

1. Пусть политропный газ с уравнением состояния $p = a^2 \rho^\gamma$ (p — давление, ρ — плотность, γ — показатель адиабаты, $a^2 = \text{const}$) в начальный момент времени $t = 0$ покоится внутри некоторого двугранного угла, образованного двумя пересекающимися плоскостями P_1 и P_2, угол α между которыми удовлетворяет соотношению $0 < \alpha \leqslant {}^1/_2\pi$. Будем рассматривать задачу о нахождении нестационарных плоских течений, возникающих в газе, когда плоскости P_1 и P_2, играющие роль поршней, в момент $t = 0$ начинают выдвигаться из газа с постоянными скоростями, равными соответственно V_1 и V_2. Возникающие течения будут двумерными автомодельными, так что под-