Прикладная математика и механика. Том 30, 1966

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПУЛЬСИРУЮЩЕГО ПЛАЗМЕННОГО ЦИЛИНДРА

Ю. В. Вандакуров

(Ленинград)

Работа посвящена исследованию устойчивости идеально проводящей цилиндрически симметричной плазмы, удерживаемой переменным во времени магнитным полем. На примере сжимающегося однородного цилиндра рассмотрена неустойчивость, аналогичная известной неустойчивости в тяжелой жидкости, поддерживаемой против силы тяготения более легкой средой. Для неоднородной испытывающей периодические сжатия и расширения плазмы в работе проведен анализ условий возбуждения нерадиальных собственных колебаний. При малой амплитуде пульсаций эта неустойчивость имеет резонансный характер.

Для описания поведения плазмы в работе используется обычная система уравнений магнитной гидродинамики. Основная часть расчетов проведена для плазмы в сильном внешнем магнитном поле (разделы 2, 4, 5). Один пример гравитирующего цилиндра, изменение радиуса которого происходит вследствие собственных радиальных колебаний, исследован в разделе 6.

1. Основные уравнения. Будем рассматривать движения идеально проводящей невязкой плазмы, описываемой следующей системой уравнений магнитной гидродинамики:

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p - \frac{1}{4\pi}\mathbf{H}\times\operatorname{rot}\mathbf{H} - \rho\nabla\Phi$$
$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\operatorname{div}\mathbf{v}, \qquad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla \tag{1.1}$$
$$\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{H}), \qquad \nabla^2\Phi = 4\pi G_0\rho$$

Здесь $\mathbf{v}$ — скорость; ρ — плотность; Φ — гравитационный потенциал, $G_0 = 6{,}67\cdot 10^{-8}$ *дин·см*^{2}/*г*^{2} — гравитационная постоянная. В (1.1) учтена гравитация среды, что существенно для конфигураций, представляющих интерес для астрофизики.

Система (1.1) должна быть дополнена уравнением переноса энергии. Однако для задачи устойчивости плазмы в сильном магнитном поле вид этого уравнения оказывается несущественным. При изучении устойчивости плазмы в магнитном поле, давление которого сравнимо с плазменным, будет использоваться уравнение адиабатичности

$$\frac{d}{dt}(p\rho^{-\gamma}) = 0 \qquad (\gamma = \mathrm{const}) \tag{1.2}$$

Рассмотрим сначала движение с цилиндрической симметрией. Считаем, что плазма может вращаться с однородной угловой скоростью. Магнитное поле имеет две компоненты. В цилиндрических координатах r, φ, z распределения будут

$$v_r = v_r(r, t), \qquad v_\varphi = rW(t), \qquad v_z = 0, \qquad H_r = 0$$
$$H_\varphi = rg(r, t), \qquad H_z = h(r, t) \tag{1.3}$$

Введем переменные Лагранжа: a, φ_0, z_0, t_0;

$$a \equiv r_0 = (r)_{t_0=0}, \quad \varphi_0 = (\varphi)_{t_0=0}, \quad \ldots$$

$$r = a + \int_0^{t_0} v_r(a, t_0)\, dt_0, \qquad \varphi = \varphi_0 + \int_0^{t_0} W(t_0)\, dt_0 \qquad \binom{z = z_0}{t = t_0} \tag{1.4}$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + W \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial t_0}, \qquad \frac{\partial}{\partial r} = \chi \frac{\partial}{\partial a}, \qquad \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi_0}$$

$$\chi = \left(\frac{\partial r}{\partial a}\right)^{-1}, \qquad v_r = \frac{\partial r}{\partial t_0}$$

из системы (1.1), (1.2) получим (индекс 0 у t_0 везде в дальнейшем опускаем)

$$\frac{rx}{\chi} = ax_0, \quad x = \rho,\ g \quad \text{или} \quad h, \quad x_0 = (x)_{t=0}, \quad r^2 W = a^2 W_0 \tag{1.5}$$

$$\frac{a\rho_0}{r}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} - \frac{a^4 W_0^2}{r^3}\right) = -\frac{\partial}{\partial a}\left[p(a, t) + \frac{a^2\chi^2}{8\pi r^2}(h_0^2 + r^2 g_0^2)\right] -$$

$$- \frac{a^2 g^2{}_0 \chi}{4\pi r} - \frac{4\pi a\rho_0 G_0}{r^2} \int_0^a a\rho_0(a)\, da \tag{1.6}$$

$$p\rho^{-\gamma} = p_0\rho_0^{-\gamma} \quad \text{или} \quad p = p_0 (a\chi / r)^\gamma \tag{1.7}$$

Формула (1.7) справедлива только для адиабатических движений. Уравнение (1.6) определяет функцию $r(a, t)$. При этом должны быть заданы распределения плотности и других величин в начальный момент времени. Для находящегося в вакууме плазменного цилиндра решение (1.6) нужно связать с решением внешней задачи. На границе должна быть непрерывной сумма плазменного и магнитного давлений, т. е. выражение в квадратных скобках в правой части (1.6). Особенности магнитного поля в вакууме определяют те сторонние источники, которые вызывают рассматриваемое движение плазмы. В случае собственных колебаний типа радиальных пульсаций это поле на бесконечности убывает.

Пусть теперь на рассмотренное радиальное движение наложено малое возмущение, так что полные значения плотности, скорости и др. равны $\rho + \rho^*$, $\mathbf{v} + \mathbf{v}^*$ и т. п., где $\rho = \rho(r, t)$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(r, t)$, ... определяются из уравнений (1.5) — (1.7), а звездочкой отмечено возмущение, зависящее от φ и z, как $\exp i(m\varphi + kz)$. Линеаризуя систему (1.1) и переходя от эйлеровых переменных к введенным выше лагранжевым, получим

$$\rho\left[\chi \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\chi} v_r^*\right) - 2Wv_\varphi^*\right] + \rho^*\left(\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} - rW^2 + \chi \frac{\partial \Phi}{\partial a}\right) = \tag{1.8}$$

$$= -\chi \frac{\partial p_\Sigma^*}{\partial a} + \frac{1}{4\pi}(isH_r^* - 2gH_\varphi^*) + \chi \frac{\partial \rho}{\partial a} \Phi^*$$

$$\rho\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r v_\varphi^*}{\partial t} + 2Wv_r^*\right) = -\frac{im}{r} p_\Sigma^* + \frac{1}{4\pi}\left(isH_\varphi^* + \frac{\chi}{r}\frac{\partial r^2 g}{\partial a} H_r^*\right) \tag{1.9}$$

$$\rho \frac{\partial v_z^*}{\partial t} = -ikp_\Sigma^* + \frac{1}{4\pi}\left(isH_z^* + \chi \frac{\partial h}{\partial a} H_r^*\right) \tag{1.10}$$

$$\frac{\chi}{r}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{r}{\chi}\rho^*\right) = -\rho\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}^* - \chi\frac{\partial\rho}{\partial a}v_r^* \tag{1.11}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial rH_r^*}{\partial t} = isv_r^*, \quad \chi\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\chi}H_\varphi^*\right) = -rg\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}^* + isv_\varphi^* - \chi r\frac{\partial g}{\partial a}v_r^* \tag{1.12}$$

$$\frac{\chi}{r}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{rH_z^*}{\chi}\right) = -h\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}^* + isv_z^* - \chi\frac{\partial h}{\partial a}v_r^* \tag{1.13}$$

$$\frac{\chi}{r}\frac{\partial}{\partial a}\left(r\chi\frac{\partial\Phi^*}{\partial a}\right) - \left(\frac{m^2}{r^2} + k^2\right)\Phi^* = 4\pi G_0\rho^* \tag{1.14}$$

$$p_\Sigma^* = p^* + \rho\Phi^* + \frac{1}{4\pi}(rgH_\varphi^* + hH_z^*) \tag{1.15}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v}^* = \frac{\chi}{r}\frac{\partial rv_r^*}{\partial a} + \frac{imv_\varphi^*}{r} + ikv_z^*, \qquad s = mg + kh \tag{1.16}$$

Из уравнения адиабатичности (1.2) вытекает

$$\frac{\partial p^*}{\partial t} + \frac{\gamma\chi p^*}{r}\frac{\partial}{\partial a}\left(r\frac{\partial r}{\partial t}\right) = -\gamma p\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}^* - \chi\frac{\partial p}{\partial a}v_r^* \tag{1.17}$$

При исследовании устойчивости находящейся в вакууме ограниченной плазмы необходимо использовать условия, позволяющие связывать решения внутренней и внешней задач. Выведем такие условия для граничного слоя с резким скачком плотности. Пусть в слое $R - \delta \leqslant a \leqslant R$, $\delta \ll R$, плотность $\rho_0(a)$ изменяется от конечного значения до нуля, а давление $p_0(a)$ мало. Будем считать, что величины g, h, r, $v_r = \partial r/\partial t$, $\partial r/\partial a$ и $\partial v_r/\partial a$ с точностью до поправок порядка δ/R в слое являются функциями одного t. Это значит, в частности, что поверхностные токи отсутствуют (область с такими токами нужно отнести к внутренней области).

Умножим систему (1.8) — (1.17) на da/χ и проинтегрируем от $R-\delta$ до a, где $R - \delta \leqslant a \leqslant R$. Если принять, что

$$\int_{R-\delta}^{R} v_r^* da \sim v_r^*\delta$$

то будет

$$(p_\Sigma^* - \rho\Phi^*)|_{R-\delta}^{a} + \frac{1}{\chi}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} - rW^2 + \chi\frac{\partial\Phi}{\partial a}\right)\int_{R-\delta}^{a}\rho^* da = 0 \tag{1.18}$$

$$\left(\frac{\partial\Phi^*}{\partial a}\right)\Big|_{R-\delta}^{a} - \frac{4\pi G_0}{\chi^2}\int_{R-\delta}^{a}\rho^* da = 0 \tag{1.19}$$

$$(\rho v_r^*)|_{R-\delta}^{a} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{r}{\chi}\int_{R-\delta}^{a}\rho^* da\right) = 0 \tag{1.20}$$

при этом интегралы от $\mathbf{v}^*$, $\mathbf{H}^*$, p^* и p_Σ^* оказываются малыми величинами

$$\int_{R-\delta}^{R}\mathbf{H}^* da \sim \mathbf{H}^*\cdot\delta \qquad \text{и т. п.}$$

Исходное предположение о величине интеграла от v_r^* подтверждается интегрированием (1.18) и (1.20). Из (1.19) еще следует, что потенциал Φ^* в слое должен быть непрерывным. Полагая в (1.18) — (1.20) $a = R$, получим искомые условия сшивания решений.

2. Случай сильного поля. Рассмотрим основные уравнения устойчивости для плазмы в магнитном поле, давление которого много больше плазменного, так что

$$h_0^2 \gg 8\pi p_0, \qquad a\,(dh_0^2 \,/\, da) \sim 8\pi p_0 \tag{2.1}$$

Гравитацию среды учитывать не будем. Известно [1, 2], что при условии (2.1) и отсутствии вращения магнитогидродинамические неустойчивости возможны лишь в области длинноволновых возмущений, для которых

$$k^2R^2 \ll 1, \qquad kh_0 \sim mg_0, \qquad m \neq 0 \tag{2.2}$$

В дальнейшем будем принимать, что условие (2.2) удовлетворяется, хотя для рассматриваемой проблемы это ограничение является существенным. Например, при возникновении радиального движения некоторые гармоники могут стать колебательно неустойчивыми.

Предположим еще, что $\partial v_r \,/\, \partial t \sim v_r^2 \,/\, R$, а порядок величины $v_r\,(a, t)$ не превышает тепловую скорость v_T $(v_T \sim \sqrt{p_0 \,/\, \rho_0})$. Очевидно, что скорость изменения возмущений, описываемых системой (1.8) — (1.13), будет такого же порядка. При условиях (2.1), (2.2) из (1.13) вытекает $\operatorname{div} \mathbf{v}^* \approx 0$, причем слагаемое с v_z^* в последнем уравнении пренебрежимо мало. Используя еще уравнения (1.12), найдем

$$v_r^* = \frac{1}{isr}\frac{\partial rH_r^*}{\partial t}, \qquad v_\varphi^* = \frac{\chi}{m}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{s}\frac{\partial rH_r^*}{\partial t}\right), \qquad H_\varphi^* = \frac{i\chi}{m}\frac{\partial rH_r^*}{\partial a} \tag{2.3}$$

Равенство $\operatorname{div} \mathbf{H}^* = 0$ есть следствие (2.3). Подставляя выражения (2.3) в уравнения (1.11), (1.9) и (1.8), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{r\rho^*}{\chi} = \frac{i}{s}\frac{\partial \rho}{\partial a}\frac{\partial rH_r^*}{\partial t} \tag{2.4}$$

$$p_\Sigma^* = \frac{i\rho}{m^2}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[r\chi\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{s}\frac{\partial rH_r^*}{\partial t}\right)\right] - \frac{2imW}{s}\frac{\partial rH_r^*}{\partial t}\right\} + \frac{ir\chi}{4\pi m^2}\left(s\frac{\partial rH_r^*}{\partial a} - \frac{m}{r}\frac{\partial r^2 g}{\partial a}H_r^*\right) \tag{2.5}$$

$$\chi\rho\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{isr\chi}\frac{\partial rH_r^*}{\partial t}\right) - \frac{2W}{m}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{s}\frac{\partial rH_r^*}{\partial t}\right)\right] + \rho^*\left(\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} - rW^2\right) + \chi\frac{\partial p_\Sigma^*}{\partial a} - \frac{i}{4\pi}\left(sH_r^* - \frac{2g\chi}{m}\frac{\partial rH_r^*}{\partial a}\right) = 0 \tag{2.6}$$

Здесь $h_0 \approx \mathrm{const}$ и отброшены поправки порядка k^2R^2.

Зная решение системы (2.4) — (2.6), можно при помощи уравнения переноса энергии и (1.15) определить H_z^*. Это обстоятельство не препятствует нахождению решения следующего приближения, так как наряду с известной функцией H_z^* будет входить поправка к H_z^* и число уравнений будет равно числу неизвестных. Ввиду того, что вид уравнения переноса энергии несуществен, ситуация здесь оказывается сходной со случаем несжимаемой среды.

Рассмотрим граничные условия для плазменного цилиндра в вакууме. При $a \geqslant R$ $\mathbf{H}^* = \nabla\psi^*$, причем $\nabla^2\psi^* = 0$. Отсюда при малых k^2R^2

$$H_r^* = \frac{im}{|m|}H_\varphi^* = lB_V(t)\,r^{-|m|-1}, \qquad l = \exp i\,(m\varphi + kz)$$
$$H_z^* = \frac{kr}{m}H_\varphi^*, \quad p^* = 0, \quad \rho^* = 0, \quad B_V = B_V(t) \tag{2.7}$$

Для определения B_V нужно потребовать выполнения условия непрерывности нормальной компоненты возмущения магнитного поля. При отсутствии поверхностных токов придем к условию непрерывности H_r^*. Из выражений (1.20) с учетом (1.5) вытекает

$$\left(\frac{\rho_0}{is_0} rH_r^*\right)\Big|_{R-\delta}^{a} + \frac{r}{\chi}\int\limits_{R-\delta}^{a} \rho^* da = C^* \tag{2.8}$$

Здесь C^* не зависит от t. Выбор C^* определяется соотношением между возмущениями плотности и магнитного поля в начальный момент времени. Например, при отсутствии радиального сжатия или расширения плазмы компоненты возмущения пропорциональны exp $i\omega t$, так что $C^* = 0$. Случай $C^* \neq 0$ соответствует некоторым вынужденным колебаниям.

Полагая $C^* = 0$ из уравнений (1.18) и (2.8), получим

$$\left\{\frac{i\rho_0}{s_0}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} - rW^2\right)H_r^* + \left(p_\Sigma^* + \frac{isr}{4\pi\,|\,m\,|}H_r^*\right)\right\}_{a=R-\delta} = 0 \tag{2.9}$$

Задача привелась к нахождению решения системы (2.4) — (2.6), удовлетворяющего (2.9) и условию ограниченности в нуле.

3. Радиальное движение плазмы. Для некоторых типов движений с цилиндрической симметрией основное уравнение (1.6) для функции $r\ (a,\ t)$ может быть приведено к более простому. Будем рассматривать адиабатические движения при произвольном соотношении между магнитным и плазменным давлениями.

В работах [3-7] было показано, что для некоторых движений со скоростью v_r, являющейся линейной функцией радиуса, переменные в уравнении (1.6) разделяются. Обозначая точкой производную по t, положим

$$r = aw, \qquad v_r = aw^{\cdot} \qquad (w = w\ (t),\ w\ (0) = 1) \tag{3.1}$$

Из уравнений (1.5) и (1.7) получим

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{g}{g_0} = \frac{h}{h_0} = \frac{W}{W_0} = \frac{1}{w^2}, \quad p = p_0 w^{-2\gamma}, \qquad p_0 = (p)_{t=0} \quad \text{и т. п.} \tag{3.2}$$

Рассмотрим случай однородного цилиндра без поверхностных токов. При этом

$$\rho_0 = \rho_{00}, \qquad g_0 = g_{00}$$

$$p_0 = p_{00}\left(1 - \frac{a^2}{R^2}\right), \qquad h_0^2 = h_{00}^2\left(1 - \frac{a^2}{R^2}\right) + h_{V0}^2\frac{a^2}{R^2} \tag{3.3}$$

Здесь ρ_{00}, h_{00} и т. п. — постоянные. Для выбранного распределения давления уравнение (1.6) сводится к обыкновенному

$$w^{\cdot\cdot} = (W_0^2 - \Omega_H^2)\, w^{-3} - (2\Omega_I^2 + \Omega_G^2)\, w^{-1} + \Omega_P^2 w^{-2\gamma+1} \tag{3.4}$$

$$\Omega_H^2 = \frac{h_{V0}^2 - h_{00}^2}{4\pi\rho_{00}R^2}, \qquad \Omega_I^2 = \frac{g_{00}^2}{4\pi\rho_{00}}, \qquad \Omega_G^2 = 2\pi G_0\rho_{00}, \qquad \Omega_P^2 = \frac{2p_{00}}{\rho_{00}R^2}$$

Интегрируя (3.4), найдем

$$w^{\cdot 2} = (W_0^2 - \Omega_H^2)(1 - w^{-2}) - 2(2\Omega_I^2 + \Omega_G^2)\ln w +$$

$$+ \frac{\Omega_p^2}{\gamma - 1}[1 - w^{-2(\gamma-1)}] + w^{\cdot}{}_0^2, \quad w^{\cdot}{}_0 = (w^{\cdot})_{t=0} \tag{3.5}$$

В области $w^{\cdot} \geqslant 0$ будет

$$t = \text{const} + \int \frac{dw}{\sqrt{f(w)}} \tag{3.6}$$

где $f(w)$ — правая часть равенства (3.5). Аналогичный интеграл может быть написан для интервала, где $w^{\cdot} \leqslant 0$.

Рассмотрим продолжение найденного решения во внешнюю область. В вакууме

$$H_\varphi = w g_V R^2 / a, \qquad H_z = h_V \tag{3.7}$$

Здесь g_V и h_V — функции одного t. На границе должно быть непрерывным выражение в квадратных скобках в правой части (1.6). Так как рассматриваются лишь режимы без поверхностных токов, то будет

$$g_V = g_{00} w^{-2}, \quad h_V = h_{V0}\, w^{-2} \tag{3.8}$$

Для того, чтобы осуществлялось данное движение, кроме определенного распределения величин в начальный момент времени, необходимо еще выполнение некоторого соотношения между силами, под действием которых происходит сжатие или расширение плазмы. Например, если в начальный момент продольный ток не равен нулю и перемещение заряженных частиц осуществляется вследствие изменения продольного магнитного поля, то полный ток вдоль шнура должен поддерживаться постоянным, в противном случае возникли бы поверхностные токи, а такой режим в настоящей работе не рассматривается.

Полученное решение позволяет исследовать различные движения плазменного цилиндра как периодического, так и непериодического типа. Некоторые решения изучались в работах [3-7].

Рассмотрим подробнее малые колебания вблизи положения равновесия. Пусть при $t = 0$ и отсутствии радиальной скорости все силы уравновешены

$$W_0^2 - \Omega_H^2 - 2\Omega_I^2 - \Omega_G^2 + \Omega_P^2 = 0 \tag{3.9}$$

Определим движение, возникающее при наличии небольшой начальной радиальной скорости $v_r(a, 0)$. Из (3.4) или (3.5) получим

$$w = 1 + \varepsilon \sin \Omega t + O(\varepsilon^2), \qquad \varepsilon = w_0^{\cdot} / \Omega \tag{3.10}$$

$$\Omega^2 = 3(W_0^2 - \Omega_H^2) - 2\Omega_I^2 - \Omega_G^2 + (2\gamma - 1)\Omega_P^2 \tag{3.11}$$

Здесь ε — малый параметр. С учетом (3.9) формулу (3.11) можно преобразовать к виду

$$\Omega^2 = 2[(\gamma - 2)(\Omega_H^2 - W_0^2) + (\gamma - 1)(2\Omega_I^2 + \Omega_G^2)] \tag{3.12}$$

При условии $\Omega^2 > 0$ движение будет колебательным. Такое пульсационное движение может возникать за счет соответствующего изменения магнитного поля. При отсутствии магнитного поля пульсации гравитирующего цилиндра могут возбуждаться в результате раскачки собственных радиальных колебаний основной частоты. Механизм раскачки здесь не рассматривается.

Уравнения, описывающие пульсации малой амплитуды, могут быть выведены из системы (1.5) — (1.7) при произвольном распределении плотности и магнитного поля. Полагая

$$r = a\,[1 + \varepsilon\,(a)\sin\Omega t + \ldots], \qquad |\varepsilon| \ll 1 \tag{3.13}$$

получим

$$x = x_0\left[1 - \frac{1}{a}\,\frac{da^2\varepsilon}{da}\sin\Omega t + \ldots\right], \qquad x = \rho,\, g,\, h \tag{3.14}$$

$$W = W_0\,(1 - 2\varepsilon\sin\Omega t + \ldots) \tag{3.15}$$

$$\frac{d}{da}\left(p_0 + \frac{h_0^2 + a^2 g_0^2}{8\pi}\right) + \frac{a g_0^2}{4\pi} - a\rho_0 W_0^2 + \frac{1}{a}\,4\pi G_0\rho_0\int_0^a a\rho_0\,(a)\,da = 0 \tag{3.16}$$

$$a\rho_0\,(4W_0^2 - \Omega^2)\varepsilon = \frac{d}{da}\left\{\left(\gamma p_0 + \frac{h_0^2 + a^2 g_0^2}{4\pi}\right)\frac{1}{a}\,\frac{da^2\varepsilon}{da}\right\} - \tag{3.17}$$

$$- \frac{a^2}{4\pi}\,\frac{dg_0^2}{da}\,\varepsilon + \frac{8\pi}{a}\,G_0\rho_0\varepsilon\int_0^a a\rho_0\,(a)\,da$$

Здесь (3.16) является условием равновесия. При $\varepsilon = \mathrm{const}$ придем к формулам (3.9) — (3.11).

В случае вынужденных колебаний частота Ω будет заданной величиной. Для собственных колебаний в постоянном внешнем магнитном поле частота Ω определяется из условия отсутствия вне плазмы переменной компоненты магнитного поля, т. е. из условия $(da^2\varepsilon\,/\,da)_{a=R} = 0$.

Для адиабатических пульсаций плазмы в одном продольном поле при $\Omega_G \ll \Omega_P$, $\Omega_I = 0$, $W_0 = 0$, $\varepsilon = \mathrm{const}$ гармоническое движение согласно (3.12) возможно лишь для значений $\gamma > 2$. Из уравнения (3.17) видно, что в случае сильного продольного поля небольшое отступление от линейной связи между скоростью v_r и радиусом a приводит к существенному изменению этого результата (при $\Omega \sim \sqrt{p_0\,/\,\rho_0 R^2}$ колебательный режим возможен, если параметр ε отличается от постоянной на величину порядка $8\pi p_0\,/\,h_0^2$).

Для высокочастотных пульсаций ($\Omega \gg \sqrt{p_0\,/\,\rho_0 R^2}$) в сильном продольном магнитном поле ($h_0^2 \gg 8\pi p_0$) из (3.17) получим известное [8,9] уравнение

$$\frac{1}{a}\,\frac{d}{da}\left(\frac{1}{a}\,\frac{da^2\varepsilon}{da}\right) + \frac{4\pi\Omega^2\rho_0}{h_0^2}\,\varepsilon = 0 \tag{3.18}$$

Заметим, что в работах [8,9] рассматривалась также устойчивость цилиндра при наличии высокочастотных радиальных пульсаций.

4. Устойчивость однородного цилиндра. Рассмотрим устойчивость относительно длинноволновых возмущений $m \neq 0$ однородной плазмы в сильном поле для случая равномерно распределенного продольного тока. Считаем, что для скорости, давления и др. справедливы выражения (3.1), (3.2), (3.3) и соблюдаются условия (2.1), (2.2) и $\Omega_G \ll \Omega_P$. Для исследования устойчивости нужно найти решение системы (2.4) — (2.6) при условии (2.9).

При отсутствии радиального движения решение (2.4) — (2.6) можно получить из общих формул работы [8]. Нетрудно показать, что то же решение, но с зависящими от t коэффициентами будет удовлетворять системе (2.4) — (2.6) для радиально движущейся плазмы. Таким путем получим

$$rH_r^* = Kla^{|m|}, \quad p_\Sigma^* = iPla^{|m|}, \quad \rho^* = 0, \quad K = K(t), \quad P = P(t) \tag{4.1}$$

$$l = \exp i \left[kz_0 + m\varphi_0 + mW_0 \int_0^t w^{-2}(t)\, dt \right]$$

$$P = \frac{\rho_{00}}{s_{00}\,|m|} \left\{ K^{\cdot\cdot} + \frac{2i}{m}(m^2 - |m|)\, WK^{\cdot} + \frac{2w^{\cdot}}{w} K^{\cdot} - \right.$$

$$\left. - (m^2 - 2\,|m|)\, W^2 K + \frac{\Omega_s (m\Omega_s - 2\,|m|\,\Omega_1)}{mw^2} K \right\}$$

$$\Omega_s = \frac{s_{00}}{\sqrt{4\pi\rho_{00}}}, \qquad \Omega_I = \frac{g_{00}}{\sqrt{4\pi\rho_{00}}}, \qquad s_{00} = mg_{00} + kh_{00}$$

Положим

$$K = \frac{1}{w} e^q Y, \qquad q = -\frac{i}{m}(m^2 - |m|)\, W_0 \int_0^t \frac{dt}{w^2} \tag{4.2}$$

Формула для P примет вид

$$P = \frac{\rho_{00} e^q}{|m|\, s_{00} w} \left[Y^{\cdot\cdot} - \frac{w^{\cdot\cdot}}{w} Y + \frac{W_0^2}{w^4} Y + \frac{\Omega_s (m\Omega_s - 2\,|m|\,\Omega_1)}{mw^2} Y \right]$$

Из граничного условия (2.9) получим

$$Y^{\cdot\cdot} + \left\{ (|m| - 1)\left(\frac{w^{\cdot\cdot}}{w} - \frac{W_0^2}{w^4} \right) + \frac{2\Omega_s (m\Omega_s - |m|\,\Omega_1)}{mw^2} \right\} Y = 0 \tag{4.3}$$

Для адиабатических движений $w^{\cdot\cdot}$ можно исключить при помощи уравнения (3.4), что дает

$$Y^{\cdot\cdot} + \left\{ (|m| - 1)\left(\frac{\Omega_P^2}{w^{2\gamma}} - \frac{\Omega_H^2}{w^4} - \frac{2\Omega_I^2}{w^2} \right) + \frac{2\Omega_s (m\Omega_s - |m|\,\Omega_1)}{mw^2} \right\} Y = 0 \tag{4.4}$$

Полученное уравнение позволяет вычислить амплитуду возмущения в любой момент времени, если известны Y и $Y^{\cdot}$ при $t = 0$. При отсутствии радиального движения $w = 1$, $Y = \exp i\omega t$, где ω определяется из (4.3) или (4.4). В области неустойчивости $\omega^2 < 0$. Для невращающегося шнура границы этой области совпадают с теми, которые получены в работах [1, 2]. Можно показать, что при $w = 1$, $\Omega_I = 0$, $k = 0$, $\Omega_s = 0$, $W \neq 0$ из (4.4) вытекает известная формула для инкремента желобковой неустойчивости вращающейся плазмы [10, 11].

В случае сжимающегося или расширяющегося цилиндра при отрицательном значении коэффициента перед Y в уравнении (4.3) или (4.4) также имеет место нарастание амплитуды возмущения. Для мод $|m| > 1$ область нестабильности может не совпадать с той, которая имела место при отсутствии радиального движения. В частности, при $\Omega_I = 0$, $W = 0$ в случае адиабатического сжатия плазмы может развиваться неустойчивость, если

$$\frac{\Omega_H^2}{w^4} > \left\{ \frac{\Omega_P^2}{w^{2\gamma}} + \frac{2\Omega_s^2}{w^2 (|m| - 1)} \right\} \tag{4.5}$$

Эта неустойчивость подобна той, которая имеет место в тяжелой жидкости, удерживаемой легкой средой против сил тяготения [12]. Роль силы тяжести играет инерционная сила. В случае тонкого трубчатого плазменного слоя неустойчивость, возникающая при радиальном сжатии, изучалась Харрисом [13].

Для возмущений с достаточно большими m неравенство (4.5) и формулу для времени развития неустойчивости τ можно записать в виде

$$h_{V0}^2 - h_{00}^2 > 8\pi p_{00} w^{2(2-\gamma)} \tag{4.6}$$

$$\tau = \frac{t_c}{\sqrt{|m|}} \left\{ \int_0^{t_c} \left(\frac{\Omega_H^2}{w^4} - \frac{\Omega_P^2}{w^{2\gamma}} \right)^{1/2} dt \right\}^{-1} \tag{4.7}$$

где t_c — характерное время процесса.

Для возмущений $m = \pm 1$ границы области нестабильности определяются неравенством kh_{00} $(kh_{00} \pm g_{00}) < 0$, что является известным результатом [1, 2]. Следует лишь отметить, что величина инкремента возрастает с уменьшением $w\,(t)$.

Кроме рассмотренных неустойчивостей возможны новые типы нестабильностей, которые исчезают при переходе к цилиндру постоянного радиуса. Например, в случае пульсирующего цилиндра уравнения (4.3), (4.4) являются уравнениями типа Хилла, так что могут возникать условия для неустойчивости резонансного характера.

Рассмотрим устойчивость при малых пульсациях, когда по формуле (3.10) $w\,(t) = 1 + \varepsilon \sin \Omega t + \ldots$, $\varepsilon = \mathrm{const}$. Пренебрегая величинами порядка ε^2, из уравнения (4.3) найдем

$$Y^{\cdot\cdot} + \omega^2 (1 - \varepsilon b \sin \Omega t)\, Y = 0 \tag{4.8}$$

$$\omega^2 = \frac{2}{m} \Omega_s (m\Omega_s - |m|\, \Omega_1) - (|m| - 1)\, W_0^2$$

$$\omega^2 b = \frac{4}{m} \Omega_s (m\Omega_s - |m|\, \Omega_1) + (|m| - 1)\, (\Omega^2 - 4W_0^2)$$

Здесь Ω — угловая частота пульсаций, для адиабатических движений она определяется равенством (3.11).

При $\varepsilon = 0$ $Y\,(t) = \exp i\omega t$, если же $\varepsilon \neq 0$, то возможна неустойчивость в области, соответствующей $\omega^2 > 0$. При малых ε из результатов общей теории уравнений с периодическими коэффициентами [14] следует, что экспоненциальное нарастание функции $Y\,(t)$ возможно в полосах частот ω, расположенных вблизи резонансных частот ω_n, где

$$2\omega_n = n\Omega \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{4.9}$$

Для изучения резонанса n-го порядка необходимо получить решение [14] с учетом членов ε^n. При помощи уравнения (4.8) можно исследовать лишь резонанс $n = 1$.

Предполагая, что $2\omega = \Omega + 0\,(\varepsilon)$, ищем решение (4.8) в форме [14]

$$Y\,(t) = y\,(t) \cos\,[{}^1/_2 \Omega t + \vartheta\,(t)] \quad (|y^{\cdot}| \ll \Omega\, |y|,\ |\vartheta^{\cdot}| \ll \Omega\, |\vartheta|) \tag{4.10}$$

Уравнения для y и ϑ получаются из условия, чтобы в разложении для $Y(t)$ не было членов с разностью $2\omega - \Omega$ в знаменателе. Это дает

$$y^{\cdot} = -\frac{\varepsilon b\omega^2 y}{2\Omega}\cos 2\vartheta, \qquad \vartheta^{\cdot} = \omega - \frac{\Omega}{2} + \frac{\varepsilon b\omega^2}{2\Omega}\sin 2\vartheta \tag{4.11}$$

Положим

$$\xi = y\cos(\vartheta + {}^1/_4\pi) \quad \eta = y\sin(\vartheta + {}^1/_4\pi)$$

Тогда

$$\xi^{\cdot} = -\left(\omega - \frac{\Omega}{2} + \frac{\varepsilon b\omega^2}{2\Omega}\right)\eta, \qquad \eta^{\cdot} = \left(\omega - \frac{\Omega}{2} - \frac{\varepsilon b\omega^2}{2\Omega}\right)\xi$$

Отсюда

$$\xi = C_1 e^{\varepsilon\Lambda t} + C_2 e^{-\varepsilon\Lambda t}, \qquad \Lambda = \left\{\frac{b^2\omega^4}{4\Omega^2} - \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\omega - \frac{\Omega}{2}\right)^2\right\}^{1/2} \tag{4.12}$$

Формулу для Λ можно также записать в следующем виде:

$$\Lambda = \left\{\frac{b^2\Omega^2}{64} - \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\omega - \frac{\Omega}{2}\right)^2\right\}^{1/2} \tag{4.13}$$

Для значений ω, лежащих в полосе

$$1 - {}^1/_4\,|\varepsilon b| < 2\omega / \Omega < 1 + {}^1/_4\,|\varepsilon b| \tag{4.14}$$

имеет место колебательная неустойчивость, амплитуда возмущения растет пропорционально exp $\varepsilon\Lambda t$. Неустойчивость обусловлена резонансной раскачкой такого собственного колебания, частота которого при отсутствии радиальных пульсаций равна ω. Обобщение этих результатов на случай пульсаций неоднородной плазмы дано в следующем разделе.

5. Устойчивость пульсирующего неоднородного цилиндра. Рассмотрим устойчивость неоднородной плазмы в сильном магнитном поле, на которое наложено малое по амплитуде переменное поле, частота которого $\Omega \sim \sqrt{p_0 / \rho_0 R^2}$.

Как было показано в разделе 3, радиус $r = a(1 + \varepsilon\sin\Omega t + \ldots)$, где ε с точностью до поправок порядка $8\pi p_0 / h_0^2$ является постоянной.

Будем еще предполагать, что вращение и поверхностные токи отсутствуют, а плотность на границе цилиндра $\rho_0(R) = 0$. Если ограничиться изучением лишь длинноволновых возмущений (условия (2.1), (2.2)), то будет справедливой система (2.4) — (2.6) (считаем, что $\Omega_G^2 \ll \Omega_P^2$). После разложения по ε основное уравнение (2.6) и условие (2.9) примут вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial a}a\left\{\rho_0\frac{\partial^2}{\partial a\partial t}\left[(1 + 2\varepsilon\sin\Omega t)\frac{\partial X}{\partial t}\right] + \frac{s_0^2}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial a}\right\} - \\ - \frac{m^2}{a}\left\{\rho_0\frac{\partial}{\partial t}\left[(1 + 2\varepsilon\sin\Omega t)\frac{\partial X}{\partial t}\right] + \frac{s_0^2}{4\pi}X\right\} - \\ - \frac{1}{2\pi}mg_0's_0X - m^2\rho_0'\varepsilon\Omega^2(\sin\Omega t)X = 0\end{gathered} \tag{5.1}$$

$$\left\{s_0^2 a\frac{\partial X}{\partial a} - s_0(2mg_0 - |m|s_0)X\right\}_{a=R} = 0 \tag{5.2}$$

$$X = \frac{1}{s_0}rH_r^* e^{-i(m\varphi_0 + kz_0)}, \qquad \rho_0' = \frac{d\rho_0}{da}, \qquad \varepsilon \approx \mathrm{const}$$

В нулевом приближении (при $\varepsilon = 0$) решение можно записать в форме

$$X = \sum_{(p)} A_p X_p(a) \cos(\omega_p t + \psi_p), \quad A_p = \text{const}, \quad \psi_p = \text{const} \tag{5.3}$$

Здесь $X_p(a)$ удовлетворяют (5.2) и уравнению [1]

$$\frac{d}{da}\left\{a\left[(s_0^2 - 4\pi\rho_0\omega_p^2)\frac{dX_p}{da}\right]\right\} - \left[\frac{m^2}{a}(s_0^2 - 4\pi\rho_0\omega_p^2) + 2mg_0's_0\right]X_p = 0 \tag{5.4}$$

Умножая (5.4) на $X_q(a)da$ и интегрируя от 0 до R, придем к условию ортогональности

$$(\omega_q^2 - \omega_p^2)\int_0^R \rho_0\left[aX_p'X_q' + \frac{m^2}{a}X_pX_q\right]da = 0 \tag{5.5}$$

Для нахождения решения с учетом поправок порядка ε используем метод теории возмущений. В уравнении (5.3) величины A_p и ψ_p будем считать функциями t, причем $\dot{A}_p \sim \varepsilon\omega_p A_p$, $\dot{\psi}_p \sim \varepsilon\omega_p\psi_p$. После подстановки ряда (5.3) в уравнение (5.1) получим

$$\sum_{(p)} 2\omega_p \{(\dot{\psi}_p + \varepsilon\omega_p \sin\Omega t) A_p \cos(\omega_p t + \psi_p) +$$
$$+ (\dot{A}_p + \varepsilon\Omega A_p \cos\Omega t)\sin(\omega_p t + \psi_p)\}\left[\frac{d}{da}(a\rho_0 X_p') - \frac{m^2\rho_0}{a}X_p\right] +$$
$$+ \varepsilon m^2\Omega^2\rho_0'(\sin\Omega t)\sum_{(p)} A_pX_p\cos(\omega_p t + \psi_p) = 0$$

Умножая это равенство на $X_q(a)da$ и интегрируя от 0 до R, придем к уравнению

$$2\omega_q N_q\{2\dot{A}_q\sin(\omega_q t + \psi_q) + 2A_q\dot{\psi}_q\cos(\omega_q t + \psi_q) +$$
$$+ \varepsilon(\omega_q + \Omega)A_q\sin[(\omega_q + \Omega)t + \psi_q] - \varepsilon(\omega_q - \Omega)A_q\sin[(\omega_q - \Omega)t + \psi_q]\} +$$
$$+ \varepsilon m^2\Omega^2\sum_{(p)} M_{pq}A_p\{\sin[(\omega_p + \Omega)t + \psi_p] - \sin[(\omega_p - \Omega)t + \psi_p]\} = 0 \tag{5.6}$$

$$N_q = \int_0^R \rho_0\left(aX_q'^2 + \frac{m^2}{a}X_q^2\right)da, \quad M_{pq} = -\int_0^R \rho_0'X_pX_q da$$

При помощи системы (5.6) может быть исследован вопрос о резонансной раскачке нерадиальных колебаний (соответствующих резонансу $n = 1$ раздела 4). Будем изучать лишь те колебания, для которых $\omega_p^2 > 0$. Можно положить $\omega_p > 0$.

Резонанс возможен, когда среди поправочных членов в уравнении (5.6) имеются такие, частота которых близка к ω_q. Пусть, например, $2\omega_q - \Omega = 0(\varepsilon)$, причем для членов с $p \neq q$ выражение $\omega_q \pm \omega_p \pm \Omega$ не близко к

---

[1] Например, для распределения $\rho_0 = \rho_{00}(1 - a^2/R^2)$, $g_0 = g_{00} = \text{const}$, решение (5.4) выражается через гипергеометрическую функцию

$$X_p(a) = a^{|m|}F\left(\frac{1 + |m| + \sqrt{m^2+1}}{2}, \frac{1 + |m| - \sqrt{m^2+1}}{2}, 1 + |m|, \frac{4\pi\rho_{00}\omega_p^2 a^2}{R^2(4\pi\rho_{00}\omega_p^2 - s_{00}^2)}\right)$$

Подставляя это решение в условие (5.2), получим уравнение для ω_p^2. Значения ω_p^2 таковы, что аргумент функции $(F)_{a=R}$ находится в интервале от нуля до единицы. Имеются как положительные, так и отрицательные значения ω_p^2.

нулю. Приравнивая нулю коэффициенты при $\sin(\omega_q t + \psi_q)$ и $\cos(\omega_q t + \psi_q)$, придем к уравнениям (4.11), в которых y, ϑ, ω и b заменены соответственно на A_q, $\vartheta_q = \psi_q + (\omega - {}^1/_2\Omega)t$, ω_q и b_q. Вместо (4.13) будем иметь

$$\Lambda = \left\{\frac{b_q^2\Omega^2}{64} - \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\omega - \frac{\Omega}{2}\right)^2\right\}^{1/2}, \qquad b_q = \frac{4m^2M_{qq}}{N_q} - 2 \tag{5.7}$$

В частном случае однородного цилиндра с резкой границей система собственных функций $X_p(a)$ является неполной, и метод теории возмущений, строго говоря, неприменим. Тем не менее формула (5.7) с учетом соотношения $|m| M_{qq} = N_q$ приводит к результату,[1] совпадающему с тем, который вытекает из формулы (4.13).

Исследуем резонанс связи двух колебаний, когда $\omega_p + \omega_q - \Omega = O(\varepsilon)$, $p \neq q$. Из уравнения (5.6) получим

$$4\omega_q N_q \dot{A}_q = -\varepsilon m^2\Omega^2 M_{pq} A_p \cos[\psi_p + \psi_q + (\omega_p + \omega_q - \Omega)t]$$
$$4\omega_q N_q A_q \dot{\psi}_q = \varepsilon m^2\Omega^2 M_{pq} A_p \sin[\psi_p + \psi_q + (\omega_p + \omega_q - \Omega)t]$$

и аналогичные два равенства с переставленными индексами p и q. Учитывая, что функции $X_p(a)$ определены с точностью до постоянного множителя, положим $\sqrt{\omega_p N_p / \omega_q N_q} = A_q(0) / A_p(0)$. Тогда описанная система приводится к виду (4.11), причем $2\vartheta = \psi_p + \psi_q + (\omega_p + \omega_q - \Omega)t$. Для решения, имеющего область нестабильности, амплитуды A_p и A_q пропорциональны $\exp \varepsilon\Lambda t$, где

$$\Lambda = \left\{\frac{b_{pq}^2\Omega^2}{64} - \frac{1}{4\varepsilon^2}(\omega_p + \omega_q - \Omega)^2\right\}^{1/2}, \qquad b_{pq} = \frac{2m^2\Omega M_{pq}}{\sqrt{\omega_p\omega_q N_p N_q}} \tag{5.8}$$

В области неустойчивости

$$-{}^1/_4\Omega\,|\varepsilon b_{pq}| < \omega_p + \omega_q - \Omega < {}^1/_4\,\Omega\,|\varepsilon b_{pq}| \tag{5.9}$$

Интересно отметить, что решение системы (5.6) при условиях: $\omega_p - \omega_q - \Omega = O(\varepsilon)$, а ω_p не близко к 2Ω, будет всегда устойчивым. Выражение для Λ получается изменением знака перед ω_q в формуле (5.8), что дает $\Lambda^2 < 0$.

Таким образом, резонанс первого порядка возможен при условии, что сумма двух частот нерадиальных колебаний (соответствующих одним и тем же m и k) или удвоенная частота одного колебания достаточно близки к частоте радиальных пульсаций. При этом $m \neq 0$ и, кроме того, если продольный ток отсутствует, то $k \neq 0$. Последнее условие вытекает из того, что при $k = 0$, $g_0 \equiv 0$ все частоты ω_p равны нулю. Отсюда видно, что расположение полос неустойчивости существенно зависит от распределения плотности плазмы и продольного тока (поскольку ω_p определяется уравнением (5.4)).

Изложенный метод расчета допускает очевидное обобщение на предмет изучения перехода более сложных нерадиальных движений (например, волновых) в различные типы собственных колебаний. В этом случае решение возмущенного уравнения нужно искать в виде разложения по собственным функциям, зависящим от всех координат.

Для безграничной плазмы вопросы перехода одних волн в другие рассматривались в работах [15,16]. В частности, в работе [16] получено условие неустойчивости такого же типа, как исследованный в этом разделе резонанс связи двух колебаний.

6. Об устойчивости гравитирующего цилиндра. При учете гравитации среды задача устойчивости сильно усложняется. Ограничимся исследованием возмущений $k = 0$ при условии, что цилиндр является однородным, а продольный ток отсутствует. Будем считать, что в исходном состоянии сжимающейся или расширяющейся среды распределения величин описываются формулами (3.1) — (3.4) при $g_{00} = 0$, $\Omega_I = 0$. В астрофизических задачах магнитное поле вне цилиндра обычно мало, тогда $\Omega_H{}^2$ отрицательно, а магнитное давление сравнимо с плазменным. В случае плазмы, удерживаемой магнитным полем, параметр $\Omega_H{}^2$ больше нуля и $\Omega_G{}^2 \ll \Omega_P{}^2$.

В области однородной плотности система уравнений задачи устойчивости (1.8)—(1.17) имеет следующее точное частное решение:

$$\frac{p^*}{Q} = \frac{p_\Sigma{}^*}{P} = \frac{rv_r{}^*}{V} = -\frac{imrv_\varphi{}^*}{|m|V} = \frac{\Phi^*}{\Psi} = \frac{h_0H_z{}^*}{4\pi F} = ila^{|m|} \tag{6.1}$$

$$l = \exp\left[im\left(\varphi_0 + W_0\int\limits_0^t \frac{dt}{w^2(t)}\right)\right], \quad Q = Q(t), \quad P = P(t) \quad \text{и т. д.}$$

$$P = -\frac{\rho_{00}}{|m|w^2}\left[V^\cdot + \frac{i(m^2 - 2|m|)}{mw^2}W_0V\right] = Q + \frac{1}{4\pi w^2}(F + 4\pi\rho_{00}\Psi) \tag{6.2}$$

$$\begin{gathered} w^2F^\cdot + 2ww^\cdot F + imW_0F + \rho_{00}\Omega_H{}^2w^{-2}V = 0 \\ w^2Q^\cdot + 2\gamma ww^\cdot Q + imW_0Q - \rho_{00}\Omega_P{}^2w^{-2\gamma}V = 0 \end{gathered} \tag{6.3}$$

Используя это решение, можно провести исследование некоторых типов возмущений из класса тех, для которых волновое число $k = 0$. Как будет видно из дальнейшего, рассматриваемые возмущения являются устойчивыми, если радиальное движение среды отсутствует. Из уравнений (6.3) следует, что $\Omega_P{}^2F = -\Omega_H{}^2\omega^{2(\gamma-1)}Q$, а условие (1.20) приводит к равенству

$$2\Omega_P{}^2\int\limits_{R-\delta}^{R}\rho^*\,da = l\,[w^{2\gamma-2}R^{|m|-1}Q + C], \qquad C = \mathrm{const}$$

Учитывая далее, что возмущение гравитационного потенциала вне цилиндра пропорционально $a^{-|m|}$, а на возмущенной поверхности этот потенциал должен быть непрерывным, при помощи граничного условия (1.19) найдем

$$2|m|\rho_{00}\Omega_P{}^2\Psi = -\Omega_G{}^2w^{2\gamma}Q$$

Подстановка полученных выражений в условие (1.18) дает $C = 0$.

Выражая теперь все неизвестные через $Q(t)$ и подставляя в уравнение (6.2), придем к уравнению второго порядка для $Q(t)$. Если положить $Q = w^{-2\gamma-1}e^qZ$, где q определяется формулой (4.2), то будет

$$Z^{\cdot\cdot} + (|m| - 1)(\Omega_P{}^2w^{-2\gamma} - \Omega_H{}^2w^{-4})Z = 0 \tag{6.4}$$

Это уравнение является частным случаем (4.4), хотя последнее было выведено при условии $h_0{}^2 \gg 8\pi p_0$. Для пульсирующего с малой амплитудой плазменного цилиндра из уравнения (6.4) получим

$$\begin{gathered} Z^{\cdot\cdot} + \omega^2(1 - \varepsilon b\sin\Omega t)Z = 0, \quad \omega^2 = (|m| - 1)(\Omega_G{}^2 - W_0{}^2), \quad \varepsilon\Omega = w_0{}^\cdot \\ \omega^2b = 2(|m| - 1)[(\gamma - 2)\Omega_H{}^2 + \gamma(\Omega_G{}^2 - W_0{}^2)] \\ \Omega^2 = 2(\gamma - 2)(\Omega_H{}^2 - W_0{}^2) + 2(\gamma - 1)\Omega_G{}^2 \end{gathered} \tag{6.5}$$

Здесь учтено условие равновесия (3.9). Анализ уравнения типа (6.5) был проведен в разделе 4.

Результаты по устойчивости гравитирующего цилиндра могут быть использованы для качественного рассмотрения устойчивости сферически-симметричных гравитирующих конфигураций, играющих важную роль в астрофизике. Аналогия имеет место между возмущениями $k = 0$ для цилиндра и произвольными возмущениями для сферы. В частности, уравнение (6.4) при $\Omega_H = 0$ имеет такой же характер, как уравнение (15) работы [17], в которой изучалась устойчивость пульсирующей однородной сферы относительно возмущений с монотонной зависимостью от радиуса.

Используя указанную аналогию, можно заключить, что в пульсирующей гравитирующей сфере неоднородной плотности возможна резонансная раскачка нерадиальных колебаний. Резонанс типа (4.9) был исследован в работе [17]. Рассмотрим теперь резонанс связи, когда

$$\omega_q + \omega_p \approx \Omega$$

где ω_q и ω_p — частоты нерадиальных колебаний с одинаковой зависимостью от угловых переменных, Ω — частота радиальных пульсаций сферы. Резонанс связи может иметь место в том случае, когда какая-нибудь частота ω_q достаточно близка к частоте Ω, а разность $\Omega - \omega_q$ больше нуля. Это объясняется тем, что в спектре частот ω_p всегда имеются бесконечно малые частоты ω_p (речь идет о различных нерадиальных колебаниях с заданной зависимостью от угловых переменных) [18]. В этом примере резонанса связи возбуждаются колебания с частотой, близкой к частоте пульсаций, что может привести к биениям. Биения в кривых блеска переменных звезд часто имеют место [18]. Изложенный механизм неустойчивости является возможной причиной такого эффекта.

Поступила 15 VI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Шафранов В. Д. Об устойчивости плазменного шнура с распределенным током. Кн. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», т. 4, Изд-во АН СССР, 1958.
2. Kruskal M. D., Johnson J. L., Gottlieb M. B., Goldman L. M. Hydromagnetic instability in a stellarator. Phys. Fluids, 1958, vol. 1, No. 5, p. 421.
3. Куликовский А. Г. К вопросу о пульсации плазменного шнура. Докл. АН СССР, 1957, т. 114, вып. 5, стр. 984.
4. Яворская И. М. Колебания бесконечного газового цилиндра с собственной гравитацией в магнитном поле. Докл. АН СССР, 1957, т. 114, вып. 5, стр. 988.
5. McVittie G. C. Some exact solutions of the equations of magnetohydrodynamics when both self-attraction and magnetic fields are present. Revs. Mod. Phys., 1958, vol. 30, No. 3, p. 1082.
6. Рязанов Е. В. О решении уравнений магнитной гидродинамики, описывающих одномерные осесимметричные движения гравитирующего газа. ПММ, 1959, т. 23, вып. 1, стр. 187.
7. Ладиков Ю. П. Некоторые точные решения уравнений неустановившихся движений в магнитной гидродинамике. Докл. АН СССР, 1961, т. 137, вып. 2, стр. 303.
8. Вандакуров Ю. В. Об устойчивости пульсирующего плазменного шнура. Ж. техн. физ., 1964, т. 34, вып. 5, стр. 788.
9. Вандакуров Ю. В. Об устойчивости вращающегося плазменного шнура при наличии высокочастотных радиальных пульсаций. Ж. техн. физ., 1965, т. 35, вып. 8, стр. 1364.
10. Rosenbluth M. N., Krall N. A., Rostoker N. Finite larmor radius stabilization of «weakly» unstable confined plasmas. Nuclear fusion, 1962, Suppl., part 1, p. 143.
11. Вандакуров Ю. В. О желобковых неустойчивостях для вращающегося плазменного шнура. Ж. техн. физ., 1963, т. 33, вып. 9, стр. 1134.
12. Taylor G. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. I. Proc. Roy. Soc. A, 1950, vol. 201, p. 192.
13. Harris E. G. Rayleigh-Taylor instabilities of a collapsing cylindrical shell in a magnetic field. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 9, p. 1057.
14. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, изд. 2-е. М., Физматгиз, 1958.
15. Ораевский В. Н., Сагдеев Р. З. Об устойчивости установившихся продольных колебаний плазмы. Ж. техн. физ., 1962, т. 32, вып. 11, стр. 1291.
16. Галеев А. А., Карпман В. И. Турбулентная теория слабонеравновесной разреженной плазмы и структура ударных волн. Ж. теор. и эксперим. физ., 1963, т. 44, № 2, стр. 592.
17. Вандакуров Ю. В. Об одном механизме неустойчивости для пульсирующих звезд. Докл. АН СССР 1965, т. 164, вып. 3, стр. 525
18. Ledoux P., Walraven Th. Variable stars. Handb. Phys., 1958, B. 51. Astrophysik II: Sternaufbau, p. 353.