Прикладная математика и механика. Том 30, 1966

К РЕШЕНИЮ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ СВЕРХЗВУКОВОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

А. Н. Крайко

(Москва)

При решении вариационных задач сверхзвуковой газовой динамики методом, предложенным Гудерлеем и Армитейджем [1], существенно наличие линейной зависимости коэффициентов перед вариациями параметров течения на замыкающей характеристике. Это позволило решить ряд вариационных задач [1–4] без учета вытекающих из уравнений характеристик связей между указанными вариациями. В то же время возможны задачи, решение которых таким путем получить нельзя. Поэтому в общем случае во вспомогательный функционал нужно включать и соотношения на замыкающей характеристике. Это иллюстрируется рассмотренными ниже примерами построения кормовой части тела минимального сопротивления при наличии ограничения на длину, когда контур может содержать торец. Исследованы два случая. В первом — давление на торец не зависит от формы искомого контура. Здесь множители Лагранжа, вводящие соотношения на характеристике, оказываются равными нулю, и решение совпадает с полученными ранее [3]. Во втором случае давление на торец определяется условием типа условия Корста [5], и , следовательно, зависит от формы искомого контура. Здесь введение связей на замыкающей характеристике необходимо. Этот пример интересен и тем, что при его решении рассмотрены вопросы, связанные с варьированием положения точки стыковки торца и участка двустороннего экстремума. Последние важны при решении других задач, например при построении головных частей тел минимального сопротивления.

1. Пусть x, y — прямоугольные координаты (в осесимметричном случае ось x направлена по оси симметрии слева направо); ρ — плотность; p — давление; u, v — проекции скорости на оси x, y; c — скорость звука и $\nu = 0$ и 1 соответственно в плоском и осесимметричном случаях. За независимые переменные возьмем y и функцию тока ψ, определяемую уравнением

$$d\psi = y^\nu \rho\,(-\,v dx + u dy)$$

Равновесное течение идеального газа описывается уравнениями

$$L_1 \equiv \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial y^\nu p}{\partial \psi} = 0, \qquad L_2 \equiv \frac{\partial\,(y^\nu \rho v)^{-1}}{\partial y} + \frac{\partial\,(u\,/\,v)}{\partial \psi} = 0$$
$$L_3 \equiv \frac{\partial x}{\partial y} - \frac{u}{v} = 0 \tag{1.1}$$

Здесь p, ρ, а также c — известные функции w и ψ, причем

$$(\partial p\,/\,\partial w)_\psi = -\,\rho w, \qquad (\partial \rho\,/\,\partial w)_\psi = -\,c^{-2}\rho w, \qquad w = \sqrt{u^2 + v^2}$$

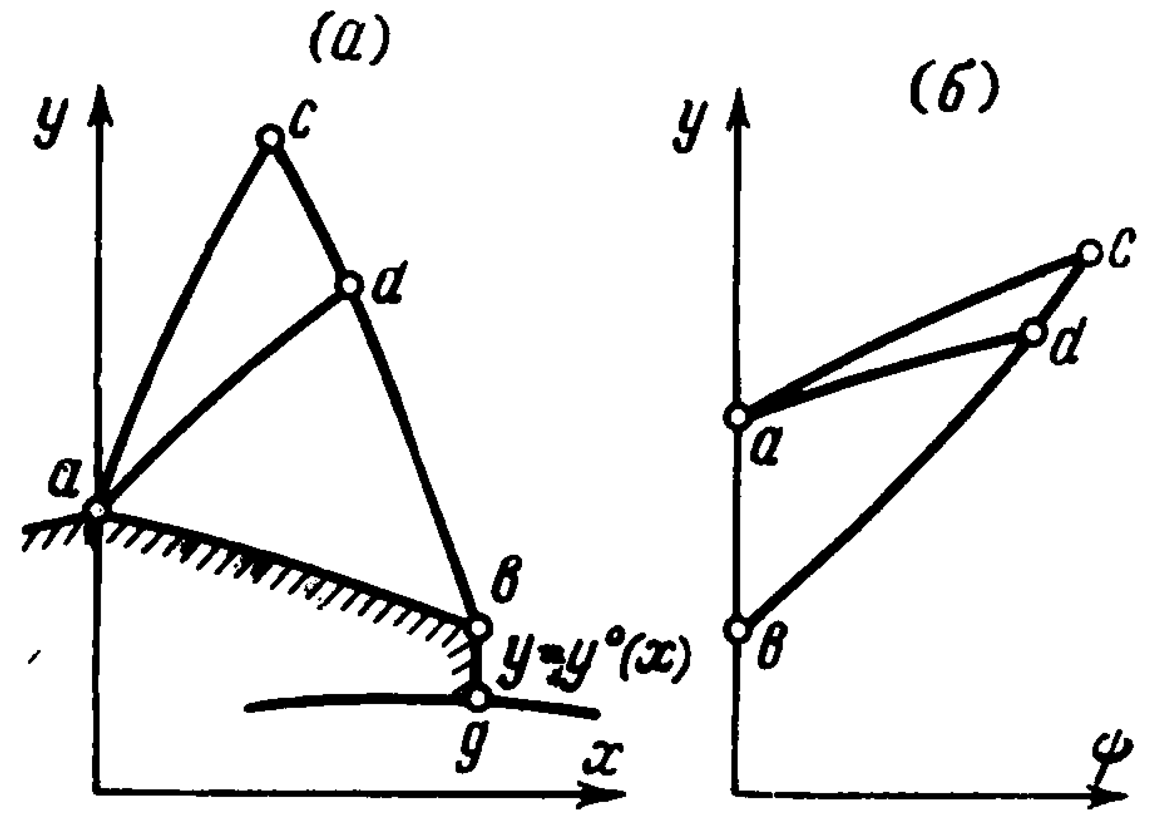
При сверхзвуковом течении ($w > c$) система (1.1) имеет два семейства действительных характеристик. Уравнения характеристик второго семейства, необходимые в дальнейшем, имеют вид

$$L_4 \equiv \frac{d(v/u)}{d\psi} - P\frac{dp}{d\psi} + y^{-(\nu+1)}Q = 0, \qquad L_5 \equiv \frac{dy}{d\psi} + y^{-\nu}Y = 0$$
$$L_6 \equiv \frac{dx}{d\psi} + y^{-\nu}X = 0 \tag{1.2}$$

Здесь $d / d\psi$ — полная производная по ψ, взятая вдоль характеристики;

$$P = P(\psi, u, v) = \frac{\sqrt{w^2 - c^2}}{\rho c u^2}$$
$$Q = Q(\psi, u, v) = \frac{\nu v}{\rho u^2}$$
$$Y = Y(\psi, u, v) = \frac{v\sqrt{w^2 - c^2} - cu}{\rho c w^2}$$
$$X = X(\psi, u, v) = \frac{u\sqrt{w^2 - c^2} + cv}{\rho c w^2}$$

Все переменные удобно считать безразмерными.



Фиг. 1

2. Рассмотрим задачу о построении контура ag кормовой части тела, который обеспечивает минимум волнового сопротивления χ при известном течении левее ac, заданной максимально допустимой длине, которую примем за характерный размер, и удовлетворяющего некоторому изопериметрическому условию (фиг. 1 *а*, ac и ad — характеристики первого семейства, bc — характеристика второго семейства). Изопериметрическое условие определяется заданием одной из характеристик искомого тела, например, его объема, площади боковой поверхности и т. п. Кроме того, потребуем, чтобы концевая точка контура лежала на линии $y = y^\circ(x)$, которой, в частности, может быть ось симметрии.

Направления заданного контура левее a и контура, определенного решением вариационной задачи, различны. Ограничимся случаем, когда они таковы, что в a имеет место обтекание выпуклого угла. Тогда при малых изменениях контура ag будут изменяться лишь положение характеристики ad, ограничивающей веер волн разрежения, и параметры течения правее ad.

Контур ag может состоять из участка двустороннего экстремума ab и участка краевого экстремума — торца bg. Если индексы $a, b, \ldots$ приписывать параметрам в соответствующих точках и выбрать систему координат так, что $x_a = 0$, то уравнение торца будет $x = 1$ при $y_g \leqslant y \leqslant y_b$. Давление на bg, которое будем считать не зависящим от y, обозначим через p°.

С точностью до несущественного множителя

$$\chi = \int_a^b y^\nu p\,dy + \int_b^g y^\nu p^\circ\,dy \tag{2.1}$$

Изопериметрическое условие имеет вид

$$K = \int_a^b f(y, x, x')\,dy + \int_b^g f^\circ(y, x, x')\,dy \tag{2.2}$$

где K — заданная константа; f и f° — известные функции; штрихом обозначены производные $(\partial / \partial y)_{\psi=\psi_a=0}$.

Итак, требуется построить контур $x = x(y)$, где $0 \leqslant x \leqslant 1$, $x_a = 0$, $y_g = y^\circ(x_g)$, реализующий минимум функционала (2.1) при заданном течении на характеристике ac и изопериметрическом условии (2.2). Распределение p на контуре находится из решения системы (1.1). Для завершения формулировки задачи необходимо задать способ определения p°.

3. Пусть p° — константа, не зависящая от формы искомого контура. Тогда χ полностью определяется выбором участка ab, область влияния которого справа ограничена характеристикой cb. Составим функционал

$$I = \int_a^b (y^\nu p + \lambda f + \alpha^\circ L_3)\,dy + \int_b^g (y^\nu p^\circ + \lambda f^\circ)\,dy +$$

$$+ \int_b^d (\gamma_1{}^\circ L_4 + \gamma_2{}^\circ L_5 + \gamma_3{}^\circ L_6)\,d\psi + \iint_G (\mu_1{}^\circ L_1 + \mu_2{}^\circ L_2 + \mu_3{}^\circ L_3)\,d\psi\,dy$$

Здесь G — область плоскости ψy, ограниченная характеристиками ad и db и осью ординат (фиг. 1б); $\lambda = \mathrm{const}$, $\alpha^\circ(y)$, $\gamma_i{}^\circ(\psi)$ и $\mu_i{}^\circ(\psi, y)$ — множители Лагранжа. Для фиксированного K, в силу (1.1), (1.2) и (2.2), вариации I и χ при любом допустимом варьировании совпадают. Поэтому

$$\delta\chi = \delta I = \left\{\gamma_1{}^\circ\left[\frac{\partial(v/u)}{\partial y} - P\frac{\partial p}{\partial y}\right] + \gamma_2{}^\circ + \frac{u}{v}\gamma_3{}^\circ\right\}_d \Delta y_d +$$

$$+ \left\{\left[y^\nu(p - p^\circ) + \lambda(f - f_{x'}x') - \frac{u}{v}\alpha^\circ - \gamma_2{}^\circ\right]_- -\right.$$

$$\left. - \gamma_1{}^\circ\left[\frac{\partial(v/u)}{\partial y} - P\frac{\partial p}{\partial y}\right]_- - \lambda f_+{}^\circ\right\}_b \Delta y_b + [(\lambda f_{x'} + \alpha^\circ - \gamma_3{}^\circ)_- - \lambda f_{x'_+}{}^\circ]_b\,\Delta x_b -$$

$$- \{\gamma_1{}^\circ[\delta(v/u) - P\delta p]\}_{b-} + [(y^\nu p^\circ + \lambda f^\circ)\varphi + \lambda f_{x'}{}^\circ]_g \Delta x_g +$$

$$+ \lambda\int_b^g (f_x{}^\circ - f_{x'}{}^{\circ\prime})\,\delta x\,dy + \int_a^b (U^{(0)}\delta x + U^{(1)}\delta u + U^{(2)}\delta v)\,dy +$$

$$+ \int_b^d (V^{(0)}\delta x + V^{(1)}\delta u + V^{(2)}\delta v + V^{(3)}\Delta y)\,d\psi +$$

$$+ \iint_G (W^{(0)}\delta x + W^{(1)}\delta u + W^{(2)}\delta v)\,d\psi\,dy \qquad (3.1)$$

Здесь $U^{(i)}$, $V^{(i)}$ и $W^{(i)}$ — известные функции множителей Лагранжа и других переменных; $\delta\xi$ — вариация ξ при фиксированных ψ и y; $\Delta\xi = \delta\xi + (\partial\xi/\partial y)\Delta y$ — вариация ξ на замыкающей характеристике при фиксированном ψ; Δx_g — изменение абсциссы точки g; $\varphi = dy^\circ(x)/dx$; индекс минус (плюс) означает, что величины взяты слева (справа) от соответствующей точки (в плоскости xy); индексы x и x' приписаны частным производным по x и x'. Отметим, что, хотя на характеристике ad производные по ψ и y от параметров течения разрывны, множитель перед Δy_d непрерывен ввиду первого соотношения (1.2) и непрерывности на ad самих параметров течения. Определяя $\mu_3{}^\circ$ в G из уравнения

$$W^{(0)} \equiv -\frac{\partial\mu_3{}^\circ}{\partial y} = 0$$

и граничного условия

$$V^{(0)} \equiv -\mu_3{}^\circ - \frac{d\gamma_3{}^\circ}{d\psi} = 0 \qquad (\text{на } db)$$

найдем, что $\mu_3{}^\circ(\psi, y) = \mu_3{}^\circ(\psi) = -d\gamma_3{}^\circ(\psi) / d\psi$.

Учитывая это, используя равенства

$$X_u - \frac{\rho u^2}{v} PX - \frac{u}{v} Y_u = 0, \qquad X_v - \frac{\rho u^2}{v} PY - \frac{u}{v} Y_v = 0$$

$$X - \frac{1}{\rho v} - \frac{u}{v} Y = 0, \qquad X_u - \frac{1}{v} Y - \frac{u}{\rho v c^2} - \frac{u}{v} Y_u = 0$$

$$X_v + \frac{u}{v^2} Y + \frac{c^2 - v^2}{\rho v^2 c^2} - \frac{u}{v} Y_v = 0$$

$$(\zeta_u = (\partial\zeta / \partial u)_{\psi,v}, \quad \zeta_v = (\partial\zeta / \partial v)_{\psi,u})$$

и делая преобразование множителей Лагранжа

$$\alpha(y) = \alpha^\circ - \gamma_{3b}{}^\circ, \qquad \gamma_1(\psi) = \gamma_1{}^\circ, \qquad \gamma_2(\psi) = \gamma_2{}^\circ + (u / v)\gamma_3{}^\circ \tag{3.2}$$

$$\gamma_3(\psi) = \gamma_3{}^\circ, \quad \mu_1(\psi, y) = \mu_1{}^\circ, \quad \mu_2(\psi, y) = \mu_2{}^\circ - \gamma_3{}^\circ, \quad \mu_3(\psi, y) = \mu_3{}^\circ$$

получим вместо (3.1)

$$\begin{aligned}\delta\chi = \delta I = &\left\{\gamma_1\left[\frac{\partial(v/u)}{\partial y} - P\frac{\partial p}{\partial y}\right] + \gamma_2\right\}_d \Delta y_d + \\ &+ \left\{\left[y^\nu(p - p^\circ) + \lambda(f - f_{x'}x') - \frac{u}{v}\alpha - \gamma_2\right]_- - \right.\\ &\left. - \gamma_1\left[\frac{\partial(v/u)}{\partial y} - P\frac{\partial p}{\partial y}\right]_- - \lambda f_+{}^\circ\right\}_b \Delta y_b + [(\lambda f_{x'} + \alpha)_- - \lambda f_{x'+}{}^\circ]_b \Delta x_b - \\ &- \{\gamma_1[\delta(v/u) - P\delta p]\}_{b-} + [(y^\nu p^\circ + \lambda f^\circ)\varphi + \lambda f_{x'}{}^\circ]_g \Delta x_g + \\ &+ \lambda\int_b^g (f_x{}^\circ - f_{x'}{}^{\circ\prime})\,\delta x\,dy + \int_a^b (U^0\delta x + U^1\delta u + U^2\delta^\nu)\,dy + \\ &+ \int_b^d (V^1\delta u + V^2\delta v + V^3\Delta y)\,d\psi + \iint_G (W^1\delta u + W^2\delta v)\,d\psi\,dy\end{aligned}$$

Здесь U^i, V^i и W^i не зависят от γ_3 и μ_3. Это означает, что уравнение $L_6 = 0$ можно было вообще не вводить, а $L_3 = 0$ — ввести в I лишь под знак линейного интеграла. Оставшиеся множители Лагранжа выберем так, чтобы в $\delta\chi$ остались лишь вариации координат контура ag. Пусть μ_1 и μ_2 удовлетворяют в G уравнениям

$$\begin{aligned} W^1 &\equiv -\frac{\partial\mu_1}{\partial y} - y^\nu\rho u\frac{\partial\mu_1}{\partial\psi} - \frac{u}{y^\nu\rho v c^2}\frac{\partial\mu_2}{\partial y} - \frac{1}{v}\frac{\partial\mu_2}{\partial\psi} = 0 \\ W^2 &\equiv -y^\nu\rho v\frac{\partial\mu_1}{\partial\psi} + \frac{c^2 - v^2}{y^\nu\rho c^2 v^2}\frac{\partial\mu_2}{\partial y} + \frac{u}{v^2}\frac{\partial\mu_2}{\partial\psi} = 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

При $w > c$ данная система имеет те же характеристики, что и (1.1). Вдоль них выполняются соотношения

$$d\mu_1 \pm \frac{\sqrt{w^2 - c^2}}{y^\nu\rho v^2 c}\,d\mu_2 = 0 \tag{3.4}$$

где верхний знак соответствует характеристикам первого семейства. Множители α, γ_1 и γ_2, а также граничные условия для определения μ_1 и μ_2 найдем, обращая в нули U^1 и U^2 на ab, V^i — на db, коэффициент перед Δy_d и γ_{1b}. Это дает

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_2 = \alpha \qquad (\text{на } ab) \tag{3.5}$$

$$V^1 \equiv \frac{cv - u\sqrt{w^2 - c^2}}{cu^2}\frac{d\gamma_1}{d\psi} - \gamma_1\left(\frac{2\rho v}{u}P\frac{dv}{d\psi} - y^{-(\nu+1)}Q_u\right) + $$
$$+ \gamma_2 y^{-\nu} Y_u - \rho X\left(\mu_1 v + \frac{\mu_2 u^2}{y^\nu v}P\right) = 0$$
$$V^1 Y - V^2 X \equiv 2P\frac{d\gamma_1}{d\psi} + \gamma_1 P\left[\frac{4uv}{w^2}\frac{d(v/u)}{d\psi} - \nu\frac{cu + v\sqrt{w^2 - c^2}}{y^{\nu+1}\rho c w^2}\right] +$$
$$+ \gamma_2 y^{-\nu}(YY_u - XY_v) = 0 \tag{3.6}$$
$$V^3 \equiv \left\{\frac{cv - u\sqrt{w^2 - c^2}}{cu^2}\frac{d\gamma_1}{d\psi} - \gamma_1\left(\frac{2\rho v}{u}P\frac{dv}{d\psi} - y^{-(\nu+1)}Q_u\right) + \gamma_2 y^{-\nu}Y_u\right\}\frac{\partial u}{\partial y} -$$
$$-\left\{\frac{cu + v\sqrt{w^2 - c^2}}{cu^2}\frac{d\gamma_1}{d\psi} - \gamma_1\left(\frac{2\rho v}{u}P\frac{du}{d\psi} + y^{-(\nu+1)}Q_v\right) - \gamma_2 y^{-\nu}Y_v\right\}\frac{\partial v}{\partial y} -$$
$$- \frac{d\gamma_2}{d\psi} - \gamma_1(\nu + 1)y^{-(\nu+2)}Q - \gamma_2 \nu y^{-(\nu+1)}Y = 0 \qquad (\text{на } db)$$

$$\left\{\gamma_1\left[\frac{\partial(v/u)}{\partial y} - P\frac{\partial p}{\partial y}\right] + \gamma_2\right\}_d = 0, \qquad \gamma_{1b} = 0 \tag{3.7}$$

Из линейности и однородности второго и третьего уравнений (3.6) и граничных условий (3.7) имеем

$$\gamma_1(\psi) = \gamma_2(\psi) \equiv 0$$

а граничное условие для μ_1 и μ_2 на db — первое уравнение (3.6) принимает вид

$$\mu_1 + \frac{\mu_2 u^2}{y^\nu v^2}P = 0 \qquad (\text{на } db) \tag{3.8}$$

Полученные условия полностью определяют все множители Лагранжа для произвольного гладкого контура ab. В соответствии с этим получим

$$\delta\chi = \delta I = \{[y^\nu(p - p^\circ) + \lambda(f - f_{x'}x') - (u/v)\alpha]_- - \lambda f_+{}^\circ\}_b \Delta y_b +$$
$$+ [(\lambda f_{x'} + \alpha)_- - \lambda f_{x'+}{}^\circ]_b \Delta x_b + [(y^\nu p^\circ + \lambda f^\circ)\varphi + \lambda f_{x'}{}^\circ]_g \Delta x_g +$$
$$+ \lambda\int_b^g (f_x{}^\circ - f_{x'}{}^{\circ\prime})\,\delta x\,dy + \int_a^b U^0 \delta x\,dy$$

Если учесть, что знаки δx на ab и Δy_b при $y_b > y_g$ произвольны, а Δx_b, Δx_g и δx на bg неположительны (ввиду ограничения на длину контура), то легко получить необходимые условия минимума

$$U^0 \equiv \lambda(f_x - f_{x'}{}') - \alpha' = 0 \qquad (\text{на } ab)$$
$$\{[y^\nu(p - p^\circ) + \lambda(f - f_{x'}x') - (u/v)\alpha]_- - \lambda f_+{}^\circ\}_b = 0$$
$$\lambda(f_x{}^\circ - f_{x'}{}^{\circ\prime}) \geqslant 0 \qquad (\text{на } bg) \tag{3.9}$$
$$[(\lambda f_{x'} + \alpha)_- - \lambda f_{x'+}{}^\circ]_b \leqslant 0, \qquad [(y^\nu p^\circ + \lambda f^\circ)\varphi + \lambda f_{x'}{}^\circ]_g \leqslant 0$$

Здесь первые два уравнения определяют форму оптимального контура, а остальные суть условия того, что торец bg является участком краевого экстремума. Если же оптимальный контур не имеет торца $(y_b = y_g)$, то в точке g должно выполняться неравенство

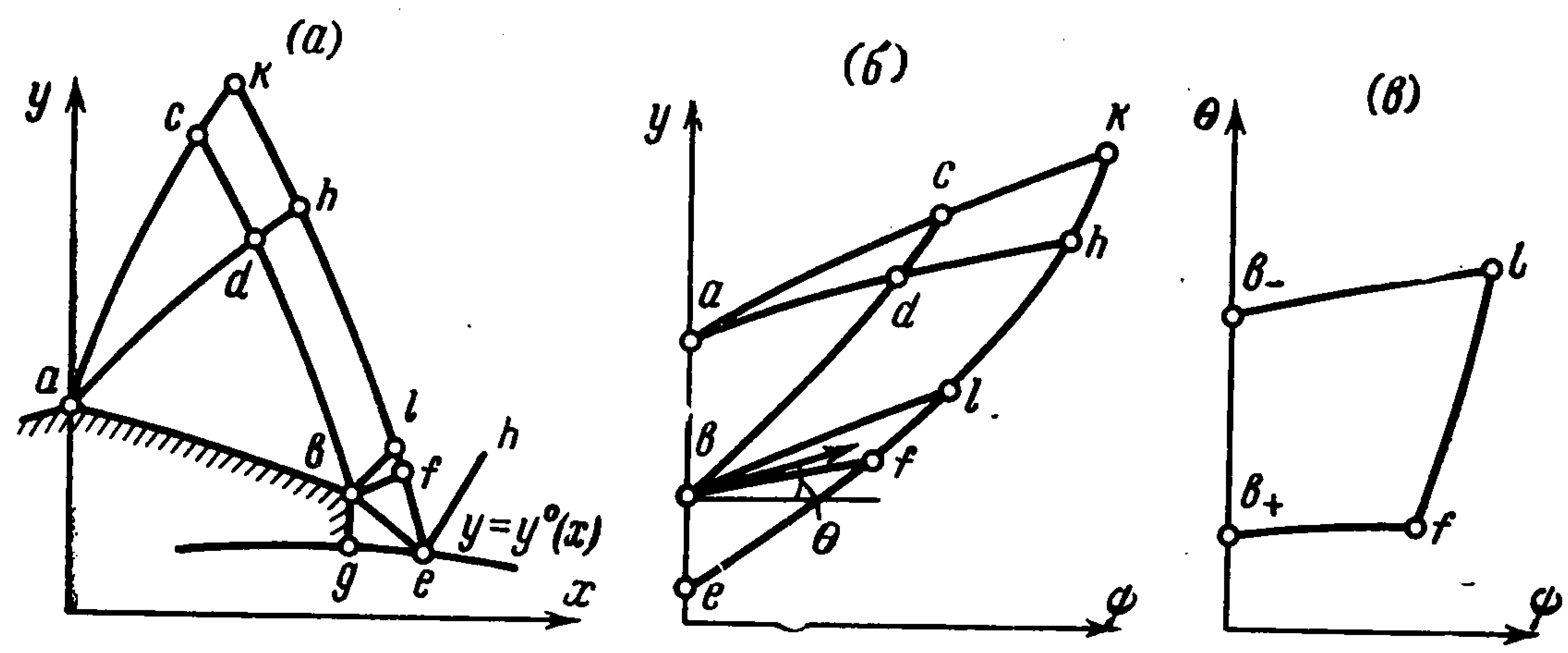
$$\{[y^\nu (p - p^\circ) + \lambda (f - f_{x'} x') - (u / v)\alpha]_- - \lambda f_+^\circ\}_g \geqslant 0 \qquad (3.10)$$

Найденные условия с точностью до обозначений и небольшого отличия в постановке задачи совпадают с полученными в [3], где решение проводилось без включения во вспомогательный функционал уравнений (1.2). Ясно, что это является следствием линейности и однородности уравнений и граничных условий, служащих для определения γ_1 и γ_2.

Как следует из (3.4), (3.8) и (3.5), значения μ_1 и μ_2 на db определяются формулами

$$\mu_1 = \frac{uv_b}{u_b v}\left(\frac{y_b}{y}\right)^{1/2\nu}\left(\frac{P}{P_b}\right)^{1/2}, \qquad \mu_2 = -\frac{vv_b}{uu_b}(yy_b)^{1/2\nu}(PP_b)^{-1/2}$$

4. В действительности p° определяется взаимодействием потока с поверхностью $y = y^\circ(x)$ и поэтому зависит от формы искомого контура. Схема течения изображена на фиг. 2*а*, где ak, ah, bl и bf — характеристики первого семейства, ограничивающие вееры волн разрежения kah и lbf; cb и ke — характеристики второго семейства; en — ударная волна; be — линия тока, разделяющая течение и застойную зону beg. В плоскости ψy рассматриваемая область течения дана на фиг. 2*б*.



Фиг. 2

Примем, что давление p° в застойной зоне всюду постоянно, направление течения в точке e за ударной волной совпадает с направлением кривой $y = y^\circ(x)$, и из всех возможных течений реализуется то, при котором в e выполняется соотношение

$$\pi\,[p^\circ, (v / u)_{e^-}, \quad \varphi_e] = 0 \qquad (4.1)$$

где π — известная функция и минус приписан параметрам слева от e. Для настоящего исследования конкретный вид этой функции не имеет значения. Важно лишь то, что, в соответствии с (4.1),

$$[\Delta (v / u) + k_1 \Delta p^\circ + k_2 \Delta x]_{e-} = 0$$

$$(k_1 = [\partial\pi / \partial (v / u)] (\partial\pi / \partial p^\circ)^{-1}, \quad k_2 = (\partial\pi / \partial\varphi)(d\varphi / dx)(\partial\pi / \partial p^\circ)^{-1})$$

Здесь, как и ранее, $\Delta\xi$ — вариация ξ на замыкающей характеристике (при фиксированном ψ).

Использование (4.1) вносит изменения в построение вспомогательного функционала. Область G теперь ограничена линиями тока ab и be и характеристиками ah и he, интеграл по ab дополняется интегралом по be, а интеграл по характеристике db заменяется интегралом по he.

Особого рассмотрения требуют вопросы, связанные с варьированием y_b. Так как параметры течения в угловой точке терпят разрыв, то при варьировании y_b их изменения в окрестности точки b (при фиксированных ψ и y) будут конечными. Это не позволяет применять обычные приемы, опирающиеся на малость вариаций. Поэтому поступим следующим образом. В интегралах по областям G_0 и G_2, ограниченным контурами $ablh$ и bef, интегрирование будем вести по ψ и y. Здесь μ_i° — функции ψ и y. Что касается веера lbf, то для него введем систему координат, жестко связанную с точкой b. Для этого за независимые переменные примем ψ и угол θ, определенный, как это показано на фиг. 2б. В плоскости $\psi\theta$ (фиг. 2е) вееру lbf соответствует область G_1, ограниченная контуром b_+flb_-. Множители μ_i° в G_1 будем считать функциями ψ и θ, а интеграл по ψy заменим интегралом по $\psi\theta$. В соответствии с определением θ

$$y = y_b + \psi \operatorname{tg} \theta \tag{4.2}$$

а уравнения (1.1) станут

$$L_1^\circ \equiv \frac{\partial u}{\partial \theta} + \operatorname{tg}\theta \frac{\partial y^\nu p}{\partial \theta} - \frac{\psi}{\cos^2\theta}\frac{\partial y^\nu p}{\partial \psi} = 0$$

$$L_2^\circ \equiv \frac{\partial (y^\nu \rho v)^{-1}}{\partial \theta} - \operatorname{tg}\theta \frac{\partial (u/v)}{\partial \theta} + \frac{\psi}{\cos^2\theta}\frac{\partial (u/v)}{\partial \psi} = 0$$

$$L_3^\circ \equiv \frac{\partial x}{\partial \theta} - \frac{\psi}{\cos^2\theta}\frac{u}{v} = 0$$

Составляя вспомогательный функционал, учтем, кроме того, возможность разрыва множителей Лагранжа на db [3]. В связи с этим интеграл по G_0 разобъем на сумму интегралов по G_{01} и G_{02} — областям непрерывности μ_i°.

В соответствии со сказанным возьмем I в виде

$$I = \int_a^b (y^\nu p + \lambda f + \alpha^\circ L_3)\, dy + \int_b^e \alpha^\circ L_3 dy + \int_b^g (y^\nu p^\circ + \lambda f^\circ)\, dy +$$

$$+ \int_e^h (\gamma_1^\circ L_4 + \gamma_2^\circ L_5 + \gamma_3^\circ L_6)\, d\psi + \Big(\iint_{G_{01}} + \iint_{G_{02}} + \iint_{G_2}\Big)(\mu_1^\circ L_1 + \mu_2^\circ L_2 + \mu_3^\circ L_3)\, d\psi dy +$$

$$+ \iint_{G_1} (\mu_1^\circ L_1^\circ + \mu_2^\circ L_2^\circ + \mu_3^\circ L_3^\circ)\, d\psi\, d\theta$$

Найдем первую вариацию $\delta\chi = \delta I$. Пусть $\delta^\circ\xi$ — вариация ξ в области G_1 и на ее границах при фиксированных ψ и θ. Тогда, согласно (4.1), $\delta^\circ y = \Delta y_b$. На границе

$$\delta^\circ \xi = \delta\xi + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^e \Delta y_b + \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial \theta}\right)^e - \left(\frac{\partial \xi}{\partial \theta}\right)^i\right]\Delta\theta$$

Здесь $\delta\xi$ — вариация ξ вне G_1 в точках непроварьированной границы, т. е. при фиксированных ψ и y; индекс i (e) приписан производным внутри (вне) веера волн разрежения; $\Delta\theta$ — вариация θ на границе веера при постоянном ψ.

Потребуем, чтобы множители Лагранжа были непрерывны на bl и bf, а затем определим μ_3°, как это сделано в предыдущем пункте, и произведем замену (3.2). В результате выражение для $\delta\chi$ после возвращения к переменным ψ и y станет

$$\delta\chi = \delta I = \left\{\gamma_1\left[\frac{\partial(v/u)}{\partial y} - P\frac{\partial p}{\partial y}\right] + \gamma_2\right\}_h \Delta y_h + \left[\alpha - \left(\frac{u}{v}\alpha + \gamma_2\right)\varphi + \right.$$

$$\left. + \gamma_1 k_2\right]_{e-}\Delta x_e + \left[\frac{y_g^{\nu+1} - y_b^{\nu+1}}{\nu+1} + \gamma_{1e}(P + k_1)_{e-} - \int_b^e \mu_1 y^\nu dy\right]\Delta p^\circ +$$

$$+ \left\{[y^\nu(p - p^\circ) + \lambda(f - f_{x'}x') - (u/v)\alpha]_{b-} - [\lambda f^\circ - (u/v)\alpha]_{b+} + \right.$$

$$+ \int\limits_{b_-fb_+}[\mu_1 d(y^\nu p) - \mu_2 d(\alpha/v)] + \nu\iint\limits_{G_1}\left(y^{\nu-1}p\frac{\partial\mu_1}{\partial\psi} + \frac{1}{y^{\nu+1}\rho v}\frac{\partial\mu_2}{\partial y}\right)d\psi dy\bigg\}\Delta y_b +$$

$$+ [\lambda(f_{x'-} - f_{x'+}{}^\circ) + \alpha_- - \alpha_+]_b\Delta x_b + [(y^\nu p^\circ + \lambda f^\circ)\varphi + \lambda f_{x'}{}^\circ]_g \Delta x_g +$$

$$+ \lambda\int_b^g (f_x{}^\circ - f_{x'}{}^{\circ\prime})\,\delta x dy - \int_b^e [\alpha'\delta x + (\alpha - \mu_2)\,\delta(u/v)]\,dy +$$

$$+ \int_a^b (U^0\delta x + U^1\delta u + U^2\delta v)\,dy + \int_e^h (V^1\delta u + V^2\delta v + V^3\Delta y)\,d\psi +$$

$$+ \int_b^d (R^1\delta u + R^2\delta v)\,d\psi + \iint\limits_{G_0+G_2}(W^1\delta u + W^2\delta v)\,d\psi\,dy +$$

$$+ \iint\limits_{G_1}(W^1\delta^\circ u + W^2\delta^\circ v)\,d\psi\,dy$$

$$\left(R^1 = \rho X\left([\mu_1]v + \frac{u^2 P}{y^\nu v}[\mu_2]\right),\quad R^2 = R^1 Y / X\right)$$

Здесь $[\mu_i]$ в R^1 означает скачок μ_i на характеристике db. Выбор множителей Лагранжа в настоящем случае принципиально не отличается от данного выше и приводит к следующим результатам. Множители μ_1 и μ_2 всюду в G определяются уравнениями (3.3) или (3.4). Граничными условиями для их решения и уравнениями для определения α, γ_1 и γ_2 служат: на ab — условия (3.5), на he — уравнения (3.6) и на be — уравнение

$$\mu_2 = \alpha = \alpha_e = \text{const}$$

Значение α_e и граничные условия для вычисления γ_1 и γ_2 даются равенствами

$$\left\{\gamma_1\left[\frac{\partial(v/u)}{\partial y} - P\frac{\partial p}{\partial y}\right] + \gamma_2\right\}_h = 0, \qquad \left[\alpha - \left(\frac{u}{v}\alpha + \gamma_2\right)\varphi + \gamma_1 k_2\right]_{e-} = 0$$
$$\frac{y_g^{\nu+1} - y_b^{\nu+1}}{\nu+1} + \gamma_{1e}(P + k_1)_{e-} - \int_b^e \mu_1 y^\nu dy = 0 \tag{4.3}$$

Наконец, разрывы множителей Лагранжа на характеристике db должны удовлетворять соотношению

$$[\mu_1] + \frac{u^2 P}{y^\nu v^2}[\mu_2] = 0 \tag{4.4}$$

Как и ранее, полученная система уравнений и граничных условий определяет множители Лагранжа для любого контура ag. Однако теперь ввиду неоднородности последнего условия (4.3) функции $\gamma_1 = \gamma_2 \equiv 0$ не являются ее решением.

Отметим, что, как и в случае задач, допускающих переход к характеристическому контуру [6], первое условие (4.3), в силу гиперболичности системы (1.1), выполняется в любой точке обрезка hl характеристики he и здесь может использоваться вместо второго или третьего уравнений (3.6) для определения γ_1 и γ_2. Кроме того, одно из этих уравнений можно заменить на

$$V^3 \equiv -\frac{d\gamma_2}{d\psi} - \gamma_1(\nu+1)\,y^{-(\nu+2)}\,Q - \gamma_2\nu y^{-(\nu+1)}Y +$$
$$+\frac{y^\nu \rho u c^2}{u^2-c^2}\,X\left(\frac{\rho w^2}{uv}\frac{dv}{d\psi} + \frac{\nu}{y^{\nu+1}}\right)\left(\mu_1 v + \frac{\mu_2 u^2}{y^\nu v}\,P\right) = 0$$

Рассмотрение слагаемых, оставшихся в $\delta\chi$ после выбора множителей Лагранжа, дает необходимые условия минимума χ, которые, за исключением условий в точке b, совпадают с (3.9). Условия же в точке b после преобразования с учетом (3.3) заменяются на

$$[y^\nu(p-p^\circ) + \lambda(f - f_{x'}x') - (u/v)\,\alpha]_{b-} - [\lambda f^\circ - (u/v)\,\alpha]_{b+} +$$
$$+\int\limits_{b_-}^{b_+}[\mu_1 y^\nu\, dp - \mu_2 d\,(u/v)] = 0, \qquad [\lambda\,(f_{x'-} - f_{x'+}{}^\circ) + \alpha_- - \alpha_+]_b \leqslant 0$$

Интеграл вычисляется при $y \equiv y_b$.

При отсутствии торца, когда $y_e = y_g = y_b$, последнее уравнение (4.3) дает $\gamma_{1e} = 0$. Отсюда, как и в предыдущем пункте, получаем $\gamma_1 = \gamma_2 \equiv 0$ на ke, а затем из второго уравнения (4.3) получаем $\alpha_e = 0$. Учитывая это, а также то, что при $y_b = y_e$ характеристики he и db совпадают, получим те же условия, что и при $p^\circ = \text{const}$, в том числе, условие отсутствия торца (3.10). Таким образом, это условие сохраняется в общем случае. Ранее этот результат другим путем был получен в [7].

Отметим, что расширение используемой во вспомогательном функционале области G за границы соответствующей области влияния не меняет конечных результатов. Так, если при $p^\circ = \text{const}$ взять область G настоящего пункта, то вне треугольника abd все множители Лагранжа оказываются равными нулю.

Поступила 26 X 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Guderley K. G., Armitage J. V. A general method for the determination of best supersonic rocket nozzles. Paper presented at the Symposium on extremal problems in aerodynamics. Boeing Sci. Res. Laboratories, Flight Sci. Laboratory, Seattle, Washington, December 3—4, 1962 (русск. перев.: Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1963, № 6).
2. Борисов В. М., Шипилин А. В. О соплах максимальной тяги с произвольными изопериметрическими условиями. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1.
3. Крайко А. Н. Вариационные задачи газовой динамики неравновесных и равновесных течений. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
4. Борисов В. М. Вариационная задача о трехмерных сверхзвуковых течениях. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
5. Korst H. H. A theory for base pressures in transonic and supersonic flow. J. Appl. Mech., 1956, vol. 23, № 4 (русск. перев.: Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1957, № 5).
6. Шмыглевский Ю. Д. Некоторые вариационные задачи газовой динамики. Тр. ВЦ АН СССР, 1963.
7. Крайко А. Н. Вариационные задачи сверхзвуковых течений газа с произвольными термодинамическими свойствами. Тр. ВЦ АН СССР, 1963.