Прикладная математика и механика. Том 30, 1966

О ВЛИЯНИИ ВЯЗКОСТИ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКОВЫХ ИМПУЛЬСОВ

О. С. Рыжов

(Москва)

Первое исследование о затухании звуковых колебаний в вязком газе принадлежит Стоксу, эффект теплопроводности был учтен позднее Кирхгоффом; весьма полное изложение их результатов имеется в классической монографии Лорда Рэлея [1]. Как Стокс, так и Кирхгофф с самого начала исходили из линейных уравнений акустики, а не из точных уравнений, описывающих движение сплошных сред.

Изучая распространение плоских звуковых импульсов в идеальном (лишенном вязкости и теплопроводности) газе, Крюссар показал [2], что асимптотические законы затухания ударных волн на больших расстояниях от места их возникновения отличаются от акустических. Правильный вывод этих законов невозможен без учета нелинейных членов в уравнениях газовой динамики. Распространение теории Крюссара на цилиндрические и сферические ударные волны было дано различными методами Л. Д. Ландау [3], С. А. Христиановичем [4], Л. И. Седовым [5] и Уитэмом [6].

Как следует из работы Тэйлора [7], структура слабых ударных волн определяется в основном конвективными процессами, связанными с нелинейной природой уравнений Навье-Стокса, и диссипацией энергии за счет вязкости и теплопроводности реальных сред. Поэтому казалось естественным, что оба указанных фактора в одинаковой мере будут влиять на распространение звуковых импульсов. Такая точка зрения была высказана Лайтхиллом [8] и подробно проанализирована им на примере плоских движений.

Ниже изучается затухание возмущений в цилиндрических и сферических звуковых импульсах. Оказывается, что структура волн и асимптотические законы их затухания, когда время $t \to \infty$, связаны с эффектами вязкости и теплопроводности. На этой стадии процесса учет нелинейных членов в уравнениях Навье-Стокса может не производиться, так как их влияние на формирование поля течения пренебрежимо мало. Изменение всех параметров газа внутри импульсов происходит плавно, ударные волны отсутствуют. Наоборот, движение ударных волн, пока их ширина много меньше общей длины волны, определяется нелинейными конвективными членами уравнений газовой динамики.

Когда $t \to \infty$, изменение максимальной величины избыточного давления в N—волнах при учете вязкости и теплопроводности обратно пропорционально $t^{3/2}$ для движений с осевой симметрией и t^2 для центрально симметричных движений. Утверждение Лайтхилла [8] о том, что асимптотические законы затухания возмущений должны быть экспоненциальными, оказалось неверным; избыточное давление изменяется по экспоненциальному закону только в периодических звуковых колебаниях с фиксированной длиной волны [1]. В основе полученных выводов лежит обобщение анализа коротких волн, проведенного С. А. Христиановичем [4] для нестационарных одномерных движений идеального газа.

§ 1. Уравнения коротких волн. Рассмотрим одномерные течения, все параметры которых зависят от времени t и от единственной геометрической координаты r, определяющей расстояние от плоскости, оси или центра симметрии. Пусть v означает скорость частиц, ρ — плотность, p — давление, s — удельную энтропию, T — температуру, λ_1 — коэффициент вязкости, λ_2 — коэффициент второй вязкости, k — коэффициент теплопроводности. Уравнения неразрывности, Навье-Стокса и переноса тепла возьмем в форме [9]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial r} + \frac{(\nu - 1)\rho v}{r} = 0 \tag{1.1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r}\left\{2\lambda_1\frac{\partial v}{\partial r} + \left(\lambda_2 - \frac{2}{3}\lambda_1\right)\left[\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{(\nu-1)v}{r}\right]\right\} + \\ + \frac{2(\nu-1)\lambda_1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right) \tag{1.2}$$

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t} + v\frac{\partial s}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(k\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{(\nu-1)k}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + 2\lambda_1\left[\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 + (\nu-1)\left(\frac{v}{r}\right)^2\right] + \\ + \left(\lambda_2 - \frac{2}{3}\lambda_1\right)\left[\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{(\nu-1)v}{r}\right] \tag{1.3}$$

Здесь $\nu = 0, 1, 2$ соответственно для течений с плоской, осевой и центральной симметрией.

Чтобы замкнуть написанную систему, присоединим к ней еще два уравнения, которые связывают термодинамические величины ρ, p, s и T. В качестве независимых параметров примем плотность и давление, а удельную энтропию и температуру выразим через них при помощи дифференциальных соотношений

$$ds = \frac{c_p}{\alpha\rho a^2 T}(dp - a^2\,d\rho), \qquad dT = \frac{1}{\alpha\rho a^2}(\varkappa\,dp - a^2\,d\rho) \\ \left(\alpha = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p, \quad a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s, \quad \varkappa = \frac{c_p}{c_v}\right) \tag{1.4}$$

которые оказались весьма удобными при изучении трансзвуковых течений вязкого теплопроводящего газа [10]. В формулах (1.4) буква α означает коэффициент теплового расширения, a — адиабатическую скорость звука, $\varkappa$ — отношение удельной теплоемкости при постоянном давлении c_p к удельной теплоемкости при постоянном объеме c_v.

При анализе системы уравнений (1.1) — (1.4) сделаем предположение, что значения всех параметров газа в рассматриваемой области пространства мало отклоняются от соответствующих значений в состоянии равновесия. Последние отметим нулевым индексом. Введем систему координат, движущуюся со скоростью звука a_0 в невозмущенной среде, и обозначим через L характерную длину в этой системе. Будем считать, что рассматриваемое течение газа представляет собой короткую волну, т. е., что ширина области, где сосредоточены возмущения, мала по сравнению с теми расстояниями, на которые распространяется волна. Это требование выполняется в большинстве задач, связанных с изучением взрывных явлений. Относительно возмущений плотности, давления, температуры и скорости звука предположим, что они имеют тот же порядок малости, как и массовая скорость частиц. Переходя к безразмерным переменным, пишем

$$t = \frac{L}{\Delta a_0}t', \qquad r = a_0 t + Lr', \qquad v = \varepsilon a_0 v' \\ \rho = \rho_0(1 + \varepsilon\rho'), \qquad p = p_0(1 + \varepsilon p'), \qquad a = a_0(1 + \varepsilon a') \tag{1.5}$$

Здесь ε и Δ — числовые параметры, которые по величине значительно меньше единицы. В результате подстановки соотношений (1.5) в систему уравнений (1.1) — (1.4) получаются три безразмерных коэффициента:

$$N_{\mathrm{Re}1} = \frac{\rho_0 a_0 L}{\lambda_1}, \qquad N_{\mathrm{Re}2} = \frac{\rho_0 a_0 L}{\lambda_2}, \qquad N_{\mathrm{Pe}} = \frac{\rho_0 a_0 c_p L}{k}$$

В дальнейшем будем считать, что обратные величины этих чисел имеют одинаковый порядок и значительно меньше единицы. При выводе приближенных уравнений во всех соотношениях будем удерживать только главные члены, пренебрегая остальными членами, имеющими более высокий порядок малости. Поэтому в уравнениях Навье-Стокса и переноса тепла коэффициенты вязкости λ_1, λ_2 и теплопроводности k можно положить постоянными и равными их значениям в равновесном состоянии среды. Введение малого параметра Δ в определение безразмерного времени связано с предположением об узости ширины зоны возмущенного движения. В результате линеаризации уравнения неразрывности получим [1]

$$\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial \rho}{\partial r} = 0$$

Из уравнения Навье-Стокса следует

$$\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{p_0}{\rho_0 a_0^2} \frac{\partial p}{\partial r} = 0$$

Интегрирование двух последних уравнений приводит к формулам

$$v = \rho = \frac{p_0}{\rho_0 a_0^2} p \tag{1.6}$$

которые выражают тот факт, что в рассматриваемом нами приближении сжатие газа происходит адиабатически и имеет место соотношение Римана, характеризующее плоский бегущий звуковой импульс [9]. Как известно, соотношение Римана справедливо и для слабых ударных волн [9].

Полученный вывод является прямым следствием не только предположений о малости отклонений параметров среды в поле возмущений от соответствующих величин в состоянии равновесия и об узости области возмущенного движения, но также предположения о больших по сравнению с единицей значениях чисел Рейнольдса. Таким образом, при упрощении первых двух уравнений из системы (1.1) — (1.4) получились выражения, характеризующие движение идеальных сред. Влияние диссипативных факторов необходимо учесть при упрощении уравнения переноса тепла. Преобразуем его предварительно с тем, чтобы исключить величины первого порядка малости, связанные с потоками массы и импульса вещества. Переходя в уравнении (1.3) от энтропии и температуры к плотности и давлению при помощи формул (1.4) и комбинируя полученное выражение с уравнениями (1.1) и (1.2), имеем требуемое соотношение

$$\frac{\partial p}{\partial t} + a_0 \frac{\partial p}{\partial r} + [(a_0 - v)^2 - a^2]\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v\frac{\partial \rho}{\partial r}\right) - \rho(a_0 - v)\left(\frac{\partial v}{\partial t} + a_0 \frac{\partial v}{\partial r}\right) +$$
$$+ \frac{(\nu - 1)\rho v (a_0 - v)^2}{r} = (a_0 - v) L_1(\lambda_1, \lambda_2) + \frac{\alpha a^2}{c_p} L_2(k, \lambda_1, \lambda_2) \tag{1.7}$$

[1] Штрихи над безразмерными переменными здесь и в дальнейшем опускаем.

Здесь через $L_1(\lambda_1, \lambda_2)$ обозначена правая часть уравнения (1.2) без первого члена, а через $L_2(k, \lambda_1, \lambda_2)$ — правая часть уравнения (1.3). После перехода к подвижной системе координат в левой части уравнения (1.7) исчезают частные производные функций v и p по пространственной переменной.

В рассматриваемом приближении

$$da = \left(\frac{\partial a}{\partial \rho_0}\right)_s d\rho = \frac{(m_0 - 1)\, a_0}{\rho_0}\, d\rho \qquad \left(m_0 = \frac{1}{2\rho_0^3 a_0^2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V_0^2}\right)_s, \quad V = \frac{1}{\rho}\right)$$

Используя последние соотношения, подставляя формулы (1.5) в уравнение (1.7) и удерживая в нем только старшие члены, получим

$$m_0 \varepsilon v \frac{\partial v}{\partial r} + \Delta\left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\nu - 1}{2}\frac{v}{t}\right) = \frac{1}{2N_{\mathrm{Re}}}\left(1 + \frac{\varkappa - 1}{N_{\mathrm{Pr}}}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \tag{1.8}$$

Фигурирующее в последнем уравнении суммарное число Рейнольдса N_{Re} связано с так называемой «продольной вязкостью»

$$\frac{1}{N_{\mathrm{Re}}} = \frac{4}{3}\frac{1}{N_{\mathrm{Re}\,1}} + \frac{1}{N_{\mathrm{Re}\,2}}$$

а число Прандтля N_{Pr} равно отношению числа Пекле N_{Pe} к числу Рейнольдса N_{Re}. Порядок чисел Пекле и Рейнольдса, по предположению, одинаков, поэтому число Прандтля будет порядка единицы. Отметим, что члены в уравнении (1.3), связанные с диссипацией энергии за счет вязких напряжений, не влияют на выражение в правой части уравнения (1.8).

Уравнение (1.8) определяет законы движения коротких волн в средах, в которых происходит диссипация энергии. Проведенный анализ приводит к обобщению результатов С. А. Христиановича [4], относящихся к нестационарным одномерным течениям газа, лишенного вязкости и теплопроводности. Рассмотрим более подробно различные частные случаи.

§ 2. Ударные волны в идеальных средах. Предположим сначала, что $\varepsilon \ll \Delta$ и $N_{\mathrm{Re}}^{-1} \ll \Delta$, тогда из уравнения (1.8) следует

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\nu - 1}{2}\frac{v}{t} = 0$$

Интегрирование написанного соотношения дает хорошо известный закон геометрической акустики [9]

$$v = f(r)\, t^{-\frac{\nu - 1}{2}} \tag{2.1}$$

определяющий распространение плоских, цилиндрических и сферических волн. Функция $f(r)$ в формуле (2.1) может быть выбрана произвольно. Как видно из приведенного анализа, результатами геометрической акустики можно пользоваться только до тех пор, пока параметры звуковых импульсов изменяются достаточно плавно во времени и пространстве. Но асимптотических законов затухания возмущений при $t \to \infty$ формула (2.1) не дает даже для идеальных сред, лишенных вязкости и теплопроводности, в чем легко убедиться подставляя ее в исходное уравнение (1.8).

Асимптотические законы затухания звуковых импульсов в идеальных средах получаются при условии, что $N_{\mathrm{Re}}^{-1} \ll \varepsilon \sim \Delta$. Полагая для простоты $m_0\varepsilon = \Delta$, имеем уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\nu - 1}{2}\frac{v}{t} = 0 \tag{2.2}$$

аналогичное выведенному С. А. Христиановичем [4] в иных переменных.

Производя элементарную подстановку

$$\tau = \int t^{-\frac{\nu-1}{2}} dt, \qquad t^{\frac{\nu-1}{2}} v = u \tag{2.3}$$

запишем уравнение (2.2) в форме уравнения плоских волн

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u\frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

Его интеграл, содержащий произвольную функцию $g(u)$, будет

$$\tau u - r = g(u) \tag{2.4}$$

Соотношение (2.4) описывает простую волну Римана [9] с прямолинейными характеристиками. Чтобы найти асимптотические законы затухания звукового импульса со слабой ударной волной, достаточно ограничиться частным случаем $g(u) = 0$, так как распределение всех параметров газа, отнесенное к системе координат, которая движется вместе с волной, при $t \to \infty$ будет задаваться линейной функцией геометрической координаты [2-6]. Возвращаясь к прежним переменным по формулам (2.3), имеем

$$v = \frac{r}{t}\left(\begin{matrix}\text{для плос-}\\ \text{ких волн}\end{matrix}\right), \quad v = \frac{r}{2t}\left(\begin{matrix}\text{для цилиндри-}\\ \text{ческих волн}\end{matrix}\right), \quad v = \frac{r}{t\ln t}\left(\begin{matrix}\text{для сферичес-}\\ \text{ких волн}\end{matrix}\right) \tag{2.5}$$

Напишем выражение, определяющее скорость N распространения слабой ударной волны по покоящемуся газу. В размерных переменных [9]

$$N = a_0 + \frac{1}{2}\frac{m_0}{\rho_0 a_0}(p - p_0)$$

Учитывая формулы (1.5) и (1.6), получим $dr/dt = {}^1/_2\, v$.

Дифференцируя соотношения (2.5) вдоль траектории фронта ударной волны, находим отсюда уравнение, которое определяет ее амплитуду v_* в различные моменты времени. Решение указанного уравнения приводит к известным результатам [2-6] (2.6)

$$v_* = \frac{c}{t^{1/2}}\left(\begin{matrix}\text{для пло-}\\ \text{ских волн}\end{matrix}\right), \quad v_* = \frac{c}{t^{3/4}}\left(\begin{matrix}\text{для цилиндри-}\\ \text{ческих волн}\end{matrix}\right), \quad v_* = \frac{c}{t\sqrt{\ln t}}\left(\begin{matrix}\text{для сфериче-}\\ \text{ских волн}\end{matrix}\right)$$

где через c обозначена постоянная интегрирования. В рассматриваемом приближении избыточное давление p_* на ударном фронте пропорционально скорости частиц, поэтому его изменение подчиняется законам (2.6).

Под влиянием диссипативных факторов на больших расстояниях от места возникновения ударные волны будут постепенно размываться. Пока ширина ударных волн остается много меньше общей длины звукового импульса, их движение определяется в основном членами, стоящими в левой части уравнения (1.8), в том числе нелинейным членом $v\partial v/\partial r$, который обусловлен учетом конвективных производных в уравнениях Навье-Стокса. Исследуя плоские движения газа, Лайтхилл нашел [8], что изменение максимального значения скорости частиц следует первой из формул (2.6) только тогда, когда звуковой импульс состоит из одной фазы сжатия. При этом условии отношение ширины ударной волны к длине импульса сохраняется постоянным во времени. Но если фазу сжатия в волне сменяет фаза разрежения, то при $t \to \infty$ максимальное значение скорости частиц стремится к нулю значительно быстрее, чем это предсказывает теория распространения ударных волн в идеальных средах [8]. Сама ударная волна в конце концов полностью размывается и исчезает.

§ 3. Асимптотические законы затухания звуковых импульсов. Чтобы получить асимптотическую форму звуковых импульсов, которую они приобретают при $t \to \infty$ под воздействием вязкости и теплопроводности, рассмотрим другой предельный случай $\varepsilon \ll \Delta \sim N_{\mathrm{Re}}^{-1}$. Пусть

$$\Delta = \frac{1}{2N_{\mathrm{Re}}}\left(1 + \frac{\varkappa - 1}{N_{\mathrm{Pr}}}\right)$$

Исследуем поведение N-волн, где первоначальное сжатие газа сменяется затем разрежением; в задачах с осевой и центральной симметрией они представляют основной интерес [9]. Но сделанное предположение об относительных порядках малых величин в соотношениях (1.5) и уравнении (1.8) будет справедливым и для плоских движений газа. Имеем

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\nu - 1}{2}\frac{v}{t} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}$$

Вводя новую искомую функцию u согласно второй из формул (2.3), получим для ее определения классическое уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$$

Для описания N-волн нужно взять решение типа диполя [11]

$$n = \frac{h_1 r}{t^{3/2}} e^{-r^2/4t}$$

откуда, возвращаясь к безразмерной скорости частиц газа, находим

$$v = \frac{h_1 r}{t^{(\nu+2)/2}} e^{-r^2/4t} \tag{3.1}$$

Дифференцируя равенство (3.1) при $t = \mathrm{const}$, видим, что значение возмущенной скорости будет максимальным, если $r = \sqrt{2t}$. Минимальное значение скорости частиц получается при $r = -\sqrt{2t}$. Обозначив максимальное значение скорости, достигаемой частицами в волне, звездочкой в качестве индекса, имеем (3.2)

$$v_* = \frac{h_2}{t} \ \left(\begin{matrix}\text{для пло-}\\ \text{ских волн}\end{matrix}\right), \quad v_* = \frac{h_2}{t^{3/2}} \ \left(\begin{matrix}\text{для цилиндри-}\\ \text{ческих волн}\end{matrix}\right), \quad v_* = \frac{h_2}{t^2} \ \left(\begin{matrix}\text{для сфериче-}\\ \text{ских волн}\end{matrix}\right)$$

где постоянная h_2 введена вместо пропорциональной ей постоянной h_1. Сравнение формул (2.6) и (3.2) показывает, что под влиянием вязкости и теплопроводности амплитуда звуковых импульсов значительно быстрее стремится к нулю по сравнению с теми законами, которые следуют из предположения о возможности пренебречь этими эффектами. Ударные волны в течении отсутствуют. Избыточное давление в волне также изменяется в соответствии с формулами (3.2). Длина l как плоского, так и цилиндрического и сферического звуковых импульсов пропорциональна $\sqrt{t}$. При распространении импульсов в идеальных средах только в плоском движении $l \sim \sqrt{t}$; в движении с осевой симметрией $l \sim t^{1/4}$, а в сферически симметричном движении $l \sim \sqrt{\ln t}$, как это было показано в работах [2–6]. Таким образом, в пространстве с любым числом измерений длина N-волн будет изменяться по одному и тому же закону после того, как структура течения начинает определяться в основном диссипативными факторами.

Подстановка решения (3.2) в исходное уравнение (1.8) подтверждает, что пренебрежение членом $v\partial v / \partial r$ в его левой части законно при $t \to \infty$ и любом сколь угодно малом, но отличном от нуля значении обратного числа Рейнольдса N_{Re}. Иными словами, асимптотическая форма звуковых импульсов и законы их затухания связаны с эффектами вязкости и теплопроводности. На конечной стадии процесса распространения волн учет нелинейных членов в уравнениях Навье-Стокса может не производиться.

Отметим, что первая из формул (3.2) следует из работы Лайтхилла [8], но сделанное Лайтхиллом в этой же работе утверждение о том, что асимптотические законы затухания возмущений должны быть экспоненциальными в цилиндрических и сферических волнах, неверно. Как показывают формулы (3.2), эти законы получаются степенными. Скорость частиц и избыточное давление изменяются по экспоненциальному закону только в периодических звуковых колебаниях с фиксированной длиной волны [1].

Следует обратить внимание на одну особенность, присущую рассматриваемой задаче. Несмотря на то, что структура потока определяется в основном диссипативными факторами и описывается уравнением теплопроводности, распространение возмущений и на конечной стадии процесса происходит согласно равенствам (1.5) с адиабатической скоростью звука a_0 в покоящейся среде. Более точно, с такой скоростью движется поверхность, отделяющая фазу сжатия от фазы разрежения в волне. В первом приближении в ней остаются справедливыми соотношения Римана для изэнтропических простых волн.

Поступила 7 XII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. С т р э т т Дж. В. (Лорд Рэлей). Теория звука, т. II. Гостехиздат, М., 1955.
2. C r u s s a r d L. Sur la propagation et l'altèration des ondes de chok. Compt. Rend., 1913, t. 156, No. 8.
3. Л а н д а у Л. Д. Об ударных волнах на далеких расстояниях от места их возникновения. ПММ, 1945, т. 9, вып. 4.
4. Х р и с т и а н о в и ч С. А. Ударная волна на значительном расстоянии от места взрыва. ПММ, 1956, т. 20, вып. 5.
5. С е д о в Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Гостехиздат, 1954.
6. W h i t h a m G. B. The propagation of spherical blast. Proc. Roy. Soc., A, 1950, vol. 203, No. 1075.
7. T a y l o r G. I. The Conditions Necessary for Discontinuous Motion in Gases. Proc. Roy. Soc., A, 1910, vol. 84, No. 571.
8. L i g h t h i l l M. J. Viscosity effects in sound waves of finite amplitude. Surveys in Mechanics, G. I. Taylor 70th Anniversary Volume. University press, Cambridge, 1956.
9. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, М., 1954.
10. Р ы ж о в О. С. Асимптотическая картина обтекания тел вращения звуковым потоком вязкого и теплопроводящего газа. ПММ, 1965, т. 29, вып. 6.
11. К а р с л о у Г. С. Теория теплопроводности. Гостехиздат, М.— Л, 1947.