

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ МАЛОЙ ТОЛЩИНЫ

Т. В. Виленская, И. И. Ворович

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается равновесие симметрично нагруженной толстостенной сферической оболочки. Изучается поведение решения при стремлении относительной толщины оболочки γ к нулю. Строятся асимптотические разложения, оценивается погрешность прикладных теорий и дается построение уточненных теорий. Используется метод однородных решений, который для сферических оболочек развит А. И. Лурье [1].

1. Для построения однородных решений для сферического пояса (фиг. 1) запишем уравнения теории упругости в системе координат r, α, φ ,

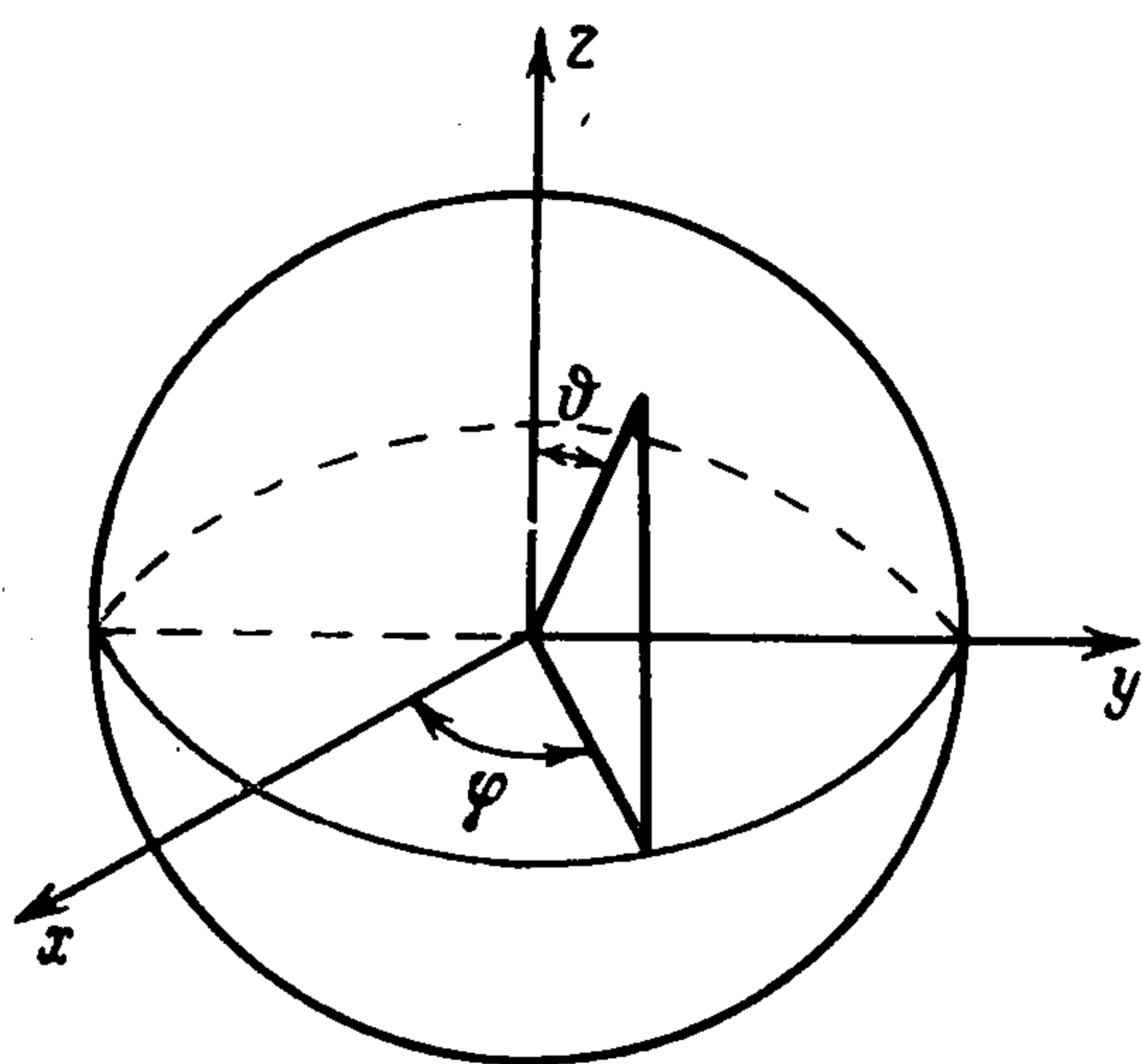
$$\begin{aligned} \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \nabla^2 u_r - \frac{2}{r^2} u_r - \frac{2}{r^2} \operatorname{ch} \alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{2}{r^2} \operatorname{sh} \alpha u_\alpha &= 0 \\ \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + \frac{r}{\operatorname{ch}^2 \alpha} \nabla^2 u_\alpha + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \alpha} - \frac{\operatorname{ch} \alpha}{r} u_\alpha &= 0 \\ \theta &= \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2}{r} u_r + \frac{\operatorname{ch} \alpha}{r} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{\operatorname{sh} \alpha}{r} u_\alpha \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\left(\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\operatorname{ch}^2 \alpha}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) \quad \left(\alpha = \ln \operatorname{tg} \frac{\nu}{2} \right) \quad (1.2)$$

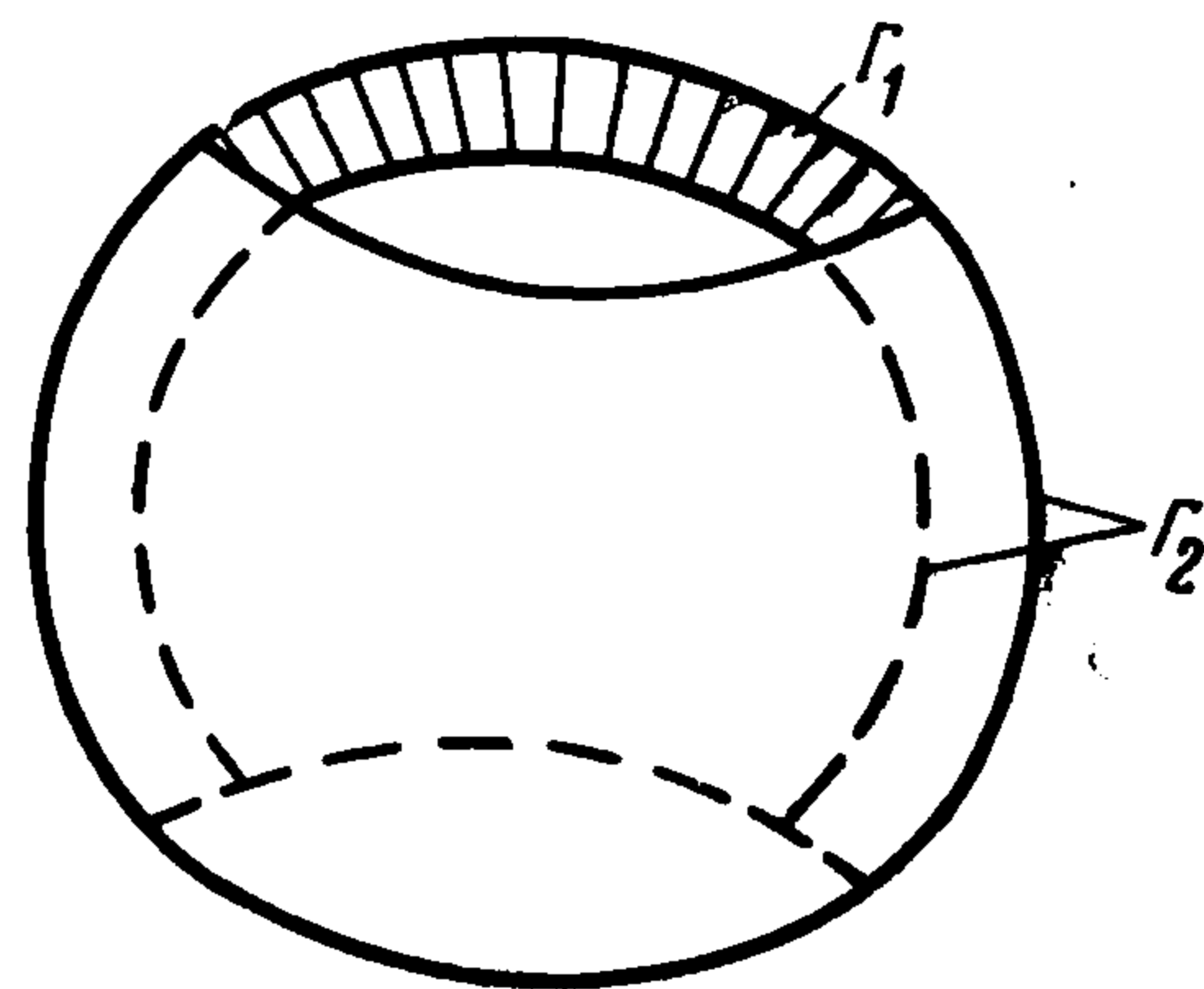
Перемещения u_r, u_α будем искать при помощи следующих соотношений

$$u_r = a(r) m(\alpha), \quad u_\alpha = b(r) \operatorname{ch} \alpha \frac{dm(\alpha)}{d\alpha}, \quad \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2 m}{d\alpha^2} = \mu^2 m \quad (1.3)$$

В (1.3) параметр μ определяется из граничных условий на сферических частях границы пояса Γ_2 (фиг. 2).



Фиг. 1



Фиг. 2

Подставив (1.2) в (1.1) и учтя (1.3), для определения a и b получим следующую систему двух дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} a'' + \frac{2}{r} a' - \frac{3-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{1}{r^2} a + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\mu^2}{r} b' - \frac{3-4\nu}{1-2\nu} \frac{\mu^2}{r^2} b &= 0 \\ b'' + \frac{2}{r} b' + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\mu^2}{r^2} b + \frac{1}{1-2\nu} \frac{1}{r} a' + \frac{4(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{1}{r^2} a &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Система (1.4) принадлежит к типу уравнений Эйлера, и ее общее решение легко выписывается:

$$a(r) = -\frac{1}{4(1-2\nu)} \left\{ [(t^2 - 4t - 5) + 8\nu(t+1)] [r^{\frac{t+1}{2}} C_1 + r^{-\frac{t+3}{2}} C_2] + \right. \\ \left. + [(t^2 + 4t - 5) - 8\nu(t-1)] [r^{-\frac{t-1}{2}} C_3 + r^{\frac{t-3}{2}} C_4] \right\} \quad (1.5)$$

$$b(r) = -\frac{1}{2(1-2\nu)} \left\{ [(t+9) - 8\nu] r^{\frac{t+1}{2}} C_1 - [(t-5) + 8\nu] r^{-\frac{t+3}{2}} C_2 - \right. \\ \left. - [(t-9) + 8\nu] r^{-\frac{t-1}{2}} C_3 + [(t+5) - 8\nu] r^{\frac{t-3}{2}} C_4 \right\} \quad (t = \sqrt{1-4\mu^2})$$

Используя (1.5), легко находим формулы для u_r , u_α , $\tau_{r\alpha}$, σ_r , σ_α , σ_φ

$$u_r = -\frac{1}{4(1-2\nu)} \left\{ [(t^2 - 4t - 5) + 8\nu(t+1)] [r^{\frac{t+1}{2}} C_1 + r^{-\frac{t+3}{2}} C_2] + \right. \\ \left. + [(t^2 + 4t - 5) - 8\nu(t-1)] [r^{-\frac{t-1}{2}} C_3 + r^{\frac{t-3}{2}} C_4] \right\} m(\alpha) \quad (1.6)$$

$$u_\alpha = -\frac{1}{2(1-2\nu)} \left\{ [(t+9) - 8\nu] r^{\frac{t+1}{2}} C_1 - [(t-5) + 8\nu] r^{-\frac{t+3}{2}} C_2 - \right. \\ \left. - [(t-9) + 8\nu] r^{-\frac{t-1}{2}} C_3 + [(t+5) - 8\nu] r^{\frac{t-3}{2}} C_4 \right\} \operatorname{ch} \alpha \frac{dm(\alpha)}{d\alpha}$$

$$\tau_{r\alpha} = -\frac{E}{4(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ [(t^2 + 2t - 7) + 8\nu] r^{\frac{t-1}{2}} C_1 + (t+3) [(t-5) + 8\nu] r^{-\frac{t+5}{2}} C_2 + \right. \\ \left. + [(t^2 - 2t - 7) + 8\nu] r^{-\frac{t+1}{2}} C_3 + (t-3) [(t+5) - 8\nu] r^{\frac{t-5}{2}} C_4 \right\} \operatorname{ch} \alpha \frac{dm(\alpha)}{d\alpha} \quad (1.7)$$

$$\sigma_r = -\frac{E}{8(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ (t+1) [(t^2 - 4t - 5) - 8\nu] r^{\frac{t-1}{2}} C_1 - \right. \\ \left. - (t^2 + 4t + 3) [(t-5) + 8\nu] r^{-\frac{t+5}{2}} C_2 - \right. \\ \left. - (t-1) [(t^2 + 4t - 5) - 8\nu] r^{-\frac{t+1}{2}} C_3 + (t^2 - 4t + 3) [(t+5) - 8\nu] r^{\frac{t-5}{2}} C_4 \right\} m(\alpha) \\ \sigma_\alpha = \frac{E}{8(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ \left\langle (t+1) [(t^2 + 6t + 1) + 8\nu] r^{\frac{t-1}{2}} C_1 + (t+1)^2 \times \right. \right. \\ \left. \times [(-t+5) - 8\nu] r^{-\frac{t+5}{2}} C_2 - (t-1) [(t^2 - 6t + 1) + 8\nu] r^{-\frac{t+1}{2}} C_3 + (t-1)^2 \times \right. \\ \left. \times [(t+5) - 8\nu] r^{\frac{t-5}{2}} C_4 \right\rangle m(\alpha) - 2 \left\langle [(t+9) - 8\nu] r^{\frac{t-1}{2}} C_1 - [(t-5) + 8\nu] r^{-\frac{t+5}{2}} C_2 - \right. \\ \left. - [(t-9) + 8\nu] r^{-\frac{t+1}{2}} C_3 + [(t+5) - 8\nu] r^{\frac{t-5}{2}} C_4 \right\rangle \operatorname{sh} 2\alpha \frac{dm(\alpha)}{d\alpha} \right\} \quad (1.8)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E}{4(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ \left\langle (t+1) [(-t+5) + 4\nu t] r^{\frac{t-1}{2}} C_1 + (t+1) \times \right. \right. \\ \left. \times [(-t+5) - 8\nu] r^{-\frac{t+5}{2}} C_2 - (t-1) [(t+5) - 4\nu t] r^{-\frac{t+1}{2}} C_3 - \right. \\ \left. - (t-1) [(t+5) - 8\nu] r^{\frac{t-5}{2}} C_4 \right\rangle m(\alpha) + \\ + \left\langle [(t+9) - 8\nu] r^{\frac{t-1}{2}} C_1 - [(t-5) + 8\nu] r^{-\frac{t+5}{2}} C_2 - [(t-9) + 8\nu] r^{-\frac{t+1}{2}} C_3 + \right. \\ \left. + [(t+5) - 8\nu] r^{\frac{t-5}{2}} C_4 \right\rangle \operatorname{sh} 2\alpha \frac{dm(\alpha)}{d\alpha} \right\}$$

Величины C_i определяются из условия однородности, в силу которого:

$$\begin{aligned} \sigma_r|_{r=a} &= -(t+1)[(t^2-4t-5)-8v]a^{\frac{t-1}{2}}C_1 + (t^2+4t+3)[(t-5)+8v]a^{-\frac{t+5}{2}}C_2 + \\ &+ (t-1)[(t^2+4t-5)-8v]a^{-\frac{t+1}{2}}C_3 - (t^2-4t+3)[(t+5)-8v]a^{\frac{t-5}{2}}C_4 = 0 \\ \tau_{r\alpha}|_{r=a} &= [(t^2+2t-7)+8v]a^{\frac{t-1}{2}}C_1 + (t+3)[(t-5)+8v]a^{-\frac{t+5}{2}}C_2 + \\ &+ [(t^2-2t-7)+8v]a^{-\frac{t+1}{2}}C_3 + (t-3)[(t+5)-8v]a^{\frac{t-5}{2}}C_4 = 0 \\ \sigma_r|_{r=b} &= -(t+1)[(t^2-4t-5)-8v]b^{\frac{t-1}{2}}C_1 + (t^2+4t+3)[(t-5)+8v]b^{-\frac{t+5}{2}}C_2 + \\ &+ (t-1)[(t^2+4t-5)-8v]b^{-\frac{t+1}{2}}C_3 - (t^2-4t+3)[(t+5)-8v]b^{\frac{t-5}{2}}C_4 = 0 \\ \tau_{r\alpha}|_{r=b} &= [(t^2+2t-7)+8v]b^{\frac{t-1}{2}}C_1 + (t+3)[(t-5)+8v]b^{-\frac{t+5}{2}}C_2 + \\ &+ [(t^2-2t-7)+8v]b^{-\frac{t+1}{2}}C_3 + (t-3)[(t+5)-8v]b^{\frac{t-5}{2}}C_4 = 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Приравняв нулю детерминант системы (1.9), получим уравнение для $\beta = \frac{t}{2}$

$$\left(\frac{\lambda^\beta - \lambda^{-\beta}}{\lambda - \lambda^{-1}}\right)^2 = \beta^2 \frac{\beta^4 - \frac{5}{2}\beta^2 + \frac{73}{16} - 4v^2}{\beta^4 + \beta^2[4(1-v^2) - \frac{5}{2}] + \frac{9}{16}} \quad \left(\lambda = \frac{b}{a}\right) \quad (1.10)$$

Уравнение (1.10) впервые получено в работе [1]. Из системы (1.9) находим C_i

$$\begin{aligned} C_1 &= 2(t^2-9)[(t^2-25)+80v-64v^2]a^{-\frac{t+11}{2}}\{[t^3-7t+6]\lambda^{-3} - \\ &- [(t^3-2t^2-7t)+8vt]\lambda^{-5} - 2[(t^2+3)-4vt]\lambda^{-(t+3)}\} \\ C_2 &= 2(t-3)[(t+5)-8v]a^{\frac{t-7}{2}}\{[(t^5-10t^3+73t)-64v^2t]\lambda^{-1} - \\ &- (t^3-7t+6)[(t^2+2t-7)+8v]\lambda^{-3} + 2[(t^4-2t^3-4t^2-6t-21)+ \\ &+ 4v(t^3-7t+6)+32v^2t]\lambda^{t-3}\} \\ C_3 &= 2(t^2-9)[(t^2-25)+80v-64v^2]a^{\frac{t-11}{2}}\{-[t^3-7t-6]\lambda^{-3} + \\ &+ [(t^3+2t^2-7t)+8vt]\lambda^{-5} - 2[(t^2+3)+4vt]\lambda^{t-3}\} \\ C_4 &= -2(t+3)[(t-5)+8v]a^{-\frac{t+7}{2}}\{[(t^5-10t^3+73t)-64v^2t]\lambda^{-1} - \\ &- (t^3-7t-6)[(t^2-2t-7)+8v]\lambda^{-3} - 2[(t^4+2t^3-4t^2+6t-21) - \\ &- 4v(t^3-7t-6)-32v^2t]\lambda^{-(t+3)}\} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Уравнению (1.10) можно придать вид, более удобный для дальнейших исследований:

$$\left(\frac{\operatorname{sh} \gamma \beta}{\operatorname{sh} \gamma}\right)^2 = \beta^2 f(\beta); \quad \gamma = \ln \lambda, \quad f(\beta) = \frac{\beta^4 - \frac{5}{2}\beta^2 + \frac{73}{16} - 4v^2}{\beta^4 + \beta^2[4(1-v^2) - \frac{5}{2}] + \frac{9}{16}} \quad (1.12)$$

2. В этом параграфе будут исследованы корни уравнения (1.12). Во-первых, непосредственной проверкой легко убедиться, что (1.12) имеет три вещественных корня: $\beta = 0$, $\beta = \pm 1$. Нетрудно также установить, что других вещественных корней оно не имеет. В самом деле,

при $\beta > 0$ функция $(\operatorname{sh} \gamma \beta / \beta \operatorname{sh} \gamma)^2$ — монотонно возрастающая, а $f(\beta)$ — монотонно убывающая. Следовательно, при $\beta > 0$ может существовать не более одной точки пересечения их графиков. Таковой точкой является $\beta = 1$. Из четности уравнения (1.12) следует справедливость указанного утверждения.

Пусть теперь $\beta_k(\gamma)$ — какой-либо комплексный корень уравнения (1.12). Докажем, что $\beta_k \rightarrow \infty$ при $\gamma \rightarrow 0$.

Заметим, что при $\gamma \rightarrow 0$ комплексный корень β_k не может стремиться к нулю. Действительно, если бы это имело место, то тогда, очевидно,

$$\left(\frac{\operatorname{sh} \gamma \beta}{\beta \operatorname{sh} \gamma}\right)^2 \rightarrow 1, \quad f(\beta) \rightarrow \frac{7^3/16 - 4\nu^2}{9/16} \neq 1$$

Таким образом, при $\gamma \rightarrow 0$ можно выбрать последовательность β_k так, чтобы $\beta_k \rightarrow \beta^{(0)}$, отличному от нуля и бесконечности. Но тогда, в силу (1.12), при $\gamma \rightarrow 0$ будем иметь $f(\beta^{(0)}) = 1$, откуда следует, что $\beta^{(0)} = \pm 1$. Докажем, что и это невозможно. В самом деле, при $\gamma \rightarrow 0$ и $(\beta^{(0)})^2 \rightarrow 1$ будем иметь:

$$\left(\frac{\gamma \beta + 1/6 \gamma^3 \beta^3 + \dots}{\gamma + 1/6 \gamma^3 + \dots}\right)^2 = \beta^2 f(\beta), \quad \text{или} \quad \frac{1 + 1/3 \gamma^2 \beta^2 + \dots}{1 + 1/3 \gamma^2 + \dots} = f(\beta) \quad (2.1)$$

Из (2.1) получаем:

$$\frac{1/3 \gamma^2 (\beta^2 - 1) + \dots}{1 + 1/3 \gamma^2 + \dots} = \frac{-4(1 - \nu^2)(\beta^2 - 1)}{\beta^4 + \beta^2 [4(1 - \nu^2) - 5/2] + 9/16} \quad (2.2)$$

Сократив (2.2) на $(\beta^2 - 1)$ и устремив γ к нулю, получаем противоречие. Таким образом, доказано, что $\beta_k \rightarrow \infty$ при $\gamma \rightarrow 0$.

Выясним теперь характер стремления β_k к бесконечности при $\gamma \rightarrow 0$. Введем в рассмотрение величину $\gamma \beta_k$. При $\gamma \rightarrow 0$ возможны три случая:

$$1) \quad \gamma \beta_k \rightarrow \operatorname{const} < \infty; \quad 2) \quad \gamma \beta_k \rightarrow 0; \quad 3) \quad \gamma \beta_k \rightarrow \infty$$

Докажем, что третий случай приводит к противоречию. Так как $\beta_k \rightarrow \infty$ при $\gamma \rightarrow 0$, то $f(\beta_k) \rightarrow 1$. Из (1.12) тогда следует, что должно выполняться соотношение $\operatorname{sh}^2 \gamma \beta_k \sim (\gamma \beta_k)^2$, что невозможно при непрерывном изменении $\gamma \beta_k$.

Рассмотрим теперь первый случай. Обозначим конечный предел, к которому стремится $\gamma \beta_k$ при $\gamma \rightarrow 0$, через $m_{-1}^{(k)}$. Тогда легко видеть из (1.12), что $m_{-1}^{(k)}$ удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{sh}^2 m_{-1}^{(k)} - (m_{-1}^{(k)})^2 = 0 \quad (2.3)$$

и $\beta_k \rightarrow \infty$ как $m_{-1}^{(k)} / \gamma$. Важно отметить, что уравнение (2.3) фактически совпадает с уравнением, определяющим показатели краевых эффектов Сен-Венана в теории плит [2,3]. Уравнение (2.3) имеет счетное множество корней, поэтому отсюда следует, что уравнение (1.12) также имеет счетное множество корней, таких, как $\gamma \beta_k \rightarrow \operatorname{const}$. Легко получить уточненное значение указанных корней, если воспользоваться разложением

$$\beta_k = \frac{m_{-1}^{(k)}}{\gamma} + m_1^{(k)} \gamma + m_3^{(k)} \gamma^3 + \dots \quad (2.4)$$

При этом

$$m_1^{(k)} = \frac{1}{3} \frac{12(1-v^2) - (m_{-1}^{(k)})^2}{\operatorname{sh} 2m_{-1}^{(k)} - 2m_{-1}^{(k)}} \text{ и т. д.}$$

Приступим теперь к изучению корней второй группы: $\gamma\beta_k \rightarrow 0$ при $\gamma \rightarrow 0$. Обозначим $\gamma\beta_k$ через x_k .

Тогда уравнение (1.12) можно представить в виде

$$F(x_k, \gamma) = \gamma^2 \operatorname{sh}^2 x_k [x_k^4 + x_k^2 (\frac{3}{2} - 4v^2) \gamma^2 + \frac{9}{16} \gamma^4] - \operatorname{sh}^2 \gamma x_k^2 [x_k^4 - \frac{5}{2} x_k^2 \gamma^2 + (\frac{73}{16} - 4v^2) \gamma^4] = 0 \quad (2.5)$$

Для малых x_k и γ функцию $F(x_k, \gamma)$ можно разложить в ряд и придать уравнению (2.5) следующий вид:

$$\begin{aligned} & [x_k^6 + \frac{2}{15} x_k^8 + \frac{1}{105} x_k^{10} + \frac{1}{4725} x_k^{12} + \dots] + 3 [4(1-v^2) x_k^2 + \\ & + \frac{1}{6} (1-8v^2) x_k^4 + \frac{1}{45} (3-8v^2) x_k^6 + \frac{1}{630} (3-8v^2) x_k^8 + \\ & + \frac{1}{28350} x_k^{10} + \dots] \gamma^2 - 3 [4(1-v^2) - \frac{49}{48} x_k^2 + \frac{7}{360} x_k^4 - \frac{1}{560} x_k^6 - \\ & - \frac{1}{25200} x_k^8 + \dots] \gamma^4 - [(\frac{73}{16} - 4v^2) - \frac{1}{3} x_k^2 + \frac{1}{315} x_k^4 + \dots] \gamma^6 - \\ & - 3 [\frac{2}{45} (\frac{73}{16} - 4v^2) - \frac{1}{126} x_k^2 + \frac{1}{14175} x_k^4 + \dots] \gamma^8 + \dots = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Из (2.6) следует, что

$$\begin{aligned} x_k &= a_{-1}^{(k)} \gamma^{1/2} + a_1^{(k)} \gamma^{3/2} + a_3^{(k)} \gamma^{5/2} + \dots \\ \beta_k &= \frac{a_{-1}^{(k)}}{\gamma^{1/2}} + a_1^{(k)} \gamma^{1/2} + a_3^{(k)} \gamma^{3/2} + \dots \end{aligned} \quad (2.7)$$

при этом

$$\begin{aligned} (a_{-1}^{(k)})^4 + 12(1-v^2) &= 0, \quad a_1^{(k)} = \frac{1 + 24v^2 -}{40a_{-1}^{(k)}} \\ a_3^{(k)} &= -\frac{9927 - 464v^2 - 10688v^4}{22400 (a_{-1}^{(k)})^3} \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Из (2.8) видно, что вторая группа содержит лишь четыре корня. Весь вышеизложенный анализ показывает, что характеристическое уравнение (1.12) содержит три группы корней:

1. Корни, не зависящие от γ , а именно $\beta = 0$, $\beta = \pm 1$.
2. Четыре корня, растущие как $1/\sqrt{\gamma}$ при $\gamma \rightarrow 0$.
3. Счетное множество корней, растущих как $1/\gamma$ при $\gamma \rightarrow 0$.

3. Проанализируем теперь напряженное и деформированное состояние, соответствующее каждой из групп корней.

1-ая группа. Для корня $\beta = 0$ имеем

$$a(r) = (5-8v)[r^{1/2}C_1 + r^{-3/2}C_2] + [8(1-2v) + (5-8v)\ln r] r^{1/2}C_3 + [8(1-2v) - (5-8v)\ln r] r^{-3/2}C_4 \quad (3.1)$$

$$b(r) = -2\{(9-8v)r^{1/2}C_1 + (5-8v)r^{-3/2}C_2 + [2 + (9-8v)\ln r] r^{1/2}C_3 - [2 + (5-8v)\ln r] r^{-3/2}C_4\}$$

Подставив (3.1) в граничные условия $\sigma_r = \tau_{r\alpha} = 0$ при $r = a, b$, получим систему четырех уравнений для определения C_i . Вычисления показывают: $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$.

Для корней $\beta = \pm 1$

$$\begin{aligned} a(r) &= 3(3-8\nu)[r^{3/2}C_1 + r^{-5/2}C_2] - (7-8\nu)[r^{-1/2}C_3 + r^{-1/2} \ln r C_4] \\ b(r) &= -2 \{ (11-8\nu)r^{3/2}C_1 + (3-8\nu)r^{-5/2}C_2 + (7-8\nu)r^{-1/2}C_3 + \\ &\quad + [2 + (7-8\nu) \ln r] r^{-1/2}C_4 \} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Проделав такие же выкладки, как и в предыдущем случае, получаем $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$.

Итак, корни первой группы определяют напряженное состояние, тождественно равное нулю.

2-я группа. Уравнение для определения $m(\alpha)$ в данном случае имеет следующий вид:

$$\text{ch}^2 \alpha \, d^2 m / d\alpha^2 = \mu^2 m \quad (3.3)$$

где для μ , в силу (1.5), (1.10) и (2.7), имеем разложение

$$\mu = \frac{a_{-1}}{\sqrt{\gamma}} i \left\{ 1 + \frac{8a_{-1}a_1 - 1}{8a_{-1}^2} \gamma + \dots \right\} \quad (3.4)$$

Решение уравнения (3.3), вообще говоря, может быть записано через функции Лежандра. Однако для дальнейшего более удобно использовать приближенные методы. При этом [оказывается целесообразным рассмотреть отдельно два случая:

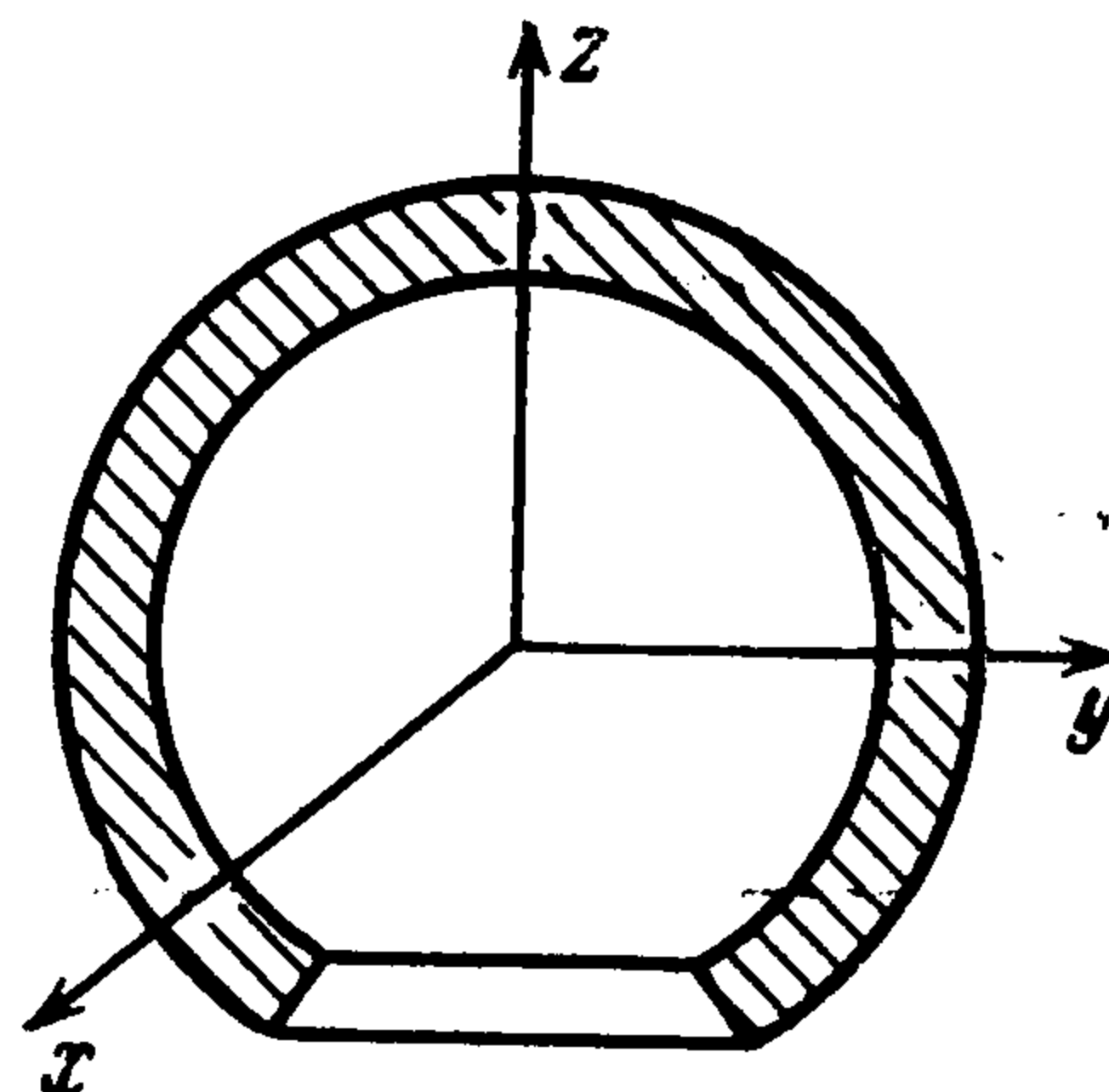
- 1) оболочка не содержит ни одного из полюсов $\vartheta = 0, \pi$;
- 2) оболочка содержит хотя бы один из этих полюсов.

В первом случае для приближенного интегрирования удобно использовать асимптотические методы, о чем подробно сказано в [1]. Приведем лишь окончательный результат.

$$\begin{aligned} m(\alpha) &= \exp \left\{ \text{arc tg} (\text{sh} \alpha) \frac{a_{-1}}{\sqrt{\gamma}} i + \frac{1}{2} \text{ch} \alpha + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8a_{-1}} \left[\text{arc tg} (\text{sh} \alpha) (8a_{-1}a_1 - 1)i - \left(\frac{\text{sh} 2\alpha}{2} + \alpha + \frac{\text{sh}^3 \alpha}{3} \right) \right] \sqrt{\gamma} + \dots \right\} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Из (3.5) следует, что при достаточно малом γ величина $m(\alpha)$ имеет характер краевого эффекта, изменяющегося как показательная функция с показателем $1/\sqrt{\gamma}$. Таким образом, вторая группа корней определяет краевые эффекты, свойственные по характеру убывания прикладной теории оболочек.

Рассмотрим теперь второй случай (фиг. 3). Здесь уже асимптотический метод интегрирования не может дать полного приближенного решения задачи ни при какой относительной толщине оболочки γ . Дело в том, что асимптотические приближения теряют точность в окрестности вершины $\vartheta = 0$. Отметим, что в данном случае необходимо отобрать лишь те из решений уравнения (3.3), которые остаются ограниченными при $\vartheta = 0$. Таких решений будет два. Указанные решения фактически построены в [1], где и даны приближенные методы их расчета. Приведем лишь окончательный результат. Обозначим решение, равное 1 при $\vartheta = 0$, через $m(\cos \vartheta)$.

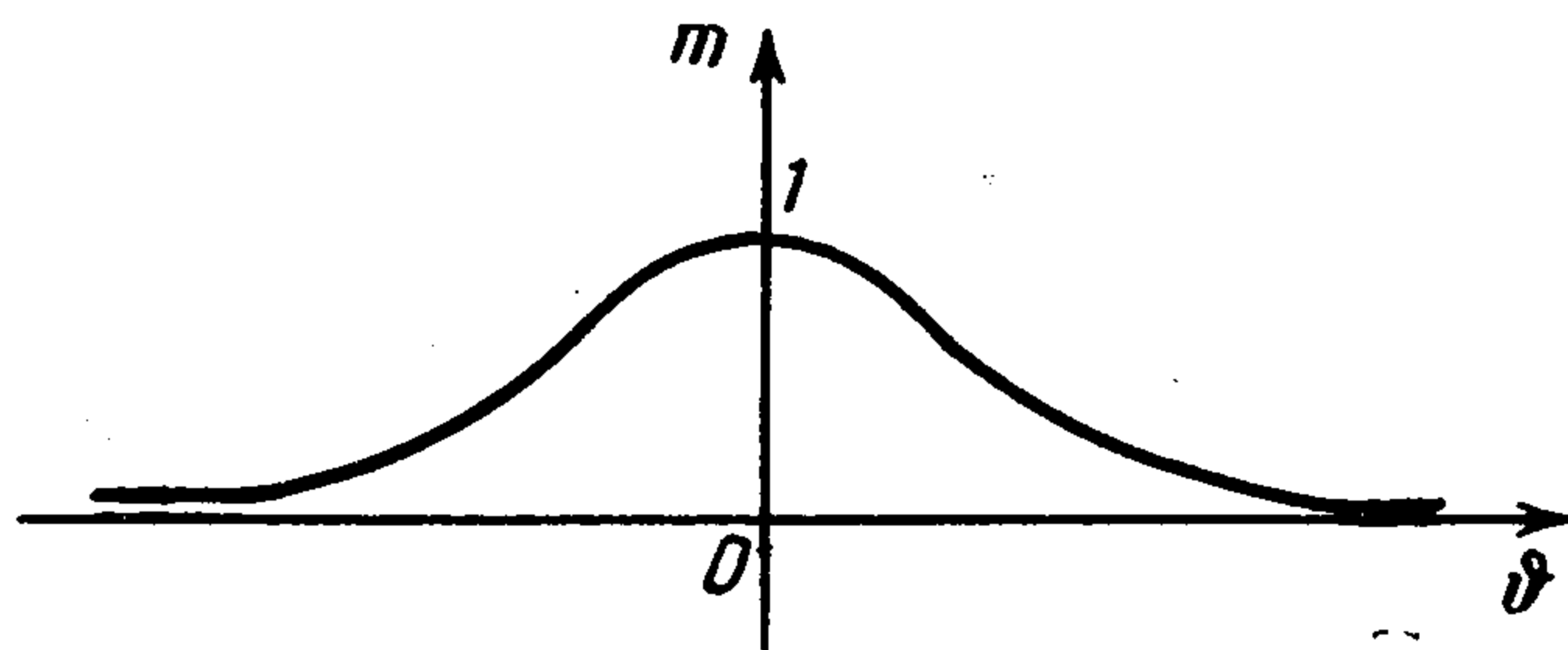


Фиг. 3

При малых ϑ имеем

$$m(\cos \vartheta) = J_0(\beta_k \vartheta) + [1/48 J_0(\beta_k \vartheta) - 1/48 J_2(\beta_k \vartheta)] \vartheta^2 + \dots \quad (3.6)$$

В связи с формулой (3.6) можно обратить внимание на одно важное



Фиг. 4

обстоятельство. В рассматриваемом случае m при малых γ ведет себя следующим образом. В районе $\vartheta = \vartheta_0$ она убывает и ведет себя как пограничный слой на большей части изменения ϑ . Но в окрестности $\vartheta = 0$ величина m снова начинает возрастать, и получаем как бы внутренний

краевой эффект в районе полюса $\vartheta = 0$ ($\alpha = \infty$) (фиг. 4).

Для корней второй группы формулы для вычисления напряжений и перемещений, если их представить рядами по степеням γ , имеют следующий вид: (3.7)

$$u_r^{(0)} = \frac{1}{1-2\nu} \left\{ 2a_{-1}^2 (1-\nu) \frac{1}{\sqrt{\gamma}} - \left\langle 3\nu(1-\nu^2)\zeta^2 + \nu[a_{-1}^2(1-\nu) + 12(1-\nu^2)]\zeta - \right. \right. \\ \left. \left. - \left[(16a_{-1}a_1 - 11 - 7a_{-1}^2) - \nu(16a_{-1}a_1 - 42 - 8a_{-1}^2) - 2\nu^2 \left(46 + \frac{a_{-1}^2}{2} \right) + 49\nu^3 \right] \right\rangle \sqrt{\gamma} + \dots \right\} m$$

$$u_\alpha^{(0)} = -\frac{1}{1-2\nu} \{ [a_{-1}^2(1-\nu)\zeta - 2(1-\nu^2)] \sqrt{\gamma} + \dots \} \operatorname{ch} \alpha \frac{dm}{d\alpha} \quad (3.8)$$

$$\tau_{r\alpha}^{(0)} = \frac{2G}{1-2\nu} a^{-1} \{ 3(1-\nu^2)(\zeta^2 - 1) \sqrt{\gamma} + \dots \} \operatorname{ch} \alpha \frac{dm}{d\alpha} \quad (3.9)$$

$$\sigma_r^{(0)} = \frac{2G}{1-2\nu} a^{-1} \{ 3(1-\nu^2)(\zeta^2 - 1) [1/6 \zeta^2 a_{-1}^2 - (1+\nu)] \sqrt{\gamma} + \dots \} m \quad (3.10)$$

$$\sigma_\alpha^{(0)} = -\frac{2G}{1-2\nu} a^{-1} \left\{ \left[12(1-\nu^2)\zeta \frac{1}{\sqrt{\gamma}} + \dots \right] m + \right. \\ \left. + \left\langle [a_{-1}^2(1-\nu)\zeta - 2(1-\nu^2)] \sqrt{\gamma} \right\rangle \frac{\operatorname{sh} 2\alpha}{2} \frac{dm}{d\alpha} \right\} \quad (3.11)$$

$$\sigma_\varphi^{(0)} = -\frac{2G}{1-2\nu} a^{-1} \left\{ \left\langle [12(1-\nu^2)\nu\zeta - 2a_{-1}^2(1-\nu^2)] \frac{1}{\sqrt{\gamma}} + \dots \right\rangle m - \right. \\ \left. - \left\langle [a_{-1}^2(1-\nu)\zeta - 2(1-\nu^2)] \sqrt{\gamma} + \dots \right\rangle \frac{\operatorname{sh} 2\alpha}{2} \frac{dm}{d\alpha} \right\} \quad (3.12)$$

Здесь ζ — текущая координата, отсчитываемая от срединной поверхности

$$r = 1/2 a [(1-\zeta) + (1+\zeta)e^\gamma] \quad (-1 \leq \zeta \leq 1) \quad (3.13)$$

Для разъяснения картины напряженного состояния, соответствующего данной группе корней, вычислим главные вектор и момент напряжений, действующих по сечению $\alpha = \text{const}$. На основе (1.12) легко устанавливается, что

$$P = \int_a^b \left(\sigma_\alpha \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha} + \tau_{r\alpha} \operatorname{th} \alpha \right) r dr = 0 \\ M = \int_a^b \sigma_\alpha r^2 dr \sim [(1-\nu^2) a_{-1} \gamma^{3/2} + \dots] \operatorname{sh} 2\alpha \frac{dm}{d\alpha}$$

Таким образом, напряженные состояния этой группы не дают главного вектора в проекции на ось симметрии, а главный момент на элементарных площадках сечения $\alpha = \text{const}$ имеет порядок малости γ .

3-я группа корней. Уравнение для определения $m(\alpha)$ также имеет вид (3.3), однако μ будет даваться формулой

$$\mu = \frac{m_{-1}}{\gamma} i \left\{ 1 + \frac{8m_{-1}m_1 - 1}{8m_{-1}^2} \gamma^2 + \dots \right\} \quad (3.14)$$

Все сказанное об интегрировании уравнения (3.3) для корней второй группы относится и к корням третьей группы. В данном случае

$$m(\alpha) = \exp \left\{ \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} \alpha) \frac{m_{-1}}{\gamma} i + \frac{1}{2} \operatorname{ch} \alpha + \right. \\ \left. + \frac{1}{8m_{-1}} \left[\operatorname{arc tg}(\operatorname{sh} \alpha) (8m_{-1}m_1 - 1) - \left(\frac{\operatorname{sh} 2\alpha}{2} + \alpha + \frac{\operatorname{sh}^3 \alpha}{3} \right) \right] \gamma + \dots \right\} \quad (3.15)$$

Из (3.15) видно, что при достаточно малых γ функция $m(\alpha)$ также имеет характер краевого эффекта, изменяющегося как показательная функция с показателем $1/\gamma$. Это обстоятельство и отличает краевые эффекты Сен-Венана от краевых эффектов прикладной теории оболочек.

В данном случае напряжения и перемещения также можно представить в виде разложений по степеням γ . Ниже в первом приближении отдельно выписываются разложения для корней β_k , вырождающихся при $\gamma \rightarrow 0$ в корни уравнений $\operatorname{sh} 2\omega_k - 2\omega_k = 0$ и в корни уравнения $\operatorname{sh} 2\delta_k + 2\delta_k = 0$. Они имеют следующий вид.

Для первого случая

$$u_{rk}^{(c)} = \frac{1}{1-2\nu} \{ [2(1-\nu) \operatorname{ch} \omega_k + \omega_k \operatorname{sh} \omega_k] \operatorname{ch} \omega_k \zeta - \zeta \omega_k \operatorname{ch} \omega_k \operatorname{sh} \omega_k \zeta \} m \quad (3.16)$$

$$u_{\alpha k}^{(c)} = \frac{-1}{2(1-2\nu)} \left\{ \left[(1-2\nu) \frac{\operatorname{ch} \omega_k}{\omega_k} - \operatorname{sh} \omega_k \right] \operatorname{sh} \omega_k \zeta + \zeta \operatorname{ch} \omega_k \operatorname{ch} \omega_k \zeta \right\} \gamma \operatorname{ch} \alpha \frac{dm}{d\alpha} \quad (3.17)$$

$$\tau_{rak}^{(c)} = \frac{2G}{1-2\nu} a^{-1} \{ [\operatorname{sh} \omega_k \operatorname{ch} \omega_k \zeta - \zeta \operatorname{ch} \omega_k \operatorname{sh} \omega_k \zeta] \omega_k \} \operatorname{ch} \alpha \frac{dm}{d\alpha} \quad (3.18)$$

$$\sigma_{rk}^{(c)} = -\frac{4G}{1-2\nu} a^{-1} \left\{ \left[\left(\frac{\operatorname{ch} \omega_k}{\omega_k} + \operatorname{sh} \omega_k \right) \operatorname{sh} \omega_k \zeta - \zeta \operatorname{ch} \omega_k \operatorname{ch} \omega_k \zeta \right] \omega_k^2 \right\} \frac{1}{\gamma} m \quad (3.19)$$

$$\sigma_{\alpha k}^{(c)} = \frac{4G}{1-2\nu} a^{-1} \left\{ \left[\left(\frac{\operatorname{ch} \omega_k}{\omega_k} - \operatorname{sh} \omega_k \right) \operatorname{sh} \omega_k \zeta + \zeta \operatorname{ch} \omega_k \operatorname{ch} \omega_k \zeta \right] \omega_k^2 \right\} \frac{1}{\gamma} m \quad (3.20)$$

$$\sigma_{\phi k}^{(c)} = \frac{8G}{1-2\nu} a^{-1} \nu \operatorname{ch} \omega_k \operatorname{sh} \omega_k \zeta \omega_k \frac{1}{\gamma} m \quad (3.21)$$

Для второго случая

$$u_{rk}^{*(c)} = \frac{1}{1-2\nu} \{ [2(1-\nu) \operatorname{sh} \delta_k + \delta_k \operatorname{ch} \delta_k] \operatorname{sh} \delta_k \zeta - \zeta \delta_k \operatorname{sh} \delta_k \operatorname{ch} \delta_k \zeta \} m \quad (3.22)$$

$$u_{\alpha k}^{*(c)} = -\frac{1}{2(1-2\nu)} \left\{ \left[(1-2\nu) \frac{\operatorname{sh} \delta_k}{\delta_k} - \operatorname{ch} \delta_k \right] \operatorname{ch} \delta_k \zeta + \zeta \operatorname{sh} \delta_k \operatorname{sh} \delta_k \zeta \right\} \gamma \operatorname{ch} \alpha \frac{dm}{d\alpha} \quad (3.23)$$

$$\tau_{rak}^{*(c)} = \frac{2G}{1-2\nu} a^{-1} \{ [\operatorname{ch} \delta_k \operatorname{sh} \delta_k \zeta - \zeta \operatorname{sh} \delta_k \operatorname{ch} \delta_k \zeta] \delta_k \} \operatorname{ch} \alpha \frac{dm}{d\alpha} \quad (3.24)$$

$$\sigma_{rk}^{*(c)} = -\frac{4G}{1-2\nu} a^{-1} \left\{ \left[\left(\frac{\operatorname{sh} \delta_k}{\delta_k} + \operatorname{ch} \delta_k \right) \operatorname{ch} \delta_k \zeta - \zeta \operatorname{sh} \delta_k \operatorname{sh} \delta_k \zeta \right] \delta_k^2 \right\} \frac{1}{\gamma} m \quad (3.25)$$

$$\sigma_{\alpha k}^{*(c)} = \frac{4G}{1-2\nu} a^{-1} \left\{ \left[\left(\frac{\operatorname{sh} \delta_k}{\delta_k} - \operatorname{ch} \delta_k \right) \operatorname{ch} \delta_k \zeta + \zeta \operatorname{sh} \delta_k \operatorname{sh} \delta_k \zeta \right] \delta_k^2 \right\} \frac{1}{\gamma} m \quad (3.26)$$

$$\sigma_{\phi k}^{*(c)} = \frac{8G}{1-2\nu} a^{-1} \nu \operatorname{sh} \delta_k \operatorname{ch} \delta_k \zeta \delta_k \frac{1}{\gamma} m \quad (3.27)$$

Видно, что в первом случае u_r является четной функцией ζ , а u_α — нечетной, что соответствует преимущественному изгибу оболочки. Во втором случае решения определяют преимущественно растяжение оболочки. Важно отметить, что при $\gamma \rightarrow 0$ краевые эффекты, создаваемые данной группой корней, полностью переходят в краевые эффекты Сен-Венана в теории плит.

Вычислим главные вектор и момент напряжений, действующих по сечению $\alpha = \text{const}$. В силу (1.12) получаем, что главный вектор не дает проекции на ось симметрии, а главный момент на элементарных площадках имеет порядок малости γ^2

$$M = \int_a^b \sigma_\alpha r^2 dr \sim \{(1 - \text{ch } m_{-1}) [\text{sh } m_{-1} - m_{-1}] \gamma^2 + \dots\} \left[4m(\alpha) - \frac{\text{sh } 2\alpha}{2} \gamma^2 \frac{dm(\alpha)}{d\alpha} \right]$$

Данную систему напряжений можно считать эквивалентной нулю с точностью до γ^2 . Таким образом, при помощи однородных решений, определяемых корнями второй и третьей групп, можно снимать напряжения, возникающие в оболочке под действием статически эквивалентных нулю усилий, приложенных по поверхностям $\alpha = \text{const}$. Если же по торцам оболочки действуют силы, главный вектор которых в проекции на ось симметрии отличен от нуля, то возникают напряжения, проникающие в глубь оболочки без затухания. Эти напряжения можно снять, используя решение задачи о растяжении оболочки сосредоточенными силами, приложенными в полюсах $\vartheta = 0, \vartheta = \pi$ [4, 5].

4. Рассмотрим построение прикладных теорий, предназначенных для снятия напряжений со сферических частей границы. Характерная черта этого подхода состоит в том, что соответствующие уравнения прикладной теории будут строиться для каждой рассматриваемой величины специальным образом. Проиллюстрируем построение такой теории для определения перемещений u_r и u_α точек срединной поверхности.

Рассмотрим случай, когда на сферических частях границы заданы усилия вида

$$\begin{aligned} \sigma_r &= K_1 P_n(\alpha), & \tau_{r\alpha} &= L_1 \text{ch } \alpha \frac{dP_n}{d\alpha} & \text{при } r &= a \\ \sigma_r &= K_2 P_n(\alpha), & \tau_{r\alpha} &= L_2 \text{ch } \alpha \frac{dP_n}{d\alpha} & \text{при } r &= b \end{aligned} \quad (4.1)$$

причем P_n удовлетворяет уравнению Лежандра

$$\text{ch}^2 \alpha \frac{d^2 P_n}{d\alpha^2} + n(n+1) P_n = 0 \quad (4.2)$$

В случае замкнутой сферической оболочки для перемещений имеем

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{2(1+\nu)}{E} \left\{ -\frac{(n^2 - n - 2) + 4\nu(n+1)}{4(1-\nu)(2n+3)} r^{n+1} C_1 + \frac{(n^2 + 3n) - 4\nu n}{4(1-\nu)(2n-1)} r^{-n} C_2 + \right. \\ &\quad \left. + nr^{n-1} C_3 - (n+1) r^{-(n+2)} C_4 \right\} P_n \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} u_\alpha &= \frac{2(1+\nu)}{E} \left\{ -\frac{(n+5) - 4\nu}{4(1-\nu)(2n+3)} r^{n+1} C_1 + \frac{(4-n) - 4\nu}{4(1-\nu)(2n-1)} r^{-n} C_2 + \right. \\ &\quad \left. + r^{n-1} C_3 + r^{-(n+2)} C_4 \right\} \text{ch } \alpha \frac{dP_n}{d\alpha} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Величины C_i находятся из граничных условий (4.1)

$$C_i = \Delta_i / \Delta \quad (4.5)$$

Все определители Δ и Δ_i разложим в ряды по степеням $\varepsilon = h/r_0$, где r_0 — радиус срединной поверхности оболочки, $2h$ — ее толщина,

$$\Delta = (1 - \nu^2) \varepsilon^2 + \frac{1}{8} \{[(n^2 + n) + 1]^2 - \nu^2 [4(n^2 + n) + 1]\} \varepsilon^4 + \dots \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 = & \frac{1}{2(2n+1)} r_0^{-n} \langle \{(K_2 - K_1)[(n+1) - \nu] + (L_2 - L_1)n(1 + \nu)\} \varepsilon + \\ & + \{(K_2 + K_1)[(2n+3) - \nu(n+3)] - (L_2 + L_1)n[(n^2 + 2n - 1) - \nu(n+3)]\} \varepsilon^2 + \\ & + \frac{1}{6} \{(K_2 - K_1)[(5n^3 + 8n^2 + 11n + 18) - \nu(7n^2 + 17n + 18)] - (L_2 - L_1)n[(2n^3 + \\ & + 11n^2 + 23n + 6) - \nu(7n^2 + 17n + 18)]\} \varepsilon^3 + \frac{1}{6} \{(K_2 + K_1)[(2n^4 + 12n^3 + \\ & + 17n^2 + 11n + 6) - \nu(5n^3 + 20n^2 + 17n + 6)] - (L_2 + L_1)n[(3n^4 + 11n^3 + 13n^2 + \\ & + 15n + 6) - \nu(5n^3 + 20n^2 + 17n + 6)]\} \varepsilon^4 + \dots \rangle \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 = & \frac{1}{2(2n+1)} r_0^{n+1} \langle \{(K_2 - K_1)(n + \nu) + (L_2 - L_1)(n+1)(1 + \nu)\} \varepsilon + \\ & + \{(K_2 + K_1)[(2n-1) - \nu(n-2)] - (L_2 + L_1)(n+1)[(n^2 - 2) + \nu(n-2)]\} \varepsilon^2 + \\ & + \frac{1}{6} \{(K_2 - K_1)[(5n^3 + 7n^2 + 10n - 10) + \nu(7n^2 - 3n + 8)] + (L_2 - L_1)(n+1)[(2n^3 - \\ & - 5n^2 + 7n + 8) + \nu(7n^2 - 3n + 8)]\} \varepsilon^3 + \frac{1}{6} \{(K_2 + K_1)[(-2n^4 + 4n^3 + 7n^2 + \\ & + 5n - 2) + \nu(-5n^3 + 5n^2 + 8n + 4)] - (L_2 + L_1)(n+1)[(3n^4 + n^3 - 2n^2 - \\ & - 10n - 4) + \nu(5n^3 - 5n^2 - 8n - 4)]\} \varepsilon^4 + \dots \rangle \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \Delta_3 = & \frac{1}{8(n-1)(2n-1)(2n+1)} r_0^{-n+4} \langle \{(K_2 - K_1)[(n^3 + n^2 - n + 1) - \nu(n^2 - 1) - 2\nu^2] + \\ & + (L_2 - L_1)(n+1)[(n^3 - n + 2) + \nu(n^2 - n) - 2\nu^2]\} \varepsilon + \{(K_2 + K_1)[(2n^3 + 3n^2 - 1) - \\ & - \nu(n^3 + 3n^2 - n - 3) - 2\nu^2(n+1)] - (L_2 + L_1)(n+1)[(n^4 + n^3 - 3n^2 - n - 2) - \\ & - \nu(n^3 + 2n^2 - 3n) + 2\nu^2(n+1)]\} \varepsilon^2 + \frac{1}{6} \{(K_2 - K_1)[(5n^5 + 20n^4 + 16n^3 + \\ & + 6n^2 + 21n - 20) - \nu(7n^4 + 25n^3 + 5n^2 - 25n - 12) - 2\nu^2(7n^2 + 21n - 4)] - \\ & - (L_2 - L_1)(n+1)[(2n^5 + 5n^4 - 4n^3 - 13n^2 - 46n + 8) - \nu(7n^4 + 18n^3 - 13n^2 - \\ & - 12n) + 2\nu^2(7n^2 + 21n - 4)]\} \varepsilon^3 + \frac{1}{6} \{(K_2 + K_1)[(2n^6 + 16n^5 + 43n^4 + \\ & + 25n^3 - 13n^2 - 5n + 4) - \nu(5n^5 + 28n^4 + 30n^3 - 40n^2 - 35n + 12) - \\ & - 2\nu^2(5n^3 + 22n^2 + 13n - 4)] - (L_2 + L_1)(n+1)[(3n^6 + 12n^5 - 8n^4 - \\ & - 42n^3 - 15n^2 - 30n + 8) - \nu(5n^5 + 23n^4 + 7n^3 - 47n^2 + 12n) + \\ & + 2\nu^2(5n^3 + 22n^2 + 13n - 4)]\} \varepsilon^4 + \dots \rangle \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \Delta_4 = & -\frac{1}{8(n+2)(2n+1)(2n+3)} r_0^{n+3} \langle \{(K_2 - K_1)[(-n^3 - 2n^2 + 2) - \nu(n^2 + 2n) - \\ & - 2\nu^2] - (L_2 - L_1)n[(n^2 + 3n + 4) + \nu(n^2 + 3n + 2) - 2\nu^2]\} \varepsilon - \{(K_2 + K_1)[(2n^3 + \\ & + 3n^2) - \nu(n^3 - 4n) - 2\nu^2n] - (L_2 + L_1)n[(n^4 + 3n^3 - 4n - 4) + \nu(n^3 + n^2 - \\ & - 4n - 4) - 2\nu^2n]\} \varepsilon^2 - \frac{1}{6} \{(K_2 - K_1)[(5n^5 + 5n^4 - 14n^3 - 28n^2 + 2n + \\ & + 36) + \nu(7n^4 + 3n^3 - 28n^2 - 12n) + 2\nu^2(7n^2 - 7n - 18)] - (L_2 - L_1)n[(-2n^5 - 5n^4 + \\ & + 4n^3 + 9n^2 + 42n + 48) - \nu(7n^4 + 10n^3 - 25n^2 - 40n - 12) + 2\nu^2(7n^2 - 7n - \\ & - 18)]\} \varepsilon^3 + \frac{1}{6} \{(K_2 + K_1)[(2n^6 - 4n^5 - 7n^4 + 27n^3 + 40n^2 + 8n) + \\ & + \nu(5n^5 - 3n^4 - 32n^3 + 12n^2 + 48n) + 2\nu^2(5n^3 - 7n^2 - 16n)] + \\ & + (L_2 + L_1)n[(3n^6 + 6n^5 - 23n^4 - 50n^3 - 12n^2 + 52n + 48) + \\ & + \nu(5n^5 + 2n^4 - 35n^3 - 20n^2 + 60n + 48) - 2\nu^2(5n^3 - 7n^2 - 16n)]\} \varepsilon^4 + \dots \rangle \end{aligned} \quad (4.10)$$

Подставив (4.5) в (4.3) и (4.4), получим

$$\Delta u_r = \frac{2(1 + \nu)}{E} \left\{ -\frac{(n^2 - n - 2) + 4\nu(n+1)}{4(1 - \nu)(2n+3)} r^{n+1} \Delta_1 + \frac{(n^2 + 3n) - 4\nu n}{4(1 - \nu)(2n-1)} r^{-n} \Delta_2 + \right. \\ \left. + nr^{n-1} \Delta_3 - (n+1) r^{-(n+2)} \Delta_4 \right\} P_n \quad (4.11)$$

$$\Delta u_\alpha = \frac{2(1 + \nu)}{E} \left\{ -\frac{(n+5) - 4\nu}{4(1 - \nu)(2n+3)} r^{n+1} \Delta_1 + \frac{(4-n) - 4\nu}{4(1 - \nu)(2n-1)} r^{-n} \Delta_2 + \right. \\ \left. + r^{n-1} \Delta_3 + r^{-(n+2)} \Delta_4 \right\} \operatorname{ch} \alpha \frac{dP_n}{d\alpha} \quad (4.12)$$

Соотношения (4.11) и (4.12) можно использовать для построения приближенных теорий, предназначенных для снятия напряжений с Γ_2 . Эти соотношения показывают, что u_r и u_α получились такими, как если бы они удовлетворяли следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 & -4 \left(\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} + 2 \right) \left\langle (1 - \nu^2) \varepsilon^2 + \frac{1}{3} \left\{ \left[\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \left(\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \right) - \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - 2 \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} + 1 \right] + \nu^2 \left[4 \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} - 1 \right] \right\} \varepsilon^4 + \dots \right\rangle \frac{E}{1 + \nu} \frac{1}{r_0} u_r = \\
 = & \left\langle \left\langle 2 \left\langle - \left[\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} + 1 - \nu \right] (K_2 - K_1) - \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} (1 - \nu^2) (L_2 - L_1) \right\rangle \varepsilon + \right. \right. \\
 & + 2 \left\langle \left[-2 \left(\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} + 1 \right) + 3\nu \left(\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} + 2 \right) - \nu^2 \left(\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} + 4 \right) \right] \times \right. \\
 & \times (K_2 + K_1) - 2 \left\{ \left[\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \left(\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \right) + 4 \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \right] - \nu \left[\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \times \right. \right. \\
 & \left. \left. \times \left(\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \right) + 2 \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \right] - 2\nu^2 \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \right\} (L_2 + L_1) \right\rangle \varepsilon^2 + \\
 & + \frac{1}{6} \left\langle \left\{ 2 \left[8 \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \left(\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \right) + \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} - 6 \right] - 2\nu \left[5 \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \times \right. \right. \right. \\
 & \times \left(\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \right) - 8 \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} - 36 \right] - 6\nu^2 \left[\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} + 10 \right] \left\} (K_2 - K_1) - \right. \\
 & - \left\{ 4 \left[\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \left(\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \right) + 14 \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \right] - 30\nu \left[\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \left(\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + 2 \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \right] + 2\nu^2 \left[7 \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \left(\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \right) - 10 \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \right] \right\} (L_2 - L_1) \right\rangle \varepsilon^3 + \\
 & + \frac{1}{6} \left\langle \left\{ 4 \left[7 \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \left(\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \right) + 4 \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} - 2 \right] - \right. \right. \\
 & - 4\nu \left[7 \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \left(\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \right) + 11 \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} - 6 \right] + 2\nu^2 \left[5 \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \left(\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \right) + \right. \\
 & \left. \left. + 24 \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} - 8 \right] \right\} (K_2 + K_1) - \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \left\{ 4 \left[-2 \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \left(\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \right) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - 9 \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} + 8 \right] + 6\nu \left[\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \left(\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \right) - 2 \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} - 8 \right] + \right. \\
 & \left. \left. + 4\nu^2 \left[5 \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} - 8 \right] \right\} (L_2 + L_1) \right\rangle \varepsilon^4 + \dots \right\rangle P_n \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -4 \left[\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} + 2 \right] \left\langle (1 - \nu^2) \varepsilon^2 + \frac{1}{3} \left\{ \left[\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \left(\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \right) - \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - 2 \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} + 1 \right] + \nu^2 \left[4 \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} - 1 \right] \right\} \varepsilon^4 + \dots \right\rangle \frac{E}{1 + \nu} \frac{1}{r_0} u_\alpha = \\
 = & \left\langle \left\langle \left\{ 2(1 - \nu^2) (K_2 - K_1) + 4(1 - \nu^2) (L_2 - L_1) \right\} \varepsilon + \left\{ 4(1 - \nu^2) (K_2 + K_1) - \right. \right. \right. \\
 & - 2 \left[\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} + 6 \right] (1 - \nu^2) (L_2 + L_1) \left\} \varepsilon^2 + \frac{1}{3} \left\langle \left\{ -2 \left(5 \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} - 2 \right) + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + 3\nu \left(\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} + 2 \right) + \nu^2 \left(7 \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} - 10 \right) \right\} (K_2 - K_1) + \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \left\{ \left[\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \left(\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \right) + 20 \right] - \nu \left[\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \left(\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \right) + 2 \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \right] + \right. \\
& \quad \left. + 2\nu^2 \left[\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} - 10 \right] \right\} (L_2 - L_1) \rangle \varepsilon^3 + 1/6 \langle \left\{ -2 \left[19 \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} + 2 \right] + \right. \\
& \quad \left. + 2\nu \left[2 \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \left(\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \right) + 13 \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} + 18 \right] + 4\nu^2 \left[5 \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} - 8 \right] \right\} \times \\
& \quad \times (K_2 + K_1) + \left\{ -48 \left[\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} - 1 \right] - 2\nu \left[\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \left(\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 2 \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \right] - 2\nu^2 \left[5 \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \left(\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \right) + 34 \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} - 24 \right] \right\} \times \\
& \quad \times (L_2 + L_1) \rangle \varepsilon^4 + \dots \rangle \rangle \operatorname{ch} \alpha \frac{dP_n}{d\alpha} \quad (4.14)
\end{aligned}$$

Таким путем можно получить прикладные теории, имеющие погрешность произвольного порядка малости относительно ε . Если u_r и u_α рассматриваются не на срединной поверхности, а в каком-нибудь произвольном слое, то в формулы (4.11), (4.12) следует подставить соответствующее значение r , и тогда получим новые уравнения, предназначенные для приближенного определения u_r и u_α . Не трудно получить уравнения для любой характеристики напряженного состояния оболочки.

5. Рассмотрим, в какой мере существующие прикладные теории расчета сферических оболочек соответствуют результатам, полученным выше. В первую очередь займемся краевыми эффектами. Для примера проанализируем теорию В. З. Власова [6], которая для прогиба дает уравнение

$$\left\{ (\nabla^2 + 1)^2 + \frac{12(1-\nu^2)R^2}{h^2} \right\} w = 0 \quad \left(\nabla^2 = \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \right) \quad (5.1)$$

где h — толщина оболочки. Уравнению (5.1) можно придать следующий вид:

$$(\nabla^2 - \mu_1^2) (\nabla^2 - \mu_2^2) w = 0 \quad (5.2)$$

где

$$\begin{aligned}
\mu_1 = -1 + \left(-\frac{12(1-\nu^2)R^2}{h^2} \right)^{1/2} &= \frac{1}{\gamma} \sqrt{-12(1-\nu^2)} - \\
& - [1 + 1/2 \sqrt{-12(1-\nu^2)}] + 1/12 \sqrt{-12(1-\nu^2)} \gamma + \dots \quad (5.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_2 = -1 - \left(-\frac{12(1-\nu^2)R^2}{h^2} \right)^{1/2} &= -\frac{1}{\gamma} \sqrt{-12(1-\nu^2)} - \\
& - [1 - 1/2 \sqrt{-12(1-\nu^2)}] - 1/12 \sqrt{-12(1-\nu^2)} \gamma + \dots
\end{aligned}$$

Асимптотически интегрируя уравнение (5.2), находим, что его решение имеет вид

$$\begin{aligned}
w = \exp \left\{ \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\operatorname{sh} \alpha) \frac{a_{-1}}{\sqrt{\gamma}} i + 1/2 \operatorname{ch} \alpha + \right. \\
\left. + \frac{1}{8a_{-1}} \left[-2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\operatorname{sh} \alpha) (a_{-1}^2 + 2) - \left(\frac{\operatorname{sh} 2\alpha}{2} + \alpha + \frac{\operatorname{sh}^3 \alpha}{3} \right) \right] \sqrt{\gamma} + \dots \right\} \quad (5.4)
\end{aligned}$$

Из сравнения результатов видим, что теория В. З. Власова, как и следовало ожидать, дает уже неправильно члены порядка $\gamma^{1/2}$ в разложении показателя краевого эффекта. Не вдаваясь в подробности, отметим, что такие же выводы можно сделать относительно каждой из существующих прикладных теорий, основанных на гипотезах Кирхгоффа. Перейдем теперь к анализу точности прикладных теорий, если их рассматривать как средство снятия напряжений со сферической части границы.

По теории В. З. Власова, уравнения для определения u_r и u_α имеют такой вид:

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} + 2 \right] + \frac{1}{3(1-\nu^2)} \left(\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} + 1 \right)^2 \left(\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} + 2 \right) \varepsilon^2 + \dots \right\} u_r = \\ & = \frac{r_0}{2E} \left\langle \left\{ (1+\nu) \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} L + \left(\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} + 1 - \nu \right) K \right\} \frac{1}{\varepsilon} - \right. \\ & \quad \left. - \left\{ \frac{1}{3} \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \left(\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \right) L \right\} \varepsilon \right\rangle P_n \\ & \times \left\{ -(1+\nu) \left(\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} + 2 \right) + \frac{1}{3} \left[\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \left(\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} + 2 \right) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{1-\nu^2} \left(\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} + 1 \right)^2 \left(\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} + 2 \right) \right] \varepsilon^2 - \frac{1}{3(1-\nu)} \left(\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} + 1 \right)^2 \times \right. \\ & \quad \left. \times \left(\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} + 2 \right) \varepsilon^4 \right\} u_\alpha = \frac{r_0}{2E} \left\langle \left\{ 2(1+\nu) \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} L + (1+\nu) \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} K \right\} \frac{1}{\varepsilon} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{3} \left\{ \left[2\nu \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \left(\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \right) + (6-\nu) \nu \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} + 2\nu^2 \right] K + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left[\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \left(\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \right) - (1-\nu) \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} - 2(1-\nu) \right] L \right\} \varepsilon - \frac{1}{3} \left\{ \left[\left(\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} + \right. \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. + 1 - \nu \right) \left(\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} + 2 \right) - 2 \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \right] \operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \left(\operatorname{ch}^2 \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \right) L \right\} \varepsilon^3 \right\rangle \operatorname{ch} \alpha \frac{dP_n}{d\alpha} \end{aligned}$$

Сравнивая эти соотношения с точными разложениями (4.13), (4.14), видим, что совпадают только первые члены.

6. Рассмотрим теперь подробнее вопрос о полном снятии напряжений с торцевых частей Γ_1 границы. Вначале предположим, что срединная поверхность представляет собой сферу с одним круговым отверстием (фиг. 3). Пусть при $\alpha = \alpha_1$ задана система напряжений

$$\sigma_\alpha = f_1(r), \quad \tau_{r\alpha} = f_2(r) \quad (6.1)$$

причем выполнено условие равновесия

$$\int_a^b \left[f_1(r) \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha} + f_2(r) \operatorname{th} \alpha \right] r dr = 0 \quad (6.2)$$

Используем принцип возможных перемещений Лагранжа, отыскивая решение в виде

$$\begin{aligned} u_r &= \sum_{k=1}^2 A_k u_{rk}^{(0)} + \sum_{i=1}^{\infty} B_i u_{ri}^{(c)} + \sum_{i=1}^{\infty} D_i u_{ri}^{*(c)} \\ u_\alpha &= \sum_{k=1}^2 A_k u_{\alpha k}^{(0)} + \sum_{i=1}^{\infty} B_i u_{\alpha i}^{(c)} + \sum_{i=1}^{\infty} D_i u_{\alpha i}^{*(c)} \\ \tau_{r\alpha} &= \sum_{k=1}^2 A_k \tau_{r\alpha k}^{(0)} + \sum_{i=1}^{\infty} B_i \tau_{r\alpha i}^{(c)} + \sum_{i=1}^{\infty} D_i \tau_{r\alpha i}^{*(c)} \\ \sigma_r &= \sum_{k=1}^2 A_k \sigma_{rk}^{(0)} + \sum_{i=1}^{\infty} B_i \sigma_{ri}^{(c)} + \sum_{i=1}^{\infty} D_i \sigma_{ri}^{*(c)} \\ \sigma_\alpha &= \sum_{k=1}^2 A_k \sigma_{\alpha k}^{(0)} + \sum_{i=1}^{\infty} B_i \sigma_{\alpha i}^{(c)} + \sum_{i=1}^{\infty} D_i \sigma_{\alpha i}^{*(c)} \\ \sigma_\varphi &= \sum_{k=1}^2 A_k \sigma_{\varphi k}^{(0)} + \sum_{i=1}^{\infty} B_i \sigma_{\varphi i}^{(c)} + \sum_{i=1}^{\infty} D_i \sigma_{\varphi i}^{*(c)} \end{aligned} \quad (6.3)$$

где $u_{rk}^{(0)}$, $u_{\alpha k}^{(0)}$, $\tau_{rak}^{(0)}$, $\sigma_{rk}^{(0)}$, $\sigma_{\alpha k}^{(0)}$, $\sigma_{\phi k}^{(0)}$ даются формулами (3.7)—(3.12); $u_{ri}^{(c)}$, $u_{\alpha i}^{(c)}$, $\sigma_{ri}^{(c)}$, $\tau_{rai}^{(c)}$, $\sigma_{\alpha i}^{(c)}$, $\sigma_{\phi i}^{(c)}$ — формулами (3.16)—(3.21); $u_{ri}^{*(c)}$, $u_{\alpha i}^{*(c)}$, $\tau_{rai}^{*(c)}$, $\sigma_{ri}^{*(c)}$, $\sigma_{\alpha i}^{*(c)}$, $\sigma_{\phi i}^{*(c)}$ — формулами (3.22)—(3.27).

В качестве обобщенных параметров примем коэффициенты A_k , B_i , D_i . Поскольку однородные решения точно удовлетворяют уравнениям равновесия¹ и граничным условиям на Γ_2 , принцип возможных перемещений принимает следующую форму:

$$\int_a^b (\sigma_{\alpha} \delta u_{\alpha} + \tau_{r\alpha} \delta u_r) r dr = \int_a^b [f_1(r) \delta u_{\alpha} + f_2(r) \delta u_r] r dr \quad (6.4)$$

Выразив вариации перемещений через δA_k , δB_i , δD_i , произведя соответствующее интегрирование и приравняв нулю коэффициенты при независимых вариациях, получим следующие системы:

$$\sum_{k=1}^2 m_{jk} A_k + \sum_{i=1}^{\infty} n_{ji} B_i + \sum_{i=1}^{\infty} p_{ji} D_i = c_j \quad (j=1, 2) \quad (6.5)$$

$$\sum_{k=1}^2 r_{tk} A_k + \sum_{i=1}^{\infty} g_{ti} B_i + \sum_{i=1}^{\infty} h_{ti} D_i = d_t \quad (t=1, 2, 3, \dots, \infty) \quad (6.6)$$

$$\sum_{k=1}^2 a_{lk} A_k + \sum_{i=1}^{\infty} b_{li} B_i + \sum_{i=1}^{\infty} q_{li} D_i = s_l \quad (l=1, 2, 3, \dots, \infty) \quad (6.7)$$

где

$$\begin{aligned} m_{jk} &= \int_a^b [\sigma_{\alpha k}^{(0)} u_{\alpha j}^{(0)} + \tau_{rak}^{(0)} u_{rj}^{(0)}] r dr, & n_{ji} &= \int_a^b [\sigma_{\alpha i}^{(c)} u_{\alpha j}^{(0)} + \tau_{rai}^{(c)} u_{rj}^{(0)}] r dr \\ p_{ji} &= \int_a^b [\sigma_{\alpha i}^{*(c)} u_{\alpha j}^{(0)} + \tau_{rai}^{*(c)} u_{rj}^{(0)}] r dr, & r_{tk} &= \int_a^b [\sigma_{\alpha k}^{(0)} u_{\alpha t}^{(c)} + \tau_{rak}^{(0)} u_{rt}^{(c)}] r dr \\ g_{ti} &= \int_a^b [\sigma_{\alpha i}^{(c)} u_{\alpha t}^{(c)} + \tau_{rai}^{(c)} u_{rt}^{(c)}] r dr, & h_{ti} &= \int_a^b [\sigma_{\alpha i}^{*(c)} u_{\alpha t}^{(c)} + \tau_{rai}^{*(c)} u_{rt}^{(c)}] r dr \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$a_{lk} = \int_a^b [\sigma_{\alpha k}^{(0)} u_{\alpha l}^{*(c)} + \tau_{rak}^{(0)} u_{rl}^{*(c)}] r dr$$

$$b_{li} = \int_a^b [\sigma_{\alpha i}^{(c)} u_{\alpha l}^{*(c)} + \tau_{rai}^{(c)} u_{rl}^{*(c)}] r dr$$

$$q_{li} = \int_a^b [\sigma_{\alpha i}^{*(c)} u_{\alpha l}^{*(c)} + \tau_{rai}^{*(c)} u_{rl}^{*(c)}] r dr, \quad c_j = \int_a^b [f_1(r) u_{\alpha j}^{(0)} + f_2(r) u_{rj}^{(0)}] r dr$$

$$d_t = \int_a^b [f_1(r) u_{\alpha t}^{(c)} + f_2(r) u_{rt}^{(c)}] r dr, \quad s_l = \int_a^b [f_1(r) u_{\alpha l}^{*(c)} + f_2(r) u_{rl}^{*(c)}] r dr$$

В системе (6.5) — (6.7) уравнение (6.5) соответствует δA_k , (6.6) — δB_i , (6.7) — δD_i .] Определив из этой системы все коэффициенты A_k , B_i , D_i , получим решение поставленной задачи.

7. Можно показать, что система (6.5) — (6.7) относится к числу положительно определенных в пространстве энергий H_0 и поэтому всегда разрешима при физически осмысленных условиях, наложенных на f_1 , f_2 . Исследуем структуру рассматриваемой системы при стремлении параметра тонкостенности γ к нулю.

Прежде всего уточним предположение относительно внешней нагрузки. Поскольку напряжения σ_α и $\tau_{r\alpha}$, соответствующие корням второй группы, имеют различный порядок относительно γ ($\sigma_\alpha \sim 1/\sqrt{\gamma}$, $\tau_{r\alpha} \sim 1$), естественно принять, что $f_2(r)$ также должна иметь на $\sqrt{\gamma}$ больший порядок, чем $f_1(r)$. Именно этот случай будет рассмотрен ниже.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f_1(\zeta) u_{\alpha k}^{(0)} d\zeta &= F_k \gamma, & \int_{-1}^1 f_2(\zeta) u_{rk}^{(0)} d\zeta &= G_k \gamma \\ \int_{-1}^1 f_1(\zeta) u_{\alpha i}^{(c)} d\zeta &= N_i \gamma, & \int_{-1}^1 f_2(\zeta) u_{ri}^{(c)} d\zeta &= M_i \gamma \\ \int_{-1}^1 f_1(\zeta) u_{\alpha i}^{*(c)} d\zeta &= P_i \gamma, & \int_{-1}^1 f_2(\zeta) u_{ri}^{*(c)} d\zeta &= Q_i \gamma \end{aligned} \quad (7.1)$$

Пусть все эти характеристики представимы в виде рядов по степеням γ . В соответствии с принятым предположением относительно внешней нагрузки, имеем разложения

$$F_k = F_{k0} + F_{k1} \sqrt{\gamma} + F_{k2} \gamma + \dots \quad \text{для } F_k, N_i, P_i \quad (7.2)$$

$$G_k = G_{k1} \sqrt{\gamma} + G_{k2} \gamma + \dots \quad \text{для } G_k, M_i, Q_i \quad (7.3)$$

При $\alpha = \alpha_1$ величины $m(\alpha)$ и $dm(\alpha)/d\alpha$ разлагаются следующим образом: $m(\alpha_1) = 1$ для второй и третьей групп, для корней второй группы

$$\begin{aligned} \frac{dm}{d\alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_1} &= \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha_1} \frac{a_{-1}}{\sqrt{\gamma}} i + \frac{1}{2} \operatorname{sh} \alpha_1 - \\ &- \frac{1}{8a_{-1}} i [(1 - 8a_{-1}a_1) - (\operatorname{ch} 2\alpha_1 + 1 + \operatorname{sh}^2 \alpha_1 \operatorname{ch} \alpha_1)] \sqrt{\gamma} + \dots \end{aligned} \quad (7.4)$$

для корней третьей группы

$$\begin{aligned} \frac{dm}{d\alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_1} &= \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha_1} \frac{m_{-1}}{\gamma} i + \frac{1}{2} \operatorname{sh} \alpha_1 - \\ &- \frac{1}{8m_{-1}} i [(1 - 8m_{-1}m_1) - (\operatorname{ch} 2\alpha_1 + 1 + \operatorname{sh}^2 \alpha_1 \operatorname{ch} \alpha_1)] \gamma + \dots \end{aligned} \quad (7.5)$$

Коэффициенты системы ищем в виде

$$\begin{aligned} A_k &= A_{k0} + A_{k1} \sqrt{\gamma} + A_{k2} \gamma + \dots \\ B_i &= B_{i0} + B_{i1} \sqrt{\gamma} + B_{i2} \gamma + \dots \\ D_i &= D_{i0} + D_{i1} \sqrt{\gamma} + D_{i2} \gamma + \dots \end{aligned} \quad (7.6)$$

Подставляя (7.4), (7.5), (7.6) в (6.5) — (6.7) и раскрывая (6.8), получим

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^2 \left\{ \frac{16G}{(1-2\nu)^2} a \sqrt{-1} (1-\nu^2) (1-\nu) (a_{-1}^{(j)})^2 \times \right. \\ & \quad \left. \times [a_{-1}^{(j)} - (a_{-1}^{(k)})] \sqrt{\gamma} (A_{k0} + A_{k1} \sqrt{\gamma} + \dots) \right\} + \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ -\frac{48G}{(1-2\nu)^2} a \sqrt{-1} (1-\nu^2) \nu \frac{\text{sh}^2 \omega_i}{\omega_i} \sqrt{\gamma} (B_{i0} + B_{i1} \sqrt{\gamma} + B_{i2} \gamma + \dots) \right\} + \\ & \quad + \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ -\frac{8G}{(1-2\nu)^2} a \sqrt{-1} (1-\nu^2) \nu \text{sh} \alpha_1 \times \right. \\ & \quad \left. \times \frac{[\text{sh}^2 \delta_i]}{\delta_i} a_{-1}^{(j)} (D_{i0} + D_{i1} \sqrt{\gamma} + D_{i2} \gamma + \dots) \gamma \right\} + \dots = (F_j + G_j) \gamma \quad (j=1, 2) \quad (7.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^2 \left\{ -\frac{48G}{(1-2\nu)^2} a \sqrt{-1} (1-\nu^2) \nu \frac{\text{sh}^2 \omega_t}{\omega_t} \sqrt{\gamma} (A_{k0} + A_{k1} \sqrt{\gamma} + A_{k2} \gamma + \dots) \right\} + \\ & \quad + \left\{ -\frac{4G}{(1-2\nu)} a \sqrt{-1} \sum_{i=1, i \neq t}^{\infty} \frac{\omega_i^2 \omega_t^2 (\text{ch}^2 \omega_i - \text{ch}^2 \omega_t)}{(\omega_i^2 - \omega_t^2)^2 (\omega_i - \omega_t)} \times \right. \\ & \quad \left. \times \left[\frac{2\nu}{1-2\nu} (\omega_i^2 + \omega_t^2) + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \omega_i \omega_t \right] (B_{i0} + B_{i1} \sqrt{\gamma} + B_{i2} \gamma + \dots) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{2G}{(1-2\nu)^2} a \sqrt{-1} \omega_t^3 \left(\frac{2}{3} \text{ch}^2 \omega_t - 1 \right) (B_{t0} + B_{t1} \sqrt{\gamma} + B_{t2} \gamma + \dots) \right\} + \dots \\ & \quad \dots = N_t \gamma + M_t \gamma^{3/2} + \dots \quad (t=1, 2, 3, \dots, \infty) \quad (7.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^2 \left\{ -\frac{8G}{(1-2\nu)^2} a \sqrt{-1} (1-\nu^2) \nu \text{sh} \alpha_1 \frac{\text{sh}^2 \delta_l}{\delta_l} a_{-1}^{(k)} (A_{k0} + A_{k1} \sqrt{\gamma} + A_{k2} \gamma + \dots) \right\} + \\ & \quad + \left\{ -\frac{4G}{(1-2\nu)} a \sqrt{-1} \sum_{i=1, i \neq l}^{\infty} \frac{\delta_i^2 \delta_l^2 (\text{sh}^2 \delta_i - \text{sh}^2 \delta_l)}{(\delta_i^2 - \delta_l^2)^2 (\delta_i - \delta_l)} \times \right. \\ & \quad \left. \times \left[\frac{2\nu}{1-2\nu} (\delta_i^2 + \delta_l^2) + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \delta_i \delta_l \right] (D_{i0} + D_{i1} \sqrt{\gamma} + D_{i2} \gamma + \dots) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{2G}{(1-2\nu)^2} a \sqrt{-1} \delta_l^3 \left(\frac{2}{3} \text{sh}^2 \delta_l + 1 \right) (D_{l0} + D_{l1} \sqrt{\gamma} + D_{l2} \gamma + \dots) \right\} = \\ & \quad = P_l \gamma + Q_l \gamma^{3/2} + \dots \quad (l=1, 2, 3, \dots, \infty) \quad (7.9) \end{aligned}$$

Приравнявая нулю выражения при одинаковых степенях γ , получаем

$$B_{t0} = 0, D_{t0} = 0, A_{k0} = 0, B_{t1} = 0, D_{l1} = 0, A_{k1} \neq 0, B_{t2} \neq 0, D_{l2} \neq 0$$

Видно, что коэффициенты A_{k1} , B_{t2} , D_{l2} определяются независимо один от другого: A_{k1} ($k = 1, 2$) находятся из двух уравнений, B_{t2} и D_{l2} — из бесконечных систем

($j = 1, 2$)

$$\sum_{k=1}^2 \left\{ \frac{16G}{(1-2\nu)^2} \sqrt{-1} a (1-\nu^2) (1-\nu) (a_{-1}^{(j)})^2 [a_{-1}^{(j)} - a_{-1}^{(k)}] \right\} A_{k1} = F_j + G_j$$

$$- \frac{4Ga\sqrt{-1}}{(1-2\nu)} a \sqrt{-1} \sum_{i=1, i \neq t}^{\infty} \frac{\omega_i^2 \omega_t^2 (\operatorname{ch}^2 \omega_i - \operatorname{ch}^2 \omega_t)}{(\omega_i^2 - \omega_t^2)^2 (\omega_i - \omega_t)} \left[\frac{2\nu}{1-2\nu} (\omega_i^2 + \omega_t^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \omega_i \omega_t \right] B_{i2} + \frac{2G}{(1-2\nu)^2} a \sqrt{-1} \omega_t^3 \left(\frac{2}{3} \operatorname{ch}^2 \omega_t - 1 \right) B_{t2} =$$

$$= N_t + \frac{48G}{(1-2\nu)^2} a (1-\nu^2) \nu \frac{\operatorname{sh}^2 \omega_t}{\omega_t} \sqrt{-1} \sum_{k=1}^2 A_{k1} \quad (t = 1, 2, \dots)$$

$$- \frac{4G}{(1-2\nu)} a \sqrt{-1} \sum_{i=1, i \neq l}^{\infty} \frac{\delta_i^2 \delta_l^2 (\operatorname{sh}^2 \delta_i - \operatorname{sh}^2 \delta_l)}{(\delta_i^2 - \delta_l^2)^2 (\delta_i - \delta_l)} \left[\frac{2\nu}{1-2\nu} (\delta_i^2 + \delta_l^2) + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \delta_i \delta_l \right] \times$$

$$\times D_{i2} + \frac{2G}{(1-2\nu)^2} a \sqrt{-1} \delta_l^3 \left(\frac{2}{3} \operatorname{sh}^2 \delta_l + 1 \right) D_{l2} = P_l \quad (l = 1, 2, \dots)$$

Продолжая процесс асимптотического разложения системы, можно вычислить A_{k2} , B_{t3} , D_{l3} и т. д.

Важно отметить, что матрицы бесконечных систем для B_{t2} , D_{l2} полностью совпадают с матрицами, полученными в задачах об изгибе и растяжении толстых плит. Обращение этих матриц для изгиба произведено методом урезания, и коэффициенты B_{t2} , D_{l2} найдены с необходимой степенью точности.

8. При сделанных предположениях относительно внешней нагрузки коэффициенты B_i и D_i имеют порядок малости, на $\sqrt{\gamma}$ больший чем A_k . Фактически разложения коэффициентов имеют вид

$$A_k = A_{k1} \sqrt{\gamma} + A_{k2} \gamma + \dots, \quad B_i = B_{i2} \gamma + B_{i3} \gamma^{3/2} + \dots,$$

$$D_i = D_{i2} \gamma + D_{i3} \gamma^{3/2} + \dots$$

Общее решение задачи об определении напряженного и деформированного состояния оболочки может быть получено суперпозицией решений, соответствующих различным группам корней,

$$u_r = \frac{1}{1-2\nu} \left\{ \sum_{k=1}^2 2 (a_{-1}^{(k)})^2 (1-\nu) \exp \left[\frac{a_{-1}^{(k)}}{\sqrt{\gamma}} + \dots \right] A_{k1} + \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \langle [2(1-\nu) \operatorname{ch} \omega_i + \omega_i \operatorname{sh} \omega_i] \operatorname{ch} \omega_i \zeta - \zeta \omega_i \operatorname{ch} \omega_i \operatorname{sh} \omega_i \zeta \rangle \times$$

$$\times B_{i2} \exp \left[\frac{2\omega_i}{\gamma} + \dots \right] \gamma + \sum_{i=1}^{\infty} \langle [2(1-\nu) \operatorname{sh} \delta_i + \delta_i \operatorname{ch} \delta_i] \operatorname{sh} \delta_i \zeta -$$

$$\left. - \zeta \delta_i \operatorname{sh} \delta_i \operatorname{ch} \delta_i \zeta \rangle D_{i2} \exp \left[\frac{2\delta_i}{\gamma} + \dots \right] \gamma + \dots \right\} \quad (8.1)$$

$$\begin{aligned}
u_\alpha = & -\frac{1}{1-2\nu} \left\{ \sum_{k=1}^2 [(a_{-1}^{(k)})^2 (1-\nu) \zeta - 2(1-\nu^2)] \exp \left[\frac{a_{-1}^{(k)}}{\sqrt{\gamma}} + \dots \right] A_{k1} \sqrt{\gamma} + \right. \\
& + \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle \left[(1-2\nu) \frac{\text{ch } \omega_i}{\omega_i} - \text{sh } \omega_i \right] \text{sh } \omega_i \zeta + \zeta \text{ ch } \omega_i \text{ ch } \omega_i \zeta \right\rangle \times \\
& \times B_{i2} \exp \left[\frac{2\omega_i}{\gamma} + \dots \right] \gamma + \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle \left[(1-2\nu) \frac{\text{sh } \delta_i}{\delta_i} - \text{ch } \delta_i \right] \text{ch } \delta_i \zeta + \right. \\
& \left. + \zeta \text{ sh } \delta_i \text{ sh } \delta_i \zeta \right\rangle D_{i2} \exp \left[\frac{2\delta_i}{\gamma} + \dots \right] \gamma + \dots \left. \right\} \quad (8.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_\alpha = & \frac{2G}{1-2\nu} a^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^2 12(1-\nu^2) \zeta A_{k1} \exp \left[\frac{a_{-1}^{(k)}}{\sqrt{\gamma}} + \dots \right] + \right. \\
& + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle \left(\frac{\text{ch } \omega_i}{\omega_i} - \text{sh } \omega_i \right) \text{sh } \omega_i \zeta + \zeta \text{ ch } \omega_i \text{ ch } \omega_i \zeta \right\rangle B_{i2} \exp \left[\frac{2\omega_i}{\gamma} + \dots \right] + \\
& \left. + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle \left(\frac{\text{sh } \delta_i}{\delta_i} - \text{ch } \delta_i \right) \text{ch } \delta_i \zeta + \zeta \text{ sh } \delta_i \text{ sh } \delta_i \zeta \right\rangle D_{i2} \exp \left[\frac{2\delta_i}{\gamma} + \dots \right] \right\} \quad (8.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{r\alpha} = & \frac{2G}{1-2\nu} a^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^2 3(1-\nu^2) (\zeta^2 - 1) \exp \left[\frac{a_{-1}^{(k)}}{\sqrt{\gamma}} + \dots \right] A_{k1} \sqrt{\gamma} + \right. \\
& + \sum_{i=1}^{\infty} [\text{sh } \omega_i \text{ ch } \omega_i \zeta - \zeta \text{ ch } \omega_i \text{ sh } \omega_i \zeta] \omega_i B_{i2} \exp \left[\frac{2\omega_i}{\gamma} + \dots \right] + \\
& \left. + \sum_{i=1}^{\infty} [\text{ch } \delta_i \text{ sh } \delta_i \zeta - \zeta \text{ sh } \delta_i \text{ ch } \delta_i \zeta] \delta_i D_{i2} \exp \left[\frac{2\delta_i}{\gamma} + \dots \right] + \dots \right\} \quad (8.4)
\end{aligned}$$

В формулах (8.1) — (8.4) первые члены в правых частях соответствуют прикладной теории оболочек, следующие — добавки к решению теории Кирхгоффа. На границе области при $\alpha = \alpha_1$ в напряжении σ_α добавочные члены имеют тот же порядок, что и в прикладной теории, а в напряжении $\tau_{r\alpha}$ при $\gamma \rightarrow 0$ основную роль начинают играть добавочные члены.

9. Все вышеизложенное относится к оболочке, срединная поверхность которой есть сфера с одним отверстием. Если же срединная поверхность оболочки представляет собой сферу с двумя отверстиями в полюсах, то к общему решению (6.3) добавится решение задачи о растяжении оболочки сосредоточенными силами, о чем говорилось в конце § 3. Напряженное состояние около каждого отверстия находится так же, как описано выше.

Поступила 17 IX 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Л у р ь е А. И. Равновесие упругой симметрично нагруженной сферической оболочки. ПММ, 1943, т. 7, вып. 6.
2. Л у р ь е А. И. К теории толстых плит. ПММ, 1942, т. 6, вып. 2—3.
3. А к с е н т я н О. К., В о р о в и ч И. И. Напряженное состояние плиты малой толщины. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6.
4. Л у р ь е А. И. Пространственные задачи теории упругости. Гостехиздат, 1955.
5. Л е й б е н з о н Л. С. Теория упругости. Собр. тр., т. 1, Изд-во АН СССР, 1955.
6. В л а с о в В. З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. Гостехиздат, 1949.