Прикладная математика и механика. Том 30, 1966

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

А. Н. Руховец, Я. С. Уфлянд

(Ленинград)

В работе рассматриваются парные интегральные уравнения, связанные с обобщенным преобразованием Мелера — Фока по присоединенным сферическим функциям $P^m_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)$. При помощи метода, сходного с развитым в работах [1,2], решение в общем случае выражается через одну неизвестную функцию, удовлетворяющую регулярному уравнению Фредгольма. Указаны некоторые классы краевых задач математической физики и теории упругости со смешанными граничными условиями, разрешимых при помощи развитой методики.

В качестве конкретного примера дано решение задачи кручения упругого полупространства полым цилиндрическим штампом.

1. Рассмотрим парные интегральные уравнения вида

$$\int_0^\infty A(\tau)\,P^m_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\,[1+g(\tau)]\,d\tau = f(\alpha) \qquad (0 \leqslant \alpha < \alpha_0) \qquad (1.1)$$

$$\int_0^\infty \tau A(\tau)\,P^m_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\operatorname{th}\pi\tau\,d\tau = 0 \qquad (\alpha_0 < \alpha < \infty) \qquad (1.2)$$

Здесь $A(\tau)$ — искомая, а $g(\tau)$ и $f(\alpha)$ — заданные функции, $P^m_{1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)$ — присоединенные сферические функции $(m = 0, 1, 2\ldots)$

Вводя вспомогательную функцию $\varphi(t)$ соотношением

$$A(\tau) = \int_0^{\alpha_0} \varphi(t)\cos\tau t\,dt \qquad (1.3)$$

и используя формулы [3]

$$P_\nu^{\,m}(\lambda) = (\lambda^2-1)^{1/2 m}\frac{d^m P_\nu(\lambda)}{d\lambda^m} \qquad (\lambda = \operatorname{ch}\alpha) \qquad (1.4)$$

$$\int_0^\infty \operatorname{th}\pi\tau P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\sin\tau t\,d\tau = \begin{cases}0, & t<\alpha\\ [2(\operatorname{ch}t-\operatorname{ch}\alpha)]^{-1/2}, & t>\alpha\end{cases} \qquad (1.5)$$

можно показать, что уравнение (1.2) будет удовлетворено тождественно для любой функции $\varphi(t)$, имеющей непрерывную производную. Интегрируя далее (1.1) m раз по λ, приведем его к виду

$$\int_0^\infty A(\tau)\,[1+g(\tau)]\,P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau = F(\alpha) + \sum_{k=0}^{m-1} c_k\lambda^k = \chi(\alpha) \qquad (1.6)$$

где c_k — постоянные, и положено [1]

$$F(\alpha)=\int\limits_1^\lambda\int\limits_1^\lambda\cdots\int\limits_1^\lambda f(\alpha)(\lambda^2-1)^{-1/2m}\,d\lambda^m \tag{1.7}$$

Подставляя (1.3) в (1.6) и пользуясь формулой [3]

$$\int\limits_0^\infty P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\cos\tau t\,d\tau=\begin{cases}[2(\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}t)]^{-1/2}, & t<\alpha\\ 0, & t>\alpha\end{cases} \tag{1.8}$$

можно (1.6) преобразовать в интегральное уравнение Абеля

$$\int\limits_0^\alpha \Phi(x)\,[2(\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}x)]^{-1/2}dx=\chi(\alpha) \tag{1.9}$$

Здесь

$$\varphi(x)+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\alpha_0}[G(t+x)+G(t-x)]\,\varphi(t)\,dt=\Phi(x)$$

$$G(y)=\int\limits_0^\infty g(\tau)\cos\tau y\,d\tau \tag{1.10}$$

Так как решение уравнения (1.9) известно

$$\Phi(x)=\frac{2}{\pi}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x[2(\operatorname{ch}x-\operatorname{ch}\alpha)]^{-1/2}\chi(\alpha)\operatorname{sh}\alpha d\alpha \tag{1.11}$$

то задача сводится к определению $\varphi(x)$ из интегрального уравнения (1.10) с непрерывным симметричным ядром.

2. Полученное решение содержит m произвольных постоянных, которые могут быть найдены после формулировки некоторых дополнительных условий. Исходя из постановки краевых задач, приводящих к рассматриваемым парным уравнениям (п. 3), и следуя идее, высказанной в работах [1, 4], потребуем, чтобы функция

$$\psi(\alpha)=\int\limits_0^\infty \tau A(\tau)\operatorname{th}\pi\tau P^m_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau \tag{2.1}$$

была интегрируемой в промежутке $0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_0$. Подставляя (1.3) в (2.1) и применяя (1.4), (1.5), можно привести (2.1) к виду

$$\psi(\alpha)\big|_{0\leqslant\alpha<\alpha_0}=(\lambda^2-1)^{1/2m}\frac{d^m}{d\lambda^m}\Big\{\varphi(\alpha_0)\,[2(\operatorname{ch}\alpha_0-\operatorname{ch}\alpha)]^{-1/2}-$$

$$-\int\limits_\alpha^{\alpha_0}\varphi'(t)\,[2(\operatorname{ch}t-\operatorname{ch}\alpha)]^{-1/2}dt\Big\} \tag{2.2}$$

Проводя последовательно интегрирование по частям, убеждаемся, что поставленное требование эквивалентно условиям

$$\varphi^{(i)}(\alpha_0)=0\qquad(i=0,1,\ldots,m-1) \tag{2.3}$$

---

[1] Здесь и в дальнейшем предполагается, что заданные функции удовлетворяют некоторым условиям, обеспечивающим сходимость интегралов, законность перестановки порядка интегрирования и т. д.

При $\alpha \to \alpha_0 - 0$ функция $\psi(\alpha)$ имеет порядок $(\operatorname{ch}\alpha_0 - \operatorname{ch}\alpha)^{-1/2}$.

Нетрудно видеть, что условия (2.3) определяют постоянные c_k. В самом деле, представляя $\varphi(x)$ в виде суммы

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x), \qquad \varphi_2(x) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k\omega_k(x) \tag{2.4}$$

и полагая $\Phi(x) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x)$, где

$$\Phi_1(x) = \frac{2}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x [2(\operatorname{ch}x - \operatorname{ch}\alpha)]^{-1/2} F(\alpha)\operatorname{sh}\alpha\, d\alpha \tag{2.5}$$

$$\Phi_2(x) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \frac{dI_k}{dx}, \qquad I_k(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x [2(\operatorname{ch}x - \operatorname{ch}\alpha)]^{-1/2}\operatorname{ch}^k\alpha\operatorname{sh}\alpha\, d\alpha \tag{2.6}$$

получим из (1.10) для искомых функций $\varphi_1(x)$ и $\omega_k(x)$ раздельные уравнения Фредгольма с заданными правыми частями $\Phi_1(x)$ и dI_k/dx. После этого условия (2.3) являются линейной алгебраической системой

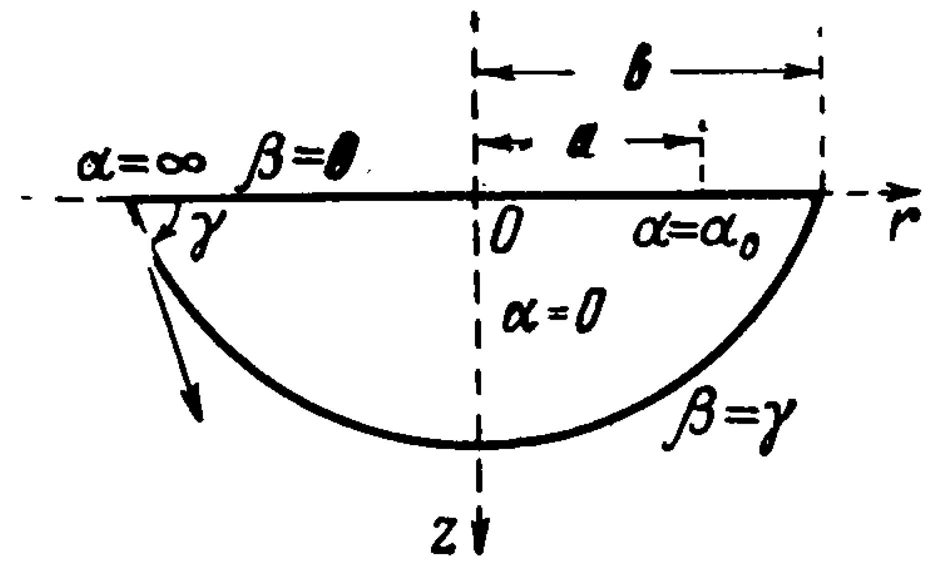
$$\varphi_1^{(i)}(\alpha_0) + \sum_{k=0}^{m-1} c_k\omega_k^{(i)}(\alpha_0) = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, m-1) \tag{2.7}$$

относительно искомых величин c_k.

Если в выражении (2.6) для $I_k(x)$ сделать замену $\operatorname{sh}{}^1/_2\alpha = \operatorname{sh}{}^1/_2 x\sin\theta$ и ввести полиномы $P_{2k}(\operatorname{sh}{}^1/_2\alpha) = \operatorname{ch}^k\alpha$, то можно интегралы $I_k(x)$ представить в виде

$$I_k(x) = \frac{4}{\pi}\operatorname{sh}{}^1/_2 x\int_0^{{}^1/_2\pi} P_{2k}(\operatorname{sh}{}^1/_2 x\sin\theta)\sin\theta\, d\theta \tag{2.8}$$

Отсюда следует, что они являются известными полиномами порядка $2k+1$ относительно $\operatorname{sh}{}^1/_2 x$.



Фиг. 1

3. К парным интегральным уравнениям вида (1.1), (1.2) сводится решение некоторых классов краевых задач теории потенциала и теории упругости со смешанными граничными условиями. В качестве одного из приложений рассмотрим краевую задачу для сферического сегмента (фиг. 1), когда искомая гармоническая функция $u(r, \theta, z)$ обращается в нуль на сферической поверхности и удовлетворяет на плоской границе $z = 0$ смешанным условиям

$$u = f(r, \theta), \quad 0 \leqslant r < a; \qquad \partial u/\partial z = 0, \quad a < r < b \tag{3.1}$$

Если ввести тороидальные координаты формулами [5]

$$x = \frac{b\operatorname{sh}\alpha\cos\theta}{\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta}, \quad y = \frac{b\operatorname{sh}\alpha\sin\theta}{\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta}, \quad z = \frac{b\sin\beta}{\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta} \quad \begin{pmatrix} 0 \leqslant \alpha < \infty \\ 0 \leqslant \beta \leqslant \gamma \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

то уравнение сферической поверхности сегмента будет $\beta = \gamma$, на плоской его границе ($\beta = 0$) линией раздела краевых условий первого и второго рода является окружность $\alpha = \alpha_0$ ($\operatorname{th}{}^1/_2\alpha_0 = b/a$), а при $z = 0$, $r \to b$ имеем $\alpha \to \infty$.

Будем искать решение задачи, удовлетворяющее условию $u|_{\beta=\gamma}=0$, в виде [1]

$$u=\sqrt{\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im\theta}\int_0^\infty B_m(\tau)\frac{\operatorname{sh}(\gamma-\beta)\tau}{\operatorname{sh}\gamma\tau}P^m_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau \qquad (3.3)$$

Удовлетворяя условиям (3.1) и разлагая заданную функцию f в ряд Фурье по угловой координате

$$f=\sqrt{\operatorname{ch}\alpha+1}\sum_{m=-\infty}^{\infty}f_m(\alpha)\,e^{im\theta} \qquad (3.4)$$

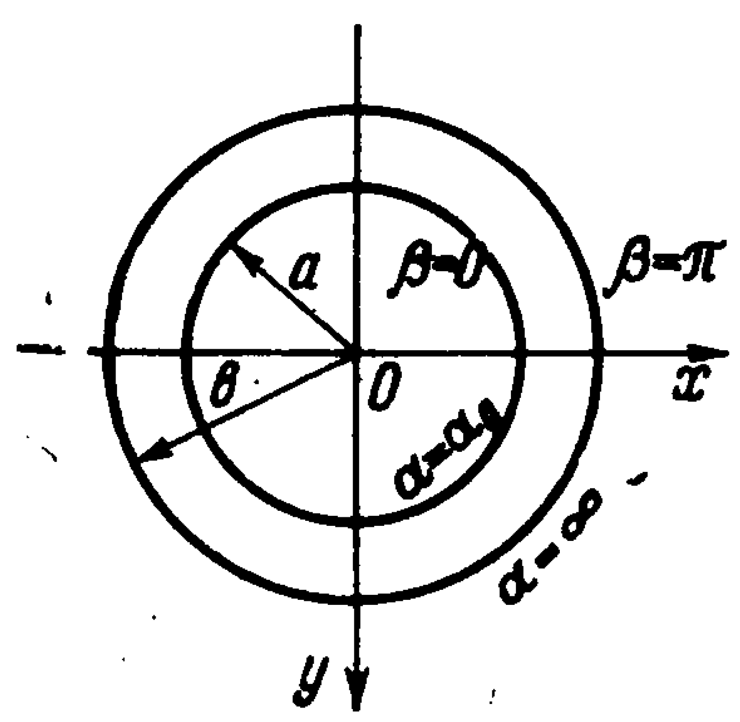
приходим к парным уравнениям

$$\int_0^\infty B_m(\tau)\,P^m_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\alpha=f_m(\alpha) \qquad (0\leqslant\alpha<\alpha_0) \qquad (3.5)$$

$$\int_0^\infty \tau B_m(\tau)\operatorname{cth}\gamma\tau P^m_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau=0 \qquad (\alpha_0<\alpha<\infty) \qquad (3.6)$$

которые подстановкой $B_m\operatorname{cth}\gamma\tau=A\operatorname{th}\pi\tau$ приводятся к виду (1.1), (1.2). Таким образом, поставленная задача сведена к уравнению Фредгольма, причем

$$g(\tau)=-\frac{\operatorname{ch}(\pi-\gamma)\tau}{\operatorname{ch}\pi\tau\operatorname{ch}\gamma\tau}$$



Фиг. 2

Заметим, что в случае, когда все граничные условия неоднородны, задача может быть приведена к парным уравнениям (1.1), (1.2) при помощи обобщенного интегрального преобразования Мелера — Фока (п. 4).

Задачи рассмотренного типа могут встретиться, например, при изучении стационарных процессов в теории теплопроводности. К парным уравнениям типа (3.5), (3.6) при $m=1$ сводится задача о кручении усеченного шара [1]. При рассмотрении подобных задач становится ясным смысл поставленного в п. 2 дополнительного условия, которое, очевидно, заключается в требовании интегрируемости нормальной производной $\partial u/\partial z$ в области $z=0$, $0\leqslant r\leqslant a$. Можно показать, что при этом решение краевой задачи единственно. В задачах физического содержания это требование эквивалентно условию ограниченности потока тепла на кольце $z=0$, $0\leqslant r\leqslant a$, условию конечности крутящего момента и т. п.

В частном случае $\gamma=\pi$ приходим к смешанной задаче для полупространства с двусвязной ($r=a$ и $r=b$ — фиг. 2) линией раздела краевых условий первого и второго рода [2]. Известно [6], что к таким задачам сводятся статические задачи теории упругости для полупространства в том случае, когда на плоском кольце ($z=0$, $a<r<b$) задано нормальное напряжение, а на остальной части границы — нормальное перемещение (касательные напряжения считаются известными на всей плоскости $z=0$).

---

[1] См., например, [6]. Заметим, что

$$P^{-m}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)=\frac{\Gamma(1/2+i\tau-m)}{\Gamma(1/2+i\tau+m)}P^m_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)$$

[2] Осесимметричная задача теплопроводности, соответствующая частному случаю $m=0$, решена в работе [2] для неоднородного условия при $\alpha_0<\alpha<\infty$.

В частности, могут быть решены задачи о деформации неограниченного тела, ослабленного плоской кольцевой щелью [7]. Укажем еще на относящуюся к тому же классу электростатическую задачу о поле круглого диска, помещенного в отверстие диафрагмы.

4. Изложенный выше способ применим также и к таким краевым задачам для сферического сегмента, когда в области $z = 0$, $0 \leqslant r < a$ задано однородное граничное условие второго рода, а при $z = 0$, $a < r < b$ — значение искомой функции u. При условии $u|_{\beta=\gamma} = 0$ решение сохраняет ту же форму (3.3) и сводится к парным уравнениям

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \tau B(\tau)\operatorname{cth}\gamma\tau P^m_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau = 0 \qquad (0 \leqslant \alpha < \alpha_0) \\ &\int_0^\infty B(\tau) P^m_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau = f(\alpha) \qquad (\alpha_0 < \alpha < \infty) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Разлагая $f(\alpha)$ в обобщенный интеграл Мелера — Фока [6]

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= (-1)^m \int_0^\infty \tau\operatorname{th}\pi\tau P^m_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\mathring{f}_m(\tau)\,d\tau \\ \mathring{f}_m(\tau) &= \int_0^\infty f(\alpha) P^{-m}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\operatorname{sh}\alpha\,d\alpha \end{aligned} \tag{4.2}$$

и полагая $B(\tau) + (-1)^{m+1}\tau\operatorname{th}\pi\tau f_m{}^\circ(\tau) = A(\tau)\operatorname{th}\pi\tau$, приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \tau A(\tau)\,[1 + g(\tau)]\, P^m_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau = h(\alpha) \qquad (0 \leqslant \alpha < \alpha_0) \\ &\int_0^\infty A(\tau)\operatorname{th}\pi\tau P^m_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau = 0 \qquad (\alpha_0 < \alpha < \infty) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Здесь

$$h(\alpha) = (-1)^{m+1}\int_0^\infty \mathring{f}_m(\tau)\,\tau^2\operatorname{th}\pi\tau\operatorname{cth}\gamma\tau P^m_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau, \quad g(\tau) = \frac{\operatorname{sh}(\pi-\gamma)\tau}{\operatorname{ch}\pi\tau\operatorname{sh}\gamma\tau} \tag{4.4}$$

Уравнения (4.3) по своей структуре несколько отличаются от (1.1), (1.2), в связи с чем метод п. 1 видоизменяется. Положим

$$A(\tau) = \int_0^{\alpha_0} \varphi(t)\sin\tau t\,dt, \qquad \varphi(0) = 0 \tag{4.5}$$

тогда уравнение (4.3) будет удовлетворено; после преобразований придем к уравнению Фредгольма (1.10) с ядром

$$K(x, t) = G(t - x) - G(t + x) \tag{4.6}$$

и правой частью

$$\Phi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x [2(\operatorname{ch}x - \operatorname{ch}\alpha)]^{-1/2} h(\alpha)\operatorname{sh}\alpha\,d\alpha \tag{4.7}$$

Входящие в $h(\alpha)$ постоянные c_k (см. (1.6)) можно найти из условия интегрируемости величины $\partial u / \partial z$ в области $z = 0$, $a < r < b$, которое после вычислений по-прежнему приводится к (2.3).

Заметим, что для случая полупространства ($\gamma = \pi$) при помощи парных уравнений можно дать решение смешанных краевых задач и несколько иного типа, когда на кольце $z = 0$, $a < r < b$ задано краевое условие первого рода, а на остальной границе — условие второго рода. К таким задачам относится, например, электростатическая задача о плоском кольце, находящемся в произвольном внешнем поле, и математически ей эквивалентная задача о равновесии упругого полупространства при следующих краевых условиях: при $z = 0$, $a < r < b$ задается нормальное перемещение, а на остальной части границы — нормальное напряжение, причем касательные напряжения при $z = 0$ известны. Частными случаями такой задачи являются некоторые задачи о концентрации напряжений в неограниченном теле, ослабленном внутренней и внешней круговыми щелями, а также контактная задача для полого цилиндрического (кольцевого) штампа, рассматривавшаяся в работах многих авторов.

В качестве конкретного примера названных задач теории упругости дадим решение задачи о полупространстве, скручиваемом при помощи сцепленного с ним жесткого кольцевого штампа. При этом напряженно деформированное состояние определяется одной функцией $u_\theta(r, z) \equiv u$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \qquad z > 0 \tag{4.8}$$

и граничным условиям

$$u\,|_{\beta=0} = \varepsilon r, \quad \alpha_0 < \alpha < \infty; \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial \beta}\right|_{\beta=0} = 0, \quad 0 \leqslant \alpha < \alpha_0; \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial \beta}\right|_{\beta=\pi} = 0 \tag{4.9}$$

где ε — угол поворота штампа.

Если искать решение в форме

$$u = \varepsilon b \sqrt{\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta} \int_0^\infty B(\tau) \frac{\operatorname{ch}(\pi - \beta)\tau}{\operatorname{ch}\pi\tau} P^1_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\, d\tau \tag{4.10}$$

то граничные условия приводят к парным интегральным уравнениям

$$\begin{gathered}\int_0^\infty B(\tau) P^1_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\, d\tau = \frac{\operatorname{th}{}^1/_2\,\alpha}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha + 1}} \qquad (\alpha_0 < \alpha < \infty) \\ \int_0^\infty \tau B(\tau) \operatorname{th}\pi\tau P^1_{-1/2-i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\, d\tau = 0 \qquad (0 \leqslant \alpha < \alpha_0)\end{gathered} \tag{4.11}$$

Разложим правую часть первого уравнения в интеграл Мелера — Фока [6]

$$\frac{\operatorname{th}{}^1/_2\,\alpha}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha + 1}} = -2\sqrt{2} \int_0^\infty P^1_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha) \frac{d\tau}{\operatorname{ch}\pi\tau} \tag{4.12}$$

Тогда, полагая $B(\tau) + 2\sqrt{2} / \operatorname{ch}\pi\tau = A(\tau) \operatorname{th}\pi\tau$ и учитывая формулы

$$\int_0^\infty \frac{\tau \operatorname{sh}\pi\tau}{\operatorname{ch}^2\pi\tau} P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\, d\tau = \frac{1}{2\pi \operatorname{ch}^2 {}^1/_2\,\alpha}, \qquad P^1_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha) = \frac{d}{d\alpha} P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha) \tag{4.13}$$

получим парные уравнения (4.3), где $m = 1$

$$g(\tau) = -\frac{1}{\operatorname{ch}^2\pi\tau}, \qquad h(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{d}{d\alpha}\frac{1}{\operatorname{ch}^2 {}^1/_2\,\alpha} \tag{4.14}$$

Поэтому при помощи подстановки (4.5) сведем задачу к уравнению Фредгольма (1.10) с ядром (4.6), где

$$G(y) = -\frac{1}{\pi}\frac{{}^1/_2\, y}{\operatorname{sh} {}^1/_2\, y}, \qquad \Phi(x) = \frac{2\sqrt{2}\,x}{\pi^2 \operatorname{ch} {}^1/_2\, x} + c \operatorname{sh}^1/_2\, x \tag{4.15}$$

причем постоянная c определяется условием $\varphi(\alpha_0) = 0$.

Для полного решения задачи необходимо выразить угол ε через приложенный к штампу скручивающий момент

$$M = -G\int\limits_a^b\int\limits_0^{2\pi} \tau_0 r^2\, dr d\theta \qquad \tau_0 = \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{\beta=0} (\alpha_0 < \alpha < \infty) \tag{4.16}$$

где G — модуль сдвига. Входящая сюда нормальная производная после некоторых преобразований с учетом условия $\varphi(\alpha_0) = 0$ может быть представлена в следующем виде:

$$\tau_0 = \varepsilon(\operatorname{ch}\alpha + 1)^{3/2}\frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{1}{\operatorname{ch}^2 {}^1/_2\,\alpha} - \int\limits_0^{\alpha_0} \varphi'(t)(\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{ch} t)^{-1/2} \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\operatorname{ch} t + 1}{\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{ch} t}}\, dt\right]$$

$$(\alpha_0 < \alpha < \infty) \tag{4.17}$$

Проводя интегрирование, после ряда выкладок найдем искомую связь в виде квадратуры

$$M = \frac{16}{3} G\varepsilon b^3 \left\{\frac{\operatorname{ch}\alpha_0 + ch^2\, {}^1/_2\, \alpha_0}{2\operatorname{ch}^3 {}^1/_2\, \alpha_0} - \frac{3}{4\sqrt{2}\operatorname{ch} {}^1/_2\, \alpha_0}\int\limits_0^{\alpha_0} \varphi'(t)\frac{dt}{\operatorname{ch} {}^1/_2\, t} + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{4}\operatorname{ch}\frac{\alpha_0}{2}\int\limits_0^{\alpha_0}\left[\frac{\varphi(t)}{2} - \operatorname{th}\frac{t}{2}\varphi'(t)\right]\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{ch} t + 1}{\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{ch} t}\right)^{1/2}\frac{\operatorname{th} {}^1/_2\, t\, dt}{\sqrt{ch\,\alpha_0 - \operatorname{ch} t}}\right\} \tag{4.18}$$

При $\alpha_0 = 0$ формула (4.18) дает известное соотношение для кругового штампа.

Заметим в заключение, что ряд других величин также может быть выражен непосредственно через основную функцию $\varphi(t)$; например, для перемещения точек круга $z = 0$, $0 \leqslant r < a$ имеем формулу

$$u\,|_{\beta=0} = \varepsilon r + \varepsilon b \operatorname{ch} {}^1/_2\, \alpha \operatorname{sh}\alpha \int\limits_\alpha^{\alpha_0} [\varphi'(t) - \operatorname{cth} t\, \varphi(t)](\operatorname{ch} t - \operatorname{ch}\alpha)^{-1/2}\frac{dt}{\operatorname{sh} t} \tag{4.19}$$

$$(0 \leqslant \alpha < \alpha_0)$$

Поступила 20 VI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Баблоян А. А. Решение некоторых парных интегральных уравнений. ПММ, 1964, т. 28, вып. 6, стр. 1015.
2. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. Об одной смешанной граничной задаче теплопроводности для полупространства. Инж.-физ. ж., 1963, т. 5, вып. 10, стр. 67.
3. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М., Изд-во иностр. лит., 1952.
4. Абрамян Б. Л., Арутюнян Н. Х., Баблоян А. А. О двух контактных задачах для упругой сферы. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4, стр. 622.
5. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.— Л., Физматгиз, 1963.
6. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1963.
7. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. Растяжение упругого пространства, ослабленного кольцевой трещиной. Прикладна механіка АН Укр. ССР, 1965, т. I, вып. 10, стр. 61.