Прикладная математика и механика. Том 30, 1966

О МЕТОДЕ ПАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ПАРНЫХ РЯДОВ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯХ К ЗАДАЧАМ МЕХАНИКИ

А. И. Цейтлин

(Москва)

В статье рассматриваются парные интегральные уравнения и парные ряды общего типа, широко используемые для решения краевых задач теории упругости, гидродинамики, электростатики и т. д. при смешанных граничных условиях. Предлагается метод решения парных уравнений и рядов, основанный на сведении их при помощи линейных интегральных операций типа Вольтерра, являющихся континуальным аналогом процесса ортогонализации, к интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно ортогонализирующего ядра. Применение метода иллюстрируется на решении плоской контактной задачи для клина.

1. Метод парных интегральных уравнений и парных рядов — одно из наиболее эффективных средств решения краевых задач со смешанными граничными условиями. В приложениях к парным уравнениям или рядам обычно приходят в тех случаях, когда решение краевой задачи ищется в виде разложения по некоторой системе функций, и смешанные граничные условия используются для определения коэффициентов разложения. В результате применения к решению различных операторов на различных участках границы получают парные уравнения или парные ряды, которые в случае вещественного разложения можно представить в следующем общем виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} [1+h(\xi)]\,\psi(\xi)\,u(\xi,\eta)\,d\tau(\xi) = g_1(\eta) \qquad (-\infty<a<\eta<c)$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi)\,u(\xi,\eta)\,d\tau(\xi) = g_2(\eta) \qquad (c<\eta<b<\infty) \tag{1.1}$$

Здесь все функции, кроме $\psi(\xi)$, известны; $\tau(\xi)$ — спектральная функция распределения соответствующего разложения. При разложении в интеграл $\tau(\xi)$ непрерывна, при разложении в ряд она представляет собой ступенчатую функцию со счетным числом скачков.

Впервые, по-видимому, задача о парных интегральных уравнениях была сформулирована Вебером [1] еще в 1873 г., и решена (правда, для весьма частного случая) Бельтрами [2] в 1881 г. Свое второе рождение парные уравнения пережили после того, как Титчмарш [3] и Басбридж [4], опираясь на теорию преобразований Меллина, дали решение в квадратурах уравнений с бесселевым ядром

$$\int_0^{\infty} r(\xi)\,J_\nu(\xi\eta)\,\psi(\xi)\,d\xi = g_1(\eta) \qquad (0<\eta<1)$$
$$\int_0^{\infty} J_\nu(\xi\eta)\,\psi(\xi)\,d\xi = g_2(\eta) \qquad (1<\eta<\infty) \tag{1.2}$$

для случая $r(\xi) = \xi^\alpha$, $g_2(\eta) \equiv 0$. Впоследствии появилось несколько работ, в которых при помощи различных методов парные уравнения такого рода были изучены довольно подробно (в том числе при $g_2 \not\equiv 0$). Результаты более общего характера были получены в исследованиях, посвященных парным уравнениям с бесселевым ядром при произвольном $r(\xi)$, когда уже, вообще говоря, не удается найти решение в квадратурах. Так, в работе [5] решение парных уравнений сводится к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений, а в [6–9] — различными методами к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Метод Винера — Хопфа — Фока и вариационный метод решения парных уравнений применялись в работах Нобла [8, 10]. Некоторые специальные случаи $r(\xi)$ рассмотрены в [11,12].

В отдельных работах рассматривались парные уравнения с другими ядрами [1]: в [13] — с ядром в виде функций Лежандра комплексной степени (ядро интегрального преобразования Мелера — Фока), в [14] — с ядром в виде комбинации цилиндрических функций первого и второго рода (ядро преобразования Вебера). Исследование парных уравнений с ядром преобразования Фурье можно найти в монографии [15]. Парные ряды по различным функциям (тригонометрическим, цилиндрическим, функциям Лежандра, Якоби) рассматривались в работах [16–21] и др.

В настоящей статье рассматриваются в основном парные интегральные уравнения и парные ряды типа (1.1). Будет показано, что существует весьма общий путь приведения парных уравнений (1.1) к одному интегральному уравнению, заданному на всем интервале (a, b) и допускающему обращение. Этот путь связан с континуальной ортогонализацией подынтегральных функций в парных уравнениях и по своей идее весьма близок к известному методу решения обратной задачи Штурма — Лиувилля, разработанному в фундаментальных исследованиях [22,23]. Поскольку статья преследует прежде всего прикладные цели, здесь будет изложена главным образом формальная сторона общего метода, а вопрос о всех необходимых условиях и возможных ограничениях может быть решен при рассмотрении конкретных уравнений с теми или иными ядрами.

2. Полагая $1 + h(\xi) = \rho^2(\xi)$, $\rho(\xi)\psi(\xi) = f(\xi)$, симметризуем парные уравнения (1.1), приведя их к виду, удобному для дальнейших операций

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \rho(\xi) f(\xi) u(\xi, \eta)\, d\tau(\xi) = g_1(\eta) \qquad (a < \eta < c) \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \rho^{-1}(\xi) f(\xi) u(\xi, \eta)\, d\tau(\xi) = g_2(\eta) \qquad (c < \eta < b) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Для решения уравнений (2.1) попытаемся ортогонализовать функции $\rho(\xi)u(\xi, \eta)$ и $\rho^{-1}(\xi)u(\xi, \eta)$ таким образом, чтобы в результате ортогонализации получить одно и то же ядро, которому соответствовала бы спектральная функция распределения $\tau(\xi)$.

Известно, что с помощью линейного треугольного преобразования можно ортогонализовать любую систему линейно независимых функций. Континуальный аналог этого процесса представляет собой линейное интегральное преобразование типа Вольтерра. В общем случае задача о построении интегрального преобразования, переводящего данную функцию двух переменных в ортогональное ядро, еще по-видимому, не решена. Частный случай ортогонализации функции $\cos\sqrt{\lambda}x$ относительно мер x и $\rho(\lambda)$ был рассмотрен И. М. Гельфандом и Б. М. Левитаном в работе [22], посвященной восстановлению дифференциального оператора второго порядка по его спектральным характеристикам.

[1] Особые парные интегральные уравнения с ядрами, зависящими от разности аргументов, рассматривались в работах Ф. Д. Гахова, И. Ц. Гохберга, М. Г. Крейна, И. М. Рапопорта, Ю. И. Черского и др.

Рассмотрим вначале случай, когда ядро уравнений (2.1) ортогонально, т. е. непрерывная функция $u(\xi, \eta)$ и неубывающие функции $\tau(\xi)$, $\sigma(x)$ таковы, что формулы

$$F(\xi) = \int_a^b f(x)\, u(\xi, x)\, d\sigma(x), \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\, u(\xi, x)\, d\tau(\xi) \tag{2.2}$$

устанавливают взаимно обратные изометрические отображения пространства $L_{2,\sigma}$ всех σ-измеримых функций $f(x)$ $(a \leqslant x < b)$, имеющих σ-интегрируемый квадрат

$$\int_a^b |f(x)|^2\, d\sigma(x) < \infty$$

на пространство $L_{2,\tau}$ τ-измеримых функций $F(\xi)$ $(-\infty < \xi < \infty)$, имеющих τ-интегрируемый квадрат на всей оси. Предполагаем также, что $\rho(\xi)$ непрерывна и $\rho(\xi)$, $g_1(\eta)$ и $g_2(\eta)$ достаточно правильны для того, чтобы рассматриваемые ниже интегралы существовали по крайней мере в смысле обобщенных функций.

Соотношения (2.2) определяют интегральные преобразования с конечными или бесконечными пределами (т. е. разложения по некоторым системам функций), применение которых для решения краевой задачи и приводит к парным уравнениям (2.1).

Построим ядро $\varphi(\xi, x)$, отображающее посредством формул, получающихся из (2.2) заменой $u(\xi, x)$ на $\varphi(\xi, x)$, пространства $L_{2,\sigma}$ и $L_{2,\tau}$ друг на друга, и связанное с $u(\xi, x)$ соотношением

$$\varphi(\xi, x) = \rho(\xi)\left[u(\xi, x) + \int_a^x K(x, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\sigma(\eta)\right] \tag{2.3}$$

где $K(x, \eta)$ $(\eta < x)$ — некоторая неизвестная непрерывная функция. Можно выражение (2.3) рассматривать как уравнение Вольтерра относительно $u(\xi, x)$ и его решение, т. е. функцию $u(\xi, x)$, представить в виде

$$u(\xi, x) = \rho^{-1}(\xi)\left[\varphi(\xi, x) + \int_a^x H(x, \eta)\, \varphi(\xi, \eta)\, d\sigma(\eta)\right] \tag{2.4}$$

Непрерывные функции $K(x, \eta)$ и $H(x, \eta)$ $(\eta < x)$ называются ортогонализирующими ядрами. Рассмотрим теперь интеграл

$$H_0(x, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\xi)\, u(\xi, \eta)\, \varphi(\xi, x)\, d\tau(\xi) \tag{2.5}$$

Если $\rho(\xi) u(\xi, \eta) \in L_{2,\tau}$, то $H_0(x, \eta) \in L_{2,\sigma}$. Вводя в рассмотрение обобщенные функции, можем распространить u- и φ-преобразования, осуществляемые формулами (2.2), также и на функции, не принадлежащие $L_{2,\sigma}$ и $L_{2,\tau}$, например, функции интегрируемые (по соответствующей мере) и ограниченной вариации на любом конечном промежутке. Таким образом, в том случае, когда $\rho(\xi) u(\xi, \eta) \overline{\in} L_{2,\tau}$, $H_0(x, \eta)$ можно рассматривать как обобщенную функцию, φ-преобразование которой имеет вид

$$\int_a^b H_0(x, \eta)\,\varphi(\xi, x)\,d\sigma(x) = \rho(\xi)\,u(\xi, \eta) \tag{2.6}$$

Сравнивая (2.4) с (2.6), получаем

$$H_0(x, \eta) = [\sigma'(\eta)]^{-1}\,\delta(x-\eta) + \begin{cases} H(\eta, x) & (x < \eta) \\ 0 & (x > \eta) \end{cases} \tag{2.7}$$

где $\delta(x - \eta)$ — дельта-функция; $\sigma'(\eta)$ в общем случае понимается как обобщенная функция. С другой стороны, из (2.5) и (2.2) имеем

$$\rho(\xi)\,\varphi(\xi, x) = \int_a^b H_0(x, \eta)\,u(\xi, \eta)\,d\sigma(\eta) \tag{2.8}$$

Следовательно

$$\varphi(\xi, x) = \rho^{-1}(\xi)\left[u(\xi, x) + \int_x^b H(\eta, x)\,u(\xi, \eta)\,d\sigma(\eta)\right] \tag{2.9}$$

Подставив теперь в (2.5) значение функции $\varphi(\xi, x)$ из (2.3), получим

$$\Psi_0(\eta, x) + \int_a^x K(x, \eta_1)\,\Psi_0(\eta, \eta_1)\,d\sigma(\eta_1) = [\sigma'(\eta)]^{-1}\,\delta(x-\eta) + \begin{cases} H(\eta, x) & (x<\eta) \\ 0 & (x>\eta) \end{cases} \tag{2.10}$$

где

$$\Psi_0(\eta, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho^2(\xi)\,u(\xi, \eta)\,u(\xi, x)\,d\tau(\xi) \tag{2.11}$$

Но вследствие (2.2)

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(\xi, x)\,u(\xi, \eta)\,d\tau(\xi) = [\sigma'(\eta)]^{-1}\,\delta(x-\eta) \tag{2.12}$$

поэтому, вводя новую функцию

$$\Psi(\eta, x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)\,u(\xi, \eta)\,u(\xi, x)\,d\tau(\xi) \tag{2.13}$$

получаем из (2.10) для интересующих нас значений $x > \eta$

$$\Psi(\eta, x) + \int_a^x K(x, \eta_1)\,\Psi(\eta, \eta_1)\,d\sigma(\eta_1) + K(x, \eta) = 0 \tag{2.14}$$

Ядро $\Psi(\eta, \eta_1)$ интегрального уравнения (2.14) можно выразить через ортогонализирующее ядро $H(x, \eta)$. Используя в (2.13) выражения (2.4) и (2.5), находим $(x > \eta)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\rho^2(\xi) - 1]\,u(\xi, x)\,u(\xi, \eta)\,d\tau(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\xi)\,u(\xi, \eta)\Big[\varphi(\xi, x) +$$

$$+ \int_a^x H(x, \eta_1)\,\varphi(\xi, \eta_1)\,d\sigma(\eta_1)\Big]\,d\tau(\xi) - [\sigma'(\eta)]^{-1}\,\delta(x-\eta) = H_0(x, \eta) +$$

$$+ \int_a^x H(x, \eta_1)\,H_0(\eta_1, \eta)\,d\sigma(\eta_1) - [\sigma'(\eta)]^{-1}\,\delta(x-\eta) \tag{2.15}$$

Принимая во внимание (2.7), теперь можем записать

$$\Psi(\eta, x) = \int_a^\eta H(x, \eta_1)\{[\sigma'(\eta)]^{-1}\delta(\eta - \eta_1) + H(\eta, \eta_1)\}\, d\sigma(\eta_1) \qquad (2.16)$$

Отсюда

$$\Psi(\eta, x) = H(x, \eta) + \int_a^\eta H(x, \eta_1) H(\eta, \eta_1)\, d\sigma(\eta_1) \qquad (2.17)$$

Из (2.17) следует, что $\Psi(\eta, x)$ непрерывна, поскольку непрерывно ядро $H(x, \eta)$. Таким образом, при каждом фиксированном x уравнение (2.14) является линейным интегральным уравнением Фредгольма второго рода с непрерывным симметрическим ядром $\Psi(\eta, x)$. Это уравнение, так же как и нелинейное интегральное уравнение (2.17) относительно ортогонализирующего ядра $H(x, \eta)$, аналогично интегральному уравнению, детально изученному в [22, 23]. В нашем случае эти уравнения хотя и носят несколько более общий характер, но по существу мало чем отличаются от рассмотренных в [22, 23], поэтому, используя тесную аналогию между ними, нетрудно доказать разрешимость уравнения (2.14).

Докажем вначале, что если $f(\eta) \in L_{2,\sigma}$ — некоторая финитная функция, а

$$\Phi(\xi) = \int_a^b f(\eta)\, u(\xi, \eta)\, d\sigma(\eta)$$

есть ее u-преобразование, то из равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi^2(\xi)\, \rho^2(\xi)\, d\tau(\xi) = 0 \qquad (2.18)$$

необходимо вытекает, что почти всюду $\Phi(\xi) \equiv 0$, т. е. $f(\eta) \equiv 0$. Имеем

$$\rho(\xi)\Phi(\xi) = \int_a^b f(\eta)\, d\sigma(\eta) \int_a^b H_0(\eta_1, \eta)\, \varphi(\xi, \eta_1)\, d\sigma(\eta_1) =$$

$$= \int_a^b \varphi(\xi, \eta_1)\left[f(\eta_1) + \int_{\eta_1}^b H(\eta, \eta_1) f(\eta)\, d\sigma(\eta)\right] d\sigma(\eta_1) \qquad (2.19)$$

Так как

$$\left[f(\eta_1) + \int_{\eta_1}^b H(\eta, \eta_1) f(\eta)\, d\sigma(\eta)\right] \in L_{2,\sigma}$$

то, используя равенство Парсеваля для φ-преобразования, осуществляемого формулами (2.2)

$$\int_{-\infty}^{\infty} F^2(\xi)\, d\tau(\xi) = \int_a^b f^2(x)\, d\sigma(x)$$

получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho^2(\xi)\, \Phi^2(\xi)\, d\tau(\xi) = \int_a^b \left[f(\eta_1) + \int_{\eta_1}^b H(\eta, \eta_1) f(\eta)\, d\sigma(\eta)\right]^2 d\sigma(\eta_1) \qquad (2.20)$$

Отсюда, вследствие (2.18)

$$f(\eta_1)+\int_{\eta_1}^{b} H(\eta,\eta_1) f(\eta)\,d\sigma(\eta)=0 \qquad (2.21)$$

Уравнение (2.21) представляет собой регулярное ($f(\eta)$ — финитна) уравнение Вольтерра относительно $f(\eta_1)$, которое может иметь только тривиальное решение $f(\eta_1)\equiv 0$. Следовательно, $\Phi(\xi)\equiv 0$.

Для доказательства единственности решения уравнения (2.14) при каждом фиксированном x достаточно показать, что однородное уравнение

$$\psi(\eta_1)+\int_{a}^{x} \Psi(\eta,\eta_1)\psi(\eta)\,d\sigma(\eta)=0 \qquad (2.22)$$

имеет лишь тривиальное решение. Предположим, что существует функция $\psi(\eta_1)\not\equiv 0$, удовлетворяющая уравнению (2.22). Подставляя в (2.22) вместо $\Psi(\eta,\eta_1)$ ее значение из (2.13) и меняя порядок интегрирования, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho^2(\xi)\,u(\xi,\eta_1)\,d\tau(\xi)\int_{a}^{x}\psi(\eta)\,u(\xi,\eta)\,d\sigma(\eta)=0 \qquad (2.23)$$

Пусть $\psi_1(\eta)$ — финитная функция

$$\psi_1(\eta)=\begin{cases}\psi(\eta) & (a<\eta\leqslant x)\\ 0 & (\eta>x)\end{cases}$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho^2(\xi)\,u(\xi,\eta_1)\,d\tau(\xi)\int_{a}^{b}\psi_1(\eta)\,u(\xi,\eta)\,d\sigma(\eta)=0 \qquad (2.24)$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho^2(\xi)\,\Phi_1(\xi)\,u(\xi,\eta_1)\,d\tau(\xi)=0 \qquad (2.25)$$

где Φ_1 есть u-преобразование функции $\psi_1(\eta)$. Умножим левую и правую части (2.25) на $\psi_1(\eta_1)$ и проинтегрируем по мере $\sigma(\eta_1)$ от a до b, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho^2(\xi)\,\Phi^2(\xi)\,d\tau(\xi)=0 \qquad (2.26)$$

Отсюда в силу (2.18) и следствия из него должно быть $\psi(\eta)\equiv 0$, что противоречит нашему предположению. Итак, уравнение (2.22) имеет только тривиальное решение, следовательно интегральное уравнение (2.14) имеет единственное решение $K(x,\eta)$. Определив $K(x,\eta)$ из уравнения (2.14) каким-либо известным методом, по формуле (2.3) получим функцию $\varphi(\xi, x)$, а затем из (2.5) найдем второе ортогонализирующее ядро $H_0(x,\eta)$.

Таким образом, интегральные операторы, связанные с ядрами $K(x,\eta)$ и $H(x,\eta)$, позволяют осуществить ортогонализацию функций

$\rho(\xi)u(\xi, \eta)$ и $\rho^{-1}(\xi)\,u(\xi, \eta)$, причем, что очень важно, интегрирование производится в пределах каждого из интервалов, на которых заданы парные уравнения (2.1). Эта ортогонализация дает возможность привести парные уравнения к одному интегральному уравнению, решение которого сразу следует из формулы обращения. Умножив обе части первого уравнения (2.1) на

$$K_0(x, \eta) = [\sigma'(\eta)]^{-1}\,\delta(x-\eta) + \begin{cases} K(x, \eta) & (\eta < x) \\ 0 & (\eta > x) \end{cases}$$

а обе части второго на $H_0(x, \eta)$ и интегрируя по мере $\sigma(\eta)$ от a до b, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,\varphi(\xi, x)\,d\tau(\xi) = \begin{cases} G_1(x) & (a<x<c) \\ G_2(x) & (c<x<b) \end{cases} \tag{2.27}$$

$$G_1(x) = g_1(x) + \int_a^x K(x, \eta)\,g_1(\eta)\,d\sigma(\eta),$$

$$G_2(x) = g_2(x) + \int_x^b H(\eta, x)\,g_2(\eta)\,d\sigma(\eta)$$

Обращая (2.27), находим решение парных интегральных уравнений (2.1) в виде

$$f(\xi) = \int_a^c G_1(x)\,\varphi(\xi, x)\,d\sigma(x) + \int_c^b G_2(x)\,\varphi(\xi, x)\,d\sigma(x) \tag{2.28}$$

3. В случае парных рядов

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n f_n u_n(\eta)\,\tau_n &= g_1(\eta) \qquad (a<\eta<c) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n^{-1} f_n u_n(\eta)\,\tau_n &= g_2(\eta) \qquad (c<\eta<b) \end{aligned} \tag{3.1}$$

метод решения ничем не отличается от изложенного в предыдущем пункте. Как уже отмечалось, ряды (3.1) можно рассматривать, как частный случай парных уравнений (2.1), когда $\tau(\xi)$ представляет собой функцию скачков. Поэтому мы сразу же выпишем решение парных рядов (3.1) в виде

$$f_n = \int_a^c \left[u_n(x) + \int_a^x K(x, \eta_1)\,u_n(\eta_1)\,d\sigma(\eta_1)\right]\left[g_1(x) + \int_a^x K(x, \eta)\,g_1(\eta)\,d\sigma(\eta)\right]d\sigma(x) +$$

$$+ \int_c^b \left[u_n(x) + \int_a^x K(x, \eta_1)\,u_n(\eta_1)\,d\sigma(\eta_1)\right]\left[g_2(x) + \int_x^b H(\eta, x)\,g_2(\eta)\,d\sigma(\eta)\right]d\sigma(x) \tag{3.2}$$

Здесь

$$H(\eta, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n u_n(\eta)\,\varphi_n(x)\,\tau_n - [\sigma'(\eta)]^{-1}\,\delta(x-\eta)$$

а $K(x, \eta)$ — решение интегрального уравнения (2.14) при

$$\Psi(\eta, x) = \sum_{n=0}^{\infty} [\rho_n^2 - 1]\,u_n(x)\,u_n(\eta)\,\tau_n \tag{3.3}$$

При этом, конечно, предполагается, что $u_n(x)$ — система функций, ортогональных с весом $\sigma'(x)$ и нормировочными числами τ_n на интервале (a, b).

4. Предлагаемым методом можно решать также и системы парных интегральных уравнений. Пусть, например, дана система

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\rho(\xi)\,[f_1(\xi)+\alpha_1 f_2(\xi)]\,u(\xi,\eta)\,d\tau(\xi)=g_1(\eta)\\ \int_{-\infty}^{\infty}\rho(\xi)\,[f_1(\xi)+\beta_1 f_2(\xi)]\,u(\xi,\eta)\,d\tau(\xi)=g_3(\eta)\end{aligned}\right\}\quad (a<\eta<c)\qquad(4.1.1)$$

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\rho^{-1}(\xi)\,[f_1(\xi)+\alpha_2 f_2(\xi)]\,u(\xi,\eta)\,d\tau(\xi)=g_2(\eta)\\ \int_{-\infty}^{\infty}\rho^{-1}(\xi)\,[f_1(\xi)+\beta_2 f_2(\xi)]\,u(\xi,\eta)\,d\tau(\xi)=g_4(\eta)\end{aligned}\right\}\quad (c<\eta<b)\qquad(4.1.2)$$

Умножая левые и правые части (4.1.1) на $K_0(x,\eta)$ и (4.1.2) на $H_0(x,\eta)$ и интегрируя по мере $\sigma(\eta)$, получаем

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}[f_1(\xi)+\alpha_1 f_2(\xi)]\,\varphi(\xi,x)\,d\tau(\xi)=G_1(x)\\ \int_{-\infty}^{\infty}[f_1(\xi)+\beta_1 f_2(\xi)]\,\varphi(\xi,x)\,d\tau(\xi)=G_3(x)\end{aligned}\right\}\quad (a<x<c)\qquad(4.2.1)$$

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}[f_1(\xi)+\alpha_2 f_2(\xi)]\,\varphi(\xi,x)\,d\tau(\xi)=G_2(x)\\ \int_{-\infty}^{\infty}[f_1(\xi)+\beta_2 f_2(\xi)]\,\varphi(\xi,x)\,d\tau(\xi)=G_4(x)\end{aligned}\right\}\quad (c<x<b)\qquad(4.2.2)$$

Обозначим

$$F_n(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_n(\xi)\,\varphi(\xi,x)\,d\tau(\xi)\qquad(n=1,2)$$

тогда из (4.2.1) имеем

$$F_1(x)=\frac{\alpha_1 G_3(x)-\beta_1 G_1(x)}{\alpha_1-\beta_1},\qquad F_2(x)=\frac{G_1(x)-G_3(x)}{\alpha_1-\beta_1}\qquad(a<x<c)\qquad(4.3.1)$$

и из (4.2.2)

$$F_1(x)=\frac{\alpha_2 G_4(x)-\beta_2 G_2(x)}{\alpha_2-\beta_2},\qquad F_2(x)=\frac{G_2(x)-G_4(x)}{\alpha_2-\beta_2}\qquad(c<x<b)\qquad(4.3.2)$$

Обращая (4.3), получаем решение системы (4.1)

$$f_1(\xi)=\frac{1}{\alpha_1-\beta_1}\int_a^c[\alpha_1 G_3(x)-\beta_1 G_1(x)]\,\varphi(\xi,x)\,d\sigma(x)+\qquad(4.4)$$
$$+\frac{1}{\alpha_2-\beta_2}\int_c^b[\alpha_2 G_4(x)-\beta_2 G_2(x)]\,\varphi(\xi,x)\,d\sigma(x)$$

$$f_2(\xi)=\frac{1}{\alpha_1-\beta_1}\int_a^c[G_1(x)-G_3(x)]\,\varphi(\xi,x)\,d\sigma(x)+\qquad(4.5)$$
$$+\frac{1}{\alpha_2-\beta_2}\int_c^b[G_2(x)-G_4(x)]\,\varphi(\xi,x)\,d\sigma(x)$$

5. Полученные выше результаты относятся к парным интегральным уравнениям с ортогональными ядрами, для которых справедливы формулы (2.2), обеспечивающие получение интегрального уравнения (2.14) для определения ортогонализирующих ядер. Однако проведение ортогонализации и получение интегрального уравнения типа (2.14) возможно и в более общем случае, а именно для всех тех уравнений, которые на интервале $(a,\ b)$ допускают обращение. Для уравнений (1.1), а также, например, для парных уравнений более общего типа

$$\begin{aligned} &\int\limits_{(L)} [1+h(\xi)]\,\psi(\xi)\,u(\xi,\eta)\,d\tau(\xi)=g_1(\eta) \qquad (a<\eta<c)\\ &\int\limits_{(L)} \psi(\xi)\,u(\xi,\eta)\,d\tau(\xi)=g_2(\eta) \qquad (c<\eta<b)\end{aligned} \tag{5.1}$$

где (L) — некоторый контур в комплексной плоскости, решение по предлагаемому методу можно получить в тех случаях, когда для уравнения

$$\int\limits_{(L)} f(\xi)\,u(\xi,\eta)\,d\tau(\xi)=g(\eta) \qquad (a<\eta<b) \tag{5.2}$$

известна формула обращения в виде

$$f(\xi)=\int\limits_a^b g(\eta)\,v(\xi,\eta)\,d\sigma(\eta) \tag{5.3}$$

Соотношения (5.2) и (5.3) имеют место для интегральных преобразований с несимметричными ядрами и, в частности, для разложений по собственным функциям несамосопряженных дифференциальных операторов, а также в некоторых специальных случаях. Например, известно [3], что при некоторых условиях интегральное уравнение с ядром, зависящим от произведения аргументов

$$\int\limits_0^\infty F(\xi)\,k_1(\xi x)\,d\xi=f(x) \qquad (0\leqslant x<\infty) \tag{5.4}$$

имеет решение

$$F(\xi)=\int\limits_0^\infty f(x)\,k_2(\xi x)\,dx \tag{5.5}$$

$$k_2(\xi x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{(\xi x)^{-s}}{\mathrm{K}_1(1-s)}\,ds \qquad \left(\mathrm{K}_1(1-s)=\int\limits_0^\infty k_1(x)\,x^{-s}\,dx\right) \tag{5.6}$$

Здесь через $\mathrm{K}_1(1-s)$ обозначено преобразование Меллина функции $k_1(x)$.

Аналогичные зависимости легко установить также для уравнений, заданных на всей оси, с ядрами, зависящими от разности или суммы аргументов

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\,k_1(x\pm\xi)\,d\xi=f(x) \tag{5.7}$$

Формула обращения имеет вид

$$F(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,k_2(x\pm\xi)\,dx \qquad \left(k_2(x\pm\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp[ip(x\pm\xi)]}{k_1^*(p)}\,dp\right) \tag{5.8}$$

Здесь $k_1^*(p)$ есть преобразование Фурье функции $k_1(x)$.

Подставляя (5.3) в (5.2) и наоборот, находим

$$\sigma'(\eta)\int_{(L)} u(\xi,\eta)\,v(\xi,\eta_1)\,d\tau(\xi)=\delta(\eta-\eta_1),$$

$$\tau'(\xi)\int_a^b u(\xi,\eta)\,v(\xi_1,\eta)\,d\sigma(\eta)=\delta(\xi-\xi_1) \tag{5.9}$$

Ортогонализирующие ядра $K(x,\eta)$ и $H(x,\eta)$ находим из соотношений

$$\rho^{-1}(\xi)\,\varphi(\xi,x)=u(\xi,x)+\int_a^x K(x,\eta)\,u(\xi,\eta)\,d\sigma(\eta) \tag{5.10}$$

$$\rho(\xi)\,\varphi(\xi,x)=u(\xi,x)+\int_x^b H(\eta,x)\,u(\xi,\eta)\,d\sigma(\eta) \tag{5.11}$$

Здесь, как и выше $\rho(\xi)=\sqrt{1+h(\xi)}$. Умножая (5.11) на $v(\xi,\eta_1)$ и интегрируя по $\tau(\xi)$ вдоль контура (L), получаем

$$\int_{(L)}\rho(\xi)\,\varphi(\xi,x)\,v(\xi,\eta_1)\,d\tau(\xi)=\frac{\delta(x-\eta_1)}{\sigma'(\eta_1)}+\begin{cases}H(\eta_1,x) & (x<\eta_1)\\ 0 & (x>\eta_1)\end{cases} \tag{5.12}$$

Используя теперь (5.10), находим для $x>\eta_1$

$$\Psi_1(x,\eta_1)+\int_a^x K(x,\eta)\,\Psi_1(\eta,\eta_1)\,d\sigma(\eta)+K(x,\eta_1)=0 \tag{5.13}$$

где

$$\Psi_1(x,\eta_1)=\int_{(L)} h(\xi)\,u(\xi,x)\,v(\xi,\eta_1)\,d\tau(\xi) \tag{5.14}$$

6. В отдельных случаях удается осуществить ортогонализацию и определить ортогонализирующие ядра без решения интегральных уравнений (2.14) или (5.13) Если, исходя из каких-либо соображений, можно предугадать вид функции $\varphi(\xi,x)$, то ядро $K_0(x,\eta)$ определяется по формуле

$$K_0(x,\eta)=\int_{(L)}\rho^{-1}(\xi)\,\varphi(\xi,x)\,v(\xi,\eta)\,d\tau(\xi) \tag{6.1}$$

получающейся путем обращения (5.10), а ядро $H_0(x,\eta)$ по формуле

$$H_0(x,\eta)=\int_{(L)}\rho(\xi)\,\varphi(\xi,x)\,v(\xi,\eta)\,d\tau(\xi) \tag{6.2}$$

Аналогичные соотношения имеют место и для ядер $K_0(x,\eta)$ и $H_0(x,\eta)$ в случае парных уравнений (2.1).

7. Рассмотрим для иллюстрации плоскую контактную задачу теории упругости для бесконечного клина в полярных координатах. Пусть конец клина, угол которого равен 2α, на участке $0<r<1$ обжимается без трения симметричными жесткими штампами, так что граничные условия задачи имеют следующий вид

$$\begin{aligned} v(r,\pm\alpha)&=g(r) && (0<r<1)\\ \sigma_\theta(r,\pm\alpha)&=0 && (1<r<\infty)\\ \tau_{r\theta}(r,\pm\alpha)&=0 && (0<r<\infty)\end{aligned} \tag{7.1}$$

Как известно, задачи о клине успешно решаются при помощи преобразования Меллина. Вводя преобразования Меллина σ_r^*, σ_θ^*, $\tau_{r\theta}^*$ напряжений σ_r, σ_θ, $\tau_{r\theta}$ и предполагая, что напряжения имеют порядок $r^{-\varepsilon_1}$ ($\varepsilon_1 > 1$) при $r \to \infty$ и $r^{-\varepsilon_2}$ ($\varepsilon_2 < 1$) при $r \to 0$, из уравнений равновесия и условия сплошности можно получить обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка относительно σ_θ^*, решение которого имеет вид [24]

$$\sigma_\theta^* = A \cos(p+1)\theta + B\cos(p-1)\theta + C\sin(p+1)\theta + D\sin(p-1)\theta \quad (7.2)$$

причем

$$\sigma_r^* = \frac{1}{p}\left(\frac{\sigma_\theta^{*''}}{p-1} - \sigma_\theta^*\right), \qquad \tau_{r\theta}^* = \frac{1}{p-1}\sigma_\theta^{*'} \quad (7.3)$$

Здесь p ($\varepsilon_2 - 1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_1 - 1$) — комплексный параметр в преобразовании Меллина. Из условия симметрии напряжений относительно луча $\theta = 0$ следует $C = D = 0$. Используя (7.3) и последнее условие в (7.1), находим, кроме того,

$$B(p) = -A(p)\frac{(p+1)\sin(p+1)\alpha}{(p-1)\sin(p-1)\alpha} \quad (7.4)$$

Так как (при обобщенном плоском напряженном состоянии)

$$u = \frac{1}{E}\int_r^\infty (\sigma_r - \nu\sigma_\theta)\,dr, \qquad v = \frac{r}{E}\int_0^\theta (\sigma_\theta - \nu\sigma_r)\,d\theta - \int_0^\theta u\,d\theta \quad (7.5)$$

где ν — коэффициент Пуассона, то, используя (7.2) и (7.3), получаем после обращения преобразований σ_θ^* и σ_r^* в соответствии с (7.1) следующие парные интегральные уравнения относительно функции $A_1(p)$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(L)} A_1(p)\rho(p)\frac{dp}{r^p} = -Eg(r) \quad (0 < r < 1), \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{(L)} \frac{A_1(p)\,dp}{r^p\rho(p)} = 0 \quad (1 < r < \infty)$$

$$A_1(p) = A(p)f_0(p)f_1(p), \qquad f_0(p) = \frac{2\left[(p^2+p+\nu-1)\sin(p+1)\alpha\right]^{1/2}}{p^2-1}$$

$$\rho(p) = \frac{f_0(p)}{f_1(p)}, \quad f_1(p) = \left[\cos(p+1)\alpha - \frac{(p+1)\sin(p+1)\alpha}{(p-1)\sin(p-1)\alpha}\cos(p-1)\alpha\right]^{1/2} \quad (7.6)$$

Здесь (L) — вертикальная прямая внутри полосы ($\varepsilon_2 - 1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_1 - 1$).

Для решения парных уравнений (7.6) следует найти ортогонализирующее ядро $K(x, r)$ из уравнения

$$\Psi(x, r) + \int_0^x K(x, r_1)\Psi(r, r_1)\,dr_1 + K(x, r) = 0 \quad (7.7)$$

где

$$\Psi(x, r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(L)} [\rho^2(p) - 1]\,x^{-p} r^{p-1}\,dp \quad (7.8)$$

После определения ядра $K(x, r)$ из (7.7) решение парных уравнений (7.6) запишется в виде

$$A_1(p) = -E\rho(p)\int_0^1 \left[x^{p-1} + \int_0^x K(x, x_1)x_1^{p-1}\,dx_1\right]\left[g_1(x) + \int_0^x K(x, r)g_1(r)\,dr\right]dx \quad (7.9)$$

а напряжения могут быть определены при помощи формул обращения Меллина из (72.) и (7.3).

Поступила 22 VI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Weber H. Über die Besselschen Funktionen und ihre Anwengung an die Theorie der Electrischen Ströme. J. Math., 1873, 75.
2. Beltrami E. Sulla teoria della funzioni potenziali simmetriche. Rend. Acc. Sci. Bologna, 1881, 461.
3. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М., Гостехиздат, 1948.
4. Busbridge I. W. Dual integral equations. Proc. London Math. Soc. 1938, vol. 44, ser. 2. p. 115.
5. Tranter C. J. A further note on dual integral equations and an applications to the diffraction of electromagnetic waves. Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1954, v. 7, p. 3.
6. Cooke J. C. A solution of Tranter's dual integral equations problem. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1956, v. 9, p. 1.
7. Лебедев Н. Н. Распределение электричества на тонком параболическом сегменте. Докл. АН СССР, 1957, т. 114, № 3.
8. Noble B. Certain dual integral equations. J. Math. and Phys. 1958, v. 37, p. 2.
9. Erdelyi A. and Sneddon J. N. Fractional integration and dual integral equations. Canad. J. Math., 1962, v. 14, No 4.
10. Noble B. The approximate solution of dual integral equations by variatinal methods. Proc. Edinburgh Math. Soc., 1958, v. 11, p. 2.
11. Ахиезер Н. И. О некоторых спаренных интегральных уравнениях. Докл. АН СССР, 1954, т. 98, № 3.
12. Love E. R. Dual integral equations. Canad. J. Math. 1963, v. 15, No 4.
13. Баблоян А. А. Решение некоторых парных интегральных уравнений. ПММ, 1964, т. 28, вып. 6.
14. Srivastav R. P. A Pair of dual integral equations involving Bessel Functionen of the first and the second kind. Proc. Edinburgh Math. Soc. 1964, v. 14, p. 2.
15. Нобл Б. Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд. иностр. лит., 1962.
16. Shepherd W. M. On trigonometrical series with mixed conditions. Proc. London Math. Soc., 1937, ser. 2, v. 43, p. 3.
17. Tranter C. J. A further note on dual trigonometrical series. Proc. Glasgow Math. Assoc., 1960, v. 4, p. 4.
18. Sneddon J. N., Srivastav R. P. Dual series Relations; Dual relations involving Fourier — Bessel series. Proc. Roy. Soc. Edinburgh. A., 1962—63, 66.
19. Williams W. E. Note on the reduction of dual and triple series equations to dual and triple integral equations. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1963, v. 59, No 4.
20. Noble B. Some dual series equations inolving Jacobi polynomials. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1963, v. 59, No 2.
21. Баблоян А. А. Решение некоторых парных рядов. Докл. АН Арм. ССР, 1964, т. 39, № 5.
22. Гельфанд И. М., Левитан Б. М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции. Изв. АН СССР, сер. матем., 1951, т. 15, № 4.
23. Левитан Б. М., Гасымов М. Г. Определение дифференциального уравнения по двум спектрам. Успехи матем. наук. 1964, т. 19, № 2 (116).
24. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Изд-во Акад. наук СССР, 1963.