Прикладная математика и механика. Том 30, 1966

ОБ ОДНОМ РАЗЛОЖЕНИИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФУНКЦИИ В ИНТЕГРАЛ ПО СФЕРИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ

Н. Н. Лебедев, И. П. Скальская
(Ленинград)

В работе получена теорема разложения произвольной функции в интеграл по сферическим функциям, родственная интегральному разложению Мелера—Фока. Ниже излагается математический аппарат для решения краевых задач математической физики и теории упругости для однополостного гиперболоида вращения.

§ 1. **Введение.** При решении многих задач математической физики важную роль играет представление произвольной функции, определенной в промежутке $(1, \infty)$, в виде интеграла Мелера — Фока [1-3]

$$f(x)=\int_0^\infty \tau \operatorname{th}\pi\tau \, P_{-1/2+i\tau}(x)\,d\tau \int_1^\infty f(y)\,P_{-1/2+i\tau}(y)\,dy \qquad (1<x<\infty) \tag{1.1}$$

где $P_\nu(x)$ — сферическая функция Лежандра первого рода.

В частности, это разложение встречается при применении метода разделения переменных к краевым гармоническим задачам для областей, ограниченных поверхностью двуполостного гиперболоида вращения или поверхностью двух пересекающихся сфер [3-5], а также к некоторым задачам теории упругости [6].

В работе рассматривается родственное интегральное разложение

$$\begin{aligned} f(x)=\int_0^\infty \frac{\tau \operatorname{th}\pi\tau}{\operatorname{ch}\pi\tau}\Big\{&\frac{P_{-1/2+i\tau}(ix)+P_{-1/2+i\tau}(-ix)}{2}\int_{-\infty}^\infty f(y)\,\frac{P_{-1/2+i\tau}(iy)+P_{-1/2+i\tau}(-iy)}{2}\,dy+\\ &+\frac{P_{-1/2+i\tau}(ix)-P_{-1/2+i\tau}(-ix)}{2i}\int_{-\infty}^\infty f(y)\,\frac{P_{-1/2+i\tau}(iy)-P_{-1/2+i\tau}(-iy)}{2i}\,dy\Big\}\,d\tau \\ &(-\infty<x<\infty) \end{aligned} \tag{1.2}$$

которое представляет собой аналог формулы (1.1) для краевых задач, относящихся к областям, ограниченным поверхностью однополостного гиперболоида вращения.

Для весьма ограниченного класса функций представление (1.2) можно получить из общей теории разложений по собственным функциям линейных сингулярных дифференциальных операторов (Вейль [7], § 2, стр. 454—455; Титчмарш [8], стр.119—120).

Цель данной работы заключается в том, чтобы дать прямое, относительно простое, доказательство формулы (1.2), основывающееся на непосредственном изучении свойств сферических функций и позволяющее установить справедливость рассматриваемой формулы для широкого класса функций. Результаты исследования могут быть сформулированы в виде теоремы.

Теорема. Пусть $f(x)$ — заданная функция, определенная в промежутке $(-\infty, \infty)$ и удовлетворяющая следующим условиям.

(1) Функция $f(x)$ — кусочно-непрерывная и имеет ограниченную вариацию в открытом промежутке $(-\infty, \infty)$.

(2) Далее

$$f(x)|x|^{-1/2}\ln(1+|x|)\in L(-\infty,\ -a)$$
$$f(x)x^{-1/2}\ln(1+x)\in L(a,\ \infty)\quad (a>0)$$

Тогда имеет место разложение

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]= \qquad (-\infty<x<\infty) \tag{1.3}$$
$$=\int_0^\infty \frac{\tau\,\mathrm{th}\,\pi\tau}{\mathrm{ch}\,\pi\tau}\left\{\frac{P_{-1/2+i\tau}(ix)+P_{-1/2+i\tau}(-ix)}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\frac{P_{-1/2+i\tau}(iy)+P_{-1/2+i\tau}(-iy)}{2}dy+\right.$$
$$\left.+\frac{P_{-1/2+i\tau}(ix)-P_{-1/2+i\tau}(-ix)}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\frac{P_{-1/2+i\tau}(iy)-P_{-1/2+i\tau}(-iy)}{2i}dy\right\}d\tau$$

В частности, для четной функции

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]= \qquad (-\infty<x<\infty) \tag{1.4}$$
$$=2\int_0^\infty \frac{\tau\,\mathrm{th}\,\pi\tau}{\mathrm{ch}\,\pi\tau}\frac{P_{-1/2+i\tau}(ix)+P_{-1/2+i\tau}(-ix)}{2}d\tau\int_0^\infty f(y)\frac{P_{-1/2+i\tau}(iy)+P_{-1/2+i\tau}(-iy)}{2}dy$$

и для нечетной функции

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]= \qquad (-\infty<x<\infty) \tag{1.5}$$
$$=2\int_0^\infty \frac{\tau\,\mathrm{th}\,\pi\tau}{\mathrm{ch}\,\pi\tau}\frac{P_{-1/2+i\tau}(ix)-P_{-1/2+i\tau}(-ix)}{2i}d\tau\int_0^\infty f(y)\frac{P_{-1/2+i\tau}(iy)-P_{-1/2+i\tau}(-iy)}{2i}dy$$

Последние две формулы остаются справедливыми также для функций, определенных на промежутке $(0,\ \infty)$ и удовлетворяющих условиям[1]

(1) $f(x)$ — кусочно-непрерывная и имеет ограниченную вариацию в открытом промежутке $(0,\ \infty)$.

(2) $f(x)\in L(0,a)$, $\quad f(x)x^{-1/2}\ln(1+x)\in L(a,\ \infty)$, $\quad (a>0)$

§ 2. Некоторые оценки и асимптотические представления сферических функций. Начнем с установления некоторых свойств сферических функций, необходимых для дальнейшего. Из определения функций Лежандра $P_\nu(z)$ и $Q_\nu(z)$ ($Q_\nu(z)$ — функции второго рода) следует, что для произвольного комплексного ν

$$\frac{P_{\nu-1/2}(i\,\mathrm{sh}\,\alpha)+P_{\nu-1/2}(-i\,\mathrm{sh}\,\alpha)}{2}=\frac{\Gamma(1/2+\nu)\cos(1/2\,\pi\nu-1/4\,\pi)}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma(1+\nu)\sqrt{\mathrm{ch}\,\alpha}}\times \tag{2.1}$$
$$\times\left\{e^{\alpha\nu}F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1+\nu,\ \frac{e^{\alpha}}{2\,\mathrm{ch}\,\alpha}\right)+e^{-\alpha\nu}F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1+\nu,\ \frac{e^{-\alpha}}{2\,\mathrm{ch}\,\alpha}\right)\right\}\qquad(-\infty<\alpha<\infty)$$

$$\frac{P_{\nu-1/2}(i\,\mathrm{sh}\,\alpha)-P_{\nu-1/2}(-i\,\mathrm{sh}\,\alpha)}{2i}=\frac{\Gamma(1/2+\nu)\sin(1/2\,\pi\nu-1/4\,\pi)}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma(1+\nu)\sqrt{\mathrm{ch}\,\alpha}}\times \tag{2.2}$$
$$\times\left\{e^{\alpha\nu}F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1+\nu,\ \frac{e^{\alpha}}{2\,\mathrm{ch}\,\alpha}\right)-e^{-\alpha\nu}F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1+\nu,\ \frac{e^{-\alpha}}{2\,\mathrm{ch}\,\alpha}\right)\right\}\qquad(-\infty<\alpha<\infty)$$

$$\frac{Q_{\nu-1/2}(i\,\mathrm{sh}\,\alpha)+Q_{\nu-1/2}(-i\,\mathrm{sh}\,\alpha)}{2}=-\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\frac{\Gamma(1/2+\nu)\sin(1/2\,\pi\nu-1/4\,\pi)}{\Gamma(1+\nu)\sqrt{\mathrm{ch}\,\alpha}}\times$$
$$\times e^{-\alpha\nu}F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1+\nu,\ \frac{e^{-\alpha}}{2\,\mathrm{ch}\,\alpha}\right)\quad(\alpha\geqslant0,\quad \nu\neq-2n-1/2,\ n=0,1,2,\dots) \tag{2.3}$$

[1] Эти условия не предполагают конечности $f(x)$ при $x=0$.

$$\frac{Q_{\nu-1/2}(i\,\mathrm{sh}\,\alpha)-Q_{\nu-1/2}(-i\,\mathrm{sh}\,\alpha)}{2i}=-\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\frac{\Gamma(1/2+\nu)\cos(1/2\,\pi\nu-1/4\,\pi)}{\Gamma(1+\nu)\sqrt{\mathrm{ch}\,\alpha}}\times$$

$$\times\, e^{-\alpha\nu}F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1+\nu,\ \frac{e^{-\alpha}}{2\,\mathrm{ch}\,\alpha}\right)\qquad(\alpha\geqslant 0,\ \nu\neq-2n-3/2,\ n=0,1,2,\ldots)\tag{2.4}$$

где $F(a,\ b,\ c,\ z)$ — гипергеометрический ряд

$$F(a,b,c,z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k\,k!}z^k\qquad(|z|<1)\tag{2.5}$$

$$(\lambda)_k=\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k-1),\qquad(\lambda)_0=1$$

Воспользовавшись представлениями (2.1) — (2.2) и неравенством

$$|F(1/2,1/2,1+i\tau,x)|\leqslant F(1/2,1/2,1,x)\qquad(0\leqslant\tau<\infty,\ 0\leqslant x<1)$$

легко получаем оценки для рассматриваемых функций

$$\left|\frac{P_{-1/2+i\tau}(ix)+P_{-1/2+i\tau}(-ix)}{2}\right|\leqslant\left(\frac{\mathrm{sh}\,\pi\tau}{\pi\tau}\right)^{1/2}\frac{P_{-1/2}(ix)+P_{-1/2}(-ix)}{2}$$

$$(0\leqslant\tau<\infty,\ -\infty<x<\infty)\tag{2.6}$$

$$\left|\frac{P_{-1/2+i\tau}(ix)-P_{-1/2+i\tau}(-ix)}{2i}\right|<\left(\frac{\mathrm{sh}\,\pi\tau}{\pi\tau}\right)^{1/2}\frac{P_{-1/2}(ix)+P_{-1/2}(-ix)}{2}$$

$$(0\leqslant\tau<\infty,\ -\infty<x<\infty)\tag{2.7}$$

Чтобы получить асимптотические представления сферических функций в области, $|\nu|\to\infty$, $|\arg\nu|\leqslant 1/2\,\pi$, заметим, что каждая из гипергеометрических функций, входящих в (2.1) — (2.4), может быть представлена в форме

$$F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1+\nu,\ x\right)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1/2)_k(1/2)_k}{(1+\nu)_k\,k!}x^k=$$

$$=1+\frac{x}{4(1+\nu)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(3/2)_k(3/2)_k}{(2+\nu)_k(k+1)!}x^k=1+r(\nu,x),$$

где для остаточного члена имеет место оценка[1]

$$|r(\nu,x)|\leqslant\frac{x}{4\,|1+\nu|}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(3/2)_k}{k!}x^k=\frac{x}{4\,|1+\nu|}(1-x)^{-3/2}$$

Последний результат показывает, что (2.8)

$$F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},1+\nu,\frac{e^{\pm\alpha}}{2\,\mathrm{ch}\,\alpha}\right)=1+e^{\pm2\alpha}(e^{\pm2\alpha}+1)^{1/2}O(|\nu|^{-1})\qquad|\nu|\to\infty,\ |\arg\nu|\leqslant 1/2\,\pi$$

где символ O не зависит от α. Воспользовавшись (2.8) и известными асимптотическими представлениями для гамма-функций, находим[2]

$$\frac{P_{\nu-1/2}(i\,\mathrm{sh}\,\alpha)+P_{\nu-1/2}(-i\,\mathrm{sh}\,\alpha)}{2P_{\nu-1/2}(0)}=\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{ch}\,\alpha}}\{e^{\alpha\nu}[1+(e^{2\alpha}+1)^{3/2}O(|\nu|^{-1})]+$$

$$+e^{-\alpha\nu}[1+(e^{-2\alpha}+1)^{3/2}O(|\nu|^{-1})]\}\qquad(-\infty<\alpha<\infty,\ |\nu|\to\infty,\ |\arg\nu|\leqslant 1/2\,\pi)\tag{2.9}$$

---

[1] Здесь принято во внимание неравенство

$$\left|\frac{(3/2)_k}{(2+\nu)_k}\right|_{k=0,1,2,\ldots}\leqslant 1,\qquad|\arg\nu|\leqslant\frac{\pi}{2}$$

[2] Множитель

$$P_{\nu-1/2}(0)=\frac{\cos\pi\nu}{2\pi\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{\nu}{2}\right)$$

введен для более симметричной записи формул (2.9) — (2.12).

$$\frac{\pi\nu P_{\nu-1/2}(0)}{\cos\pi\nu}\frac{P_{\nu-1/2}(i\operatorname{sh}\alpha)-P_{\nu-1/2}(-i\operatorname{sh}\alpha)}{2i}=\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{ch}\alpha}}\{e^{-\alpha\nu}[1+(e^{-2\alpha}+1)^{3/2}O(|\nu|^{-1})]-$$
$$-e^{\alpha\nu}[1+(e^{2\alpha}+1)^{3/2}O(|\nu|^{-1})]\}\quad(-\infty<\alpha<\infty,\ |\nu|\to\infty,\ |\arg\nu|\leqslant {}^1/_2\pi)\quad(2.10)$$

$$\frac{\nu P_{\nu-1/2}(0)}{\cos\pi\nu}\frac{Q_{\nu-1/2}(i\operatorname{sh}\alpha)+Q_{\nu-1/2}(-i\operatorname{sh}\alpha)}{2}=\frac{e^{-\alpha\nu}}{2\sqrt{\operatorname{ch}\alpha}}[1+(e^{-2\alpha}+1)^{3/2}O(|\nu|^{-1})]$$
$$(\alpha\geqslant 0,\ |\nu|\to\infty,\ |\arg\nu|\leqslant {}^1/_2\pi)\quad(2.11)$$

$$\frac{Q_{\nu-1/2}(i\operatorname{sh}\alpha)-Q_{\nu-1/2}(-i\operatorname{sh}\alpha)}{2\pi i P_{\nu-1/2}(0)}=-\frac{e^{-\alpha\nu}}{2\sqrt{\operatorname{ch}\alpha}}[1+(e^{-2\alpha}+1)^{3/2}O(|\nu|^{-1})]$$
$$(\alpha\geqslant 0,\ |\nu|\to\infty,\ |\arg\nu|\leqslant {}^1/_2\pi)\quad(2.12)$$

Полученные формулы (2.9) — (2.12) отличаются от обычных асимптотических представлений сферических функций тем, что они содержат оценку остаточного члена, пригодную для всего рассматриваемого интервала изменения переменной α.

§ 3. Доказательство теоремы разложения. Доказательство теоремы удобно провести отдельно для четного и нечетного случаев (формулы (1.4) — (1.5)). Справедливость теоремы для произвольной функции $f(x)$ следует тогда из разложения

$$f(x)={}^1/_2\,[f(x)+f(-x)]+{}^1/_2\,[f(x)-f(-x)]$$

Предположим, что $f(x)$ — четная функция и рассмотрим интеграл

$$J(T,x)=2\int_0^T\frac{\tau\operatorname{th}\pi\tau}{\operatorname{ch}\pi\tau}\frac{P_{-1/2+i\tau}(ix)+P_{-1/2+i\tau}(-ix)}{2}\,d\tau+$$
$$+\int_0^\infty f(y)\frac{P_{-1/2+i\tau}(iy)+P_{-1/2+i\tau}(-iy)}{2}\,dy\qquad(-\infty<x<\infty,\ T>0)\quad(3.1)$$

Подынтегральное выражение во внутреннем интеграле представляет непрерывную функцию параметра τ и кусочно-непрерывную функцию y в открытом промежутке $(0,\infty)$. Из (2.6) следует оценка [1]

$$\int_0^\infty\left|f(y)\frac{P_{-1/2+i\tau}(iy)+P_{-1/2+i\tau}(-iy)}{2}\right|dy\leqslant\left(\frac{\operatorname{sh}\pi T}{\pi T}\right)^{1/2}\int_0^\infty|f(y)|\frac{P_{-1/2}(iy)+P_{-1/2}(-iy)}{2}\,dy=$$
$$=O(1)\left\{\int_0^a|f(y)|\,dy+\int_a^\infty|f(y)|\,y^{-1/2}\ln(1+y)\,dy\right\}$$

показывающая, что сходимость интеграла будет мажорированной. Поэтому рассматриваемый интеграл представляет собой непрерывную функцию τ, и повторный интеграл (3.1) имеет смысл. Далее, на основании мажорированной сходимости можно изменить порядок интегрирования и представить $J(T,x)$ в виде

$$J(T,x)=\int_0^\infty f(y)\,K(x,y,T)\,dy\quad(3.2)$$

$$K(x,y,T)=2\int_0^T\frac{\tau\operatorname{th}\pi\tau}{\operatorname{ch}\pi\tau}\frac{P_{-1/2+i\tau}(ix)+P_{-1/2+i\tau}(-ix)}{2}\frac{P_{-1/2+i\tau}(iy)+P_{-1/2+i\tau}(-iy)}{2}\,d\tau\quad(3.3)$$

Так как подынтегральное выражение — четная функция τ, то

$$K(x,y,T)=-\frac{1}{i}\int_{-iT}^{iT}\frac{\nu\operatorname{tg}\pi\nu}{\cos\pi\nu}\frac{P_{\nu-1/2}(ix)+P_{\nu-1/2}(-ix)}{2}\frac{P_{\nu-1/2}(iy)+P_{\nu-1/2}(-iy)}{2}\,d\nu\quad(3.4)$$

---

[1] $$\frac{P_{-1/2}(iy)+P_{-1/2}(-iy)}{2}=\begin{cases}O(1), & y\in(0,a)\\ O(1)\,y^{-1/2}\ln(1+y), & y\in(a,\infty)\end{cases}$$

Пусть x — фиксированное положительное число. Тогда, в зависимости от того, $y \leqslant x$ или $y \geqslant x$, удобно представить ядро $K(x, y, T)$ в одной из форм [1] (3.5)

$$K(x,y,T)=\frac{2}{\pi i}\int_{-iT}^{iT}\frac{\nu}{\cos\pi\nu}\,\frac{P_{\nu-1/2}(iy)+P_{\nu-1/2}(-iy)}{2}\,\frac{Q_{\nu-1/2}(ix)+Q_{\nu-1/2}(-ix)}{2}\,d\nu \quad (y\leqslant x)$$

$$K(x,y,T)=\frac{2}{\pi i}\int_{-iT}^{iT}\frac{\nu}{\cos\pi\nu}\,\frac{P_{\nu-1/2}(ix)+P_{\nu-1/2}(-ix)}{2}\,\frac{Q_{\nu-1/2}(iy)+Q_{\nu-1/2}(-iy)}{2}\,d\nu \quad (y\geqslant x)$$

Выражения под знаком интегралов (3.5) представляют собой аналитические функции ν, регулярные [2] в полуплоскости $\operatorname{Re}\nu\geqslant 0$. Поэтому интегрирование по отрезку мнимой оси может быть в дальнейшем заменено интегрированием по полуокружности Γ_T радиуса T, расположенной в полуплоскости $\operatorname{Re}\nu\geqslant 0$.

Исследуем интеграл $J(T, x)$ при $T\to\infty$. Полагая $x=\operatorname{sh}\alpha$, $y=\operatorname{sh}\alpha'$, имеем

$$J(T,x)=\int_0^{\alpha} f(\operatorname{sh}\alpha')\,K(\operatorname{sh}\alpha,\operatorname{sh}\alpha',T)\operatorname{ch}\alpha'\,d\alpha'+\int_{\alpha}^{\infty} f(\operatorname{sh}\alpha')\,K(\operatorname{sh}\alpha,\operatorname{sh}\alpha',T)\operatorname{ch}\alpha'\,d\alpha'=$$

$$=J_1(T,\operatorname{sh}\alpha)+J_2(T,\operatorname{sh}\alpha) \qquad (3.6)$$

Пользуясь формулами (2.9), (2.11), получаем для $\nu=Te^{i\varphi}\ (-{}^1/_2\pi\leqslant\varphi\leqslant{}^1/_2\pi)$

$$\frac{\nu}{\cos\pi\nu}\,\frac{P_{\nu-1/2}(i\operatorname{sh}\alpha')+P_{\nu-1/2}(-i\operatorname{sh}\alpha')}{2}\,\frac{Q_{\nu-1/2}(i\operatorname{sh}\alpha)+Q_{\nu-1/2}(-i\operatorname{sh}\alpha)}{2}= \qquad (3.7)$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{\operatorname{ch}\alpha\operatorname{ch}\alpha'}}\left\{e^{-(\alpha-\alpha')\nu}+e^{-(\alpha+\alpha')\nu}+e^{-(\alpha-\alpha')T\cos\varphi}\,O(T^{-1})+e^{-(\alpha+\alpha')T\cos\varphi}\,O(T^{-1})\right\}$$

и из равенства (3.5) следует [3]

$$K(\operatorname{sh}\alpha,\operatorname{sh}\alpha',T)=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha\operatorname{ch}\alpha'}}\left\{\frac{\sin(\alpha-\alpha')T}{\pi(\alpha-\alpha')}+\frac{\sin(\alpha+\alpha')T}{\pi(\alpha+\alpha')}+\right.$$

$$\left.+O(1)\frac{1-e^{-(\alpha-\alpha')T}}{(\alpha-\alpha')T}+O(1)\frac{1-e^{-(\alpha+\alpha')T}}{(\alpha+\alpha')T}\right\}\qquad(0\leqslant\alpha'\leqslant\alpha) \qquad (3.8)$$

Подставляя (3.8) в первый из интегралов (3.6), находим

$$J_1(T,\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\alpha} f(\operatorname{sh}\alpha')\left(\frac{\operatorname{ch}\alpha'}{\operatorname{ch}\alpha}\right)^{1/2}\frac{\sin(\alpha-\alpha')T}{\alpha-\alpha'}\,d\alpha'+\frac{1}{\pi}\int_0^{\alpha} f(\operatorname{sh}\alpha')\left(\frac{\operatorname{ch}\alpha'}{\operatorname{ch}\alpha}\right)^{1/2}\frac{\sin(\alpha+\alpha')T}{\alpha+\alpha'}\,d\alpha'+$$

$$+O(1)\int_0^{\alpha}|f(\operatorname{sh}\alpha')|\left(\frac{\operatorname{ch}\alpha'}{\operatorname{ch}\alpha}\right)^{1/2}\frac{1-e^{-(\alpha-\alpha')T}}{(\alpha-\alpha')T}\,d\alpha'+$$

$$+O(1)\int_0^{\alpha}|f(\operatorname{sh}\alpha')|\left(\frac{\operatorname{ch}\alpha'}{\operatorname{ch}\alpha}\right)^{1/2}\frac{1-e^{-(\alpha+\alpha')T}}{(\alpha+\alpha')T}\,d\alpha' \qquad (3.9)$$

---

[1] В ходе этого преобразования принято во внимание соотношение

$$\pi\operatorname{tg}\pi\nu P_{\nu-1/2}(z)=Q_{-\nu-1/2}(z)-Q_{\nu-1/2}(z)$$

[2] Нули знаменателя $\nu={}^1/_2(2m+1)$, $m=0,1,2,\ldots$ при $m=2n$ компенсируются нулями функции $Q_{\nu-1/2}(z)+Q_{\nu-1/2}(-z)$, а при $m=2n+1$ — нулями функции $P_{\nu-1/2}(z)+P_{\nu-1/2}(-z)$.

[3] Здесь используется известное неравенство

$$\int_0^{1/2\pi} e^{-\lambda T\cos\varphi}\,d\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\,\frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda T}\qquad(\lambda\geqslant 0)$$

Первый интеграл (3.5) предварительно преобразуется в интеграл по дуге Γ_T.

Согласно теореме Дирихле[1] при $T \to \infty$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\alpha f(\operatorname{sh}\alpha')\left(\frac{\operatorname{ch}\alpha'}{\operatorname{ch}\alpha}\right)^{1/2}\frac{\sin(\alpha-\alpha')T}{\alpha-\alpha'}\,d\alpha' = \frac{1}{2}f(\operatorname{sh}\alpha-0)+o(1) \tag{3.10}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\alpha f(\operatorname{sh}\alpha')\left(\frac{\operatorname{ch}\alpha'}{\operatorname{ch}\alpha}\right)^{1/2}\frac{\sin(\alpha+\alpha')T}{\alpha+\alpha'}\,d\alpha' = o(1) \tag{3.11}$$

Далее, разбивая интервал интегрирования на промежутки $(0, \alpha - \delta)$ и $(\alpha - \delta, \alpha)$ и выбирая достаточно малое положительное δ, а затем достаточно большое T, имеем

$$\int_0^\alpha |f(\operatorname{sh}\alpha')|\left(\frac{\operatorname{ch}\alpha'}{\operatorname{ch}\alpha}\right)^{1/2}\frac{1-e^{-(\alpha-\alpha')T}}{(\alpha-\alpha')T}\,d\alpha' \leqslant \frac{1}{\delta T}\int_0^{\alpha-\delta}|f(\operatorname{sh}\alpha')|\sqrt{\operatorname{ch}\alpha'}\,d\alpha' +$$

$$+\int_{\alpha-\delta}^{\alpha}|f(\operatorname{sh}\alpha')|\sqrt{\operatorname{ch}\alpha'}\,d\alpha' = O(T^{-1})+o(1)=o(1) \qquad T\to\infty \tag{3.12}$$

Наконец,

$$\int_0^\alpha |f(\operatorname{sh}\alpha')|\left(\frac{\operatorname{ch}\alpha'}{\operatorname{ch}\alpha}\right)^{1/2}\frac{1-e^{-(\alpha+\alpha')T}}{(\alpha+\alpha')T}\,d\alpha' \leqslant \frac{1}{\alpha T}\int_0^\alpha |f(\operatorname{sh}\alpha')|\sqrt{\operatorname{ch}\alpha'}\,d\alpha' =$$

$$= O(T^{-1}) = o(1), \qquad T\to\infty \tag{3.13}$$

Из (3.9) — (3.13) вытекает

$$\lim_{T\to\infty} J_1(T, \operatorname{sh}\alpha) = {}^1/_2 f(\operatorname{sh}\alpha - 0) \tag{3.14}$$

Исследование интеграла J_2 проводится аналогичным образом. Повторяя рассуждения, получаем

$$J_2(T, \operatorname{sh}\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_\alpha^\infty f(\operatorname{sh}\alpha')\left(\frac{\operatorname{ch}\alpha'}{\operatorname{ch}\alpha}\right)^{1/2}\frac{\sin(\alpha'-\alpha)T}{\alpha'-\alpha}\,d\alpha' +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_\alpha^\infty f_1(\operatorname{sh}\alpha')\left(\frac{\operatorname{ch}\alpha'}{\operatorname{ch}\alpha}\right)^{1/2}\frac{\sin(\alpha'+\alpha)T}{\alpha'+\alpha}\,d\alpha' +$$

$$+O(1)\int_\alpha^\infty |f(\operatorname{sh}\alpha')|\left(\frac{\operatorname{ch}\alpha'}{\operatorname{ch}\alpha}\right)^{1/2}\frac{1-e^{-(\alpha'-\alpha)T}}{(\alpha'-\alpha)T}\,d\alpha' +$$

$$+O(1)\int_\alpha^\infty |f_1(\operatorname{sh}\alpha')|\left(\frac{\operatorname{ch}\alpha'}{\operatorname{ch}\alpha}\right)^{1/2}\frac{1-e^{-(\alpha'+\alpha)T}}{(\alpha'+\alpha)T}\,d\alpha' \tag{3.15}$$

Отсюда, так же, как и выше, находим

$$\lim_{T\to\infty} J_2(T, \operatorname{sh}\alpha) = {}^1/_2 f(\operatorname{sh}\alpha + 0) \tag{3.16}$$

Таким образом,

$$\lim_{T\to\infty} J(T, x) = {}^1/_2[f(x+0)+f(x-0)] \tag{3.17}$$

Равенство (3.17) доказано для положительных x. Справедливость его для $x < 0$ следует из четности функций $J(T, x)$ и $f(x)$ относительно x. Проверка (3.17) при $x = 0$ требует лишь незначительного изменения рассуждений.

Итак, теорема разложения (1.4) доказана. Рассмотрение нечетного случая осуществляется таким же образом, причем вместо формул (2.6), (2.9) и (2.11) используются формулы (2.7), (2.10) и (2.12).

§ 4. **Примеры.** 1. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases} \tag{4.1}$$

[1] Из условий, наложенных на $f(x)$, следует $f(\operatorname{sh}\alpha')\sqrt{\operatorname{ch}\alpha'} \in L(0, \infty)$.

Воспользовавшись тождеством

$$\frac{P_{-1/2+i\tau}(ix)+P_{-1/2+i\tau}(-ix)}{2}=-\frac{1}{1/4+\tau^2}\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+1}\,\frac{P^1_{-1/2+i\tau}(ix)+P^1_{-1/2+i\tau}(-ix)}{2} \qquad (4.2)$$

($P_\nu^1(z)$ — присоединенная функция Лежандра), и применяя теорему (1.4), получаем

$$f(x)=-2\sqrt{a^2+1}\;\times \qquad (-\infty<x<\infty) \qquad (4.3)$$

$$\times\int_0^\infty\frac{\tau\,\mathrm{th}\,\pi\tau}{(1/4+\tau^2)\,\mathrm{ch}\,\pi\tau}\,\frac{P^1_{-1/2+i\tau}(ia)+P^1_{-1/2+i\tau}(-ia)}{2}\,\frac{P_{-1/2+i\tau}(ix)+P_{-1/2+i\tau}(-ix)}{2}\,d\tau$$

2. Полагая $f(x)=(x^2+1)^{-1/2}$ и принимая во внимание равенство

$$\int_0^\infty\frac{P_{-1/2+i\tau}(ix)+P_{-1/2+i\tau}(-ix)}{2}\,\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{\pi}{\mathrm{ch}\,\pi\tau}\{P_{-1/2+i\tau}(0)\}^2 \qquad (4.4)$$

находим

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=2\pi\int_0^\infty\frac{\tau\,\mathrm{th}\,\pi\tau}{\mathrm{ch}^2\,\pi\tau}\{P_{-1/2+i\tau}(0)\}^2\,\frac{P_{-1/2+i\tau}(ix)+P_{-1/2+i\tau}(-ix)}{2}\,d\tau$$

$$(-\infty<x<\infty) \qquad (4.5)$$

3. Обобщением формул (4.5) является разложение

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2+1}}= \qquad (-\infty<x<\infty) \qquad (4.6)$$

$$=2\pi\int_0^\infty\frac{\tau\,\mathrm{th}\,\pi\tau}{\mathrm{ch}^2\,\pi\tau}P_{-1/2+i\tau}(0)\,\frac{P_{-1/2+i\tau}(ia)+P_{-1/2+i\tau}(-ia)}{2}\,\frac{P_{-1/2+i\tau}(ix)+P_{-1/2+i\tau}(-ix)}{2}\,d\tau$$

4. В заключение приведем пример разложений функции с бесконечным разрывом непрерывности

$$f(x)=\begin{cases}(a^2-x^2)^{-1/2} & |x|<a\\ 0\;, & |x|>a\end{cases} \qquad (4.7)$$

$$f(x)=\pi\int_0^\infty\frac{\tau\,\mathrm{th}\,\pi\tau}{\mathrm{ch}\,\pi\tau}P_{-1/2+i\tau}(0)\,P_{-1/2+i\tau}(\sqrt{a^2+1})\,\frac{P_{-1/2+i\tau}(ix)+P_{-1/2+i\tau}(-ix)}{2}\,d\tau \qquad (4.8)$$

Предположение о кусочной непрерывности функции в этом случае нарушается в точках $x=\pm a$, однако нетрудно видеть, что теоремы разложения (1.3) — (1.5) сохраняют силу.

Поступила 2 XI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Mehler F. G., Ueber eine mit Kügel und Cylinder Funktionen verwandte Funktion und ihre Anwendung in der Theorie der Elektricitäts-verteilung. Math. Ann., 1881, v. 18.
2. Фок В. А. О разложении произвольной функции в интеграл по функциям Лежандра с комплексным значком. Докл. АН СССР, 1943, т. 39, № 7, стр. 279.
3. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. Изд. М., Физматгиз, 1963 изд. второе.
4. Лебедев Н. Н. Решение проблемы Дирихле для гиперболоидов вращения. ПММ, 1947, т. 11, вып. 2, стр. 251.
5. Лебедев Н. Н., Скальская И. П., Уфлянд Я. С. Сб. задач по матем. физ., М., Гостехиздат, 1955.
6. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.— Л., Изд. АН СССР, 1963.
7. Weyl H., Ueber gewöhnliche lineare Differential-gleichungen mit singulären Stellen und ihre Eigenfunktionen. Nachr. Königl. Gesellschaft Wissenschaften Göttingen, 1910.
8. Титчмарш Э. Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. М., Изд. иностр. лит-ры. 1960.